Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik IV: Statistische Mechanik und Thermodynamik

Dr. A.Zharikov, Prof. M.Zacharias, TU München, WS 2012/13

Übungsblatt 1 (15.10.12)

1.1 Lagrange-Multiplikatoren

a) Diskutieren Sie die Lagrange-Multiplikatoren-Methode.

b) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x, y) = x + y$ $(Gl.1)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ $(Gl.2)$.

   i) Verwenden Sie in Gl.(1) die explizite Funktion $y = y(x)$, die der Nebenbedingung (2) genügt.

   ii) Verwenden Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

1.2 Multinomialverteilung.

Die Wahrscheinlichkeit, ein Molekül im Zustand **i** zu finden, ist durch p_i gegeben. Betrachten Sie das System aus N nicht wechselwirkenden, als unterscheidbar angenommenen Molekülen (Teilsystemen):

(a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(n_1, n_2, ...)$ dafür, die n_1 Moleküle im Zustand **1** , n_2 Moleküle im Zustand **2** usw. $(N = \sum n_i)$ zu finden, durch

$$P(n_1, n_2, ...) = W(n_1, n_2, ..) \prod_i p_i^{n_i} = \frac{N!}{\prod_i n_i!} \prod_i p_i^{n_i}$$

gegeben ist.

(b) Bestimmen $\{n_i^*\}$, die dem Maximum von $P(n_1, n_2, ...)$ entsprechen. Berechnen Sie den Mittelwert $\overline{n_i}$

(c) Nehmen Sie an, dass die *a priori* Wahrscheinlichkeiten p_i gleich seien. Eine Verteilung sei nun durch die Angabe der Zahlen $\{n_i\}$ von Teilchen pro Zustand festgelegt. Verwenden Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren, um das Maximum des Gewichtes $W(\{n_i^*\})$ und die entsprechende wahrscheinlichste Verteilung $\{n_i^*\}$ unter der Nebenbedingung $\sum \epsilon_i n_i = E$ zu finden.

Hinweis: Verwenden Sie in (b,c) die Näherung $ln\, n! = n\, ln\, n - n$