Blatt 9 (14.12.2016)

Abgabe: 21.12.2016

Aufgabe 1: Rubidium-87 BEC (4 Punkte)

Betrachten Sie eine Ansammlung von 5,000 Rubidium-87 Atomen, die in einer Box mit Volumen $V = (10^{-5}\ \mathrm{m})^3$ eingeschloßen sind.
1.1 Berechnen Sie die Energiedifferenz, $\Delta\epsilon$, zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand. Geben Sie das Ergebnis in Joules und Elektronenvolt an. Bei welcher Temperatur erwarten wir eine starke Boltzman Unterdrückung des ersten angeregten Zustands?
1.2 Berechnen Sie die Kondensationstemperatur T_c und vergleichen Sie $k_B T_c$ mit $\Delta\epsilon$.
1.3 Nehmen Sie an, dass $T = 0.95T_c$. Wie viele Atome sind im Grundzustand? Wie nahe ist das chemische Potential zur Energie des Grundzustands? Wie viele Atome sind in jedem der (dreifach entarteten) ersten angeregten Zustände?
1.4 Wiederholen sie die Aufgabenteile (**1.2**) und (**1.3**) für $5 \cdot 10^6$ Atome, die im selben Volumen eingeschloßen sind. Erörtern Sie die Bedingungen, unter welchen die Anzahl an Atomen im Grundzustand viel größer als die Anzahl an Atomen im ersten angeregten Zustand ist.
1.5 Drücken Sie $k_B T_C$ mittels $\Delta\epsilon$ und N aus. Berechnen Sie, für welche Teilchenzahlen $k_B T_c$ und $\Delta\epsilon$ vergleichbar sind.

Aufgabe 2: Ein Toy-Model des frühen Universums (8 Punkte)

Im Volumen V_1 befindet sich bei der Temperatur $T_0 \gg 2m_e c^2/k_B$ ein Gas von Photonen, die sich mittels der Reaktion

$$e_+ e_- \leftrightarrow 2\gamma \tag{1}$$

im Gleichgewicht mit Elektronen und Positronen befinden. Die Elektronen und Positronen können als ultra-relativistisch betrachtet werden und das System trägt keine elektrische Ladung.
2.1 Wie groß ist die Gesamtentropie? [Hinweis: $\int_0^\infty \mathrm{d}x\ x^3/(\exp(x)+1) = 7\pi^4/120$]
2.2 Das Volumen werde nun adiabatisch auf den Wert V_2 expandiert, wobei das gesamte System immer im Gleichgewicht bleibt. Das Volumen V_2 sei so groß, dass die Temperatur soweit fällt, dass alle Elektronen und Positronen über obige Reaktion vernichtet werden. Wie groß ist die Temperatur T_γ der Photonen am Ende der Expansion?
2.3 Das Volumen enthalte nun zusätzlich masselose Neutrinos mit verschwindendem chemischen Potential, die weder mit den Photonen noch den anderen Fermionen wechselwirken und somit auch nicht mit diesen im Gleichgewicht stehen. Wie groß ist das Verhältnis der Temperaturen T_ν/T_γ nach der Expansion, wenn die Temperatur der Neutrinos zu Beginn ebenfalls T_0 betragen hat und die Neutrinos immer im Gleichgewicht bleiben?
(Anmerkung: Im frühen Universum ist eine solche adiabatische Expansion realisiert. Das Verhältnis der Temperaturen der Hintergrundstrahlung von Photonen und Neutrinos lässt sich durch diese Rechnung bestimmen).

Aufgabe 3: Die Plancksche Strahlungsverteilung (8 Punkte)

3.1 Zeigen Sie, dass die Frequenz $\omega_{\max}$, bei der die Plancksche Strahlungsverteilung $u(\omega)$ ihr Maximum hat, proportional zur Temperatur T ist. Argumentieren Sie ohne Zuhilfenahme numerischer Methoden, dass in der Relation

$$\omega_{\max} = x_{\max} k_B T/\hbar \tag{2}$$

für den Proportionalitätsfaktor $x_{\max} \approx 3$ gilt.
3.2 Schreiben Sie die Plancksche Verteilung in eine Wellenlängenverteilung um:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\ u(\omega) = \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\ \tilde{u}(\lambda) \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass das Maximum von $\tilde{u}(\lambda)$ bei

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi\hbar c}{\tilde{x}_{\max} k_B T} \tag{4}$$

mit $\tilde{x}_{\max} \approx 5$ liegt (wieder ohne numerische Methoden).
3.3 Leiten Sie den Druck p, den ein Photongas in einem Hohlraum auf die Wände ausübt, ab, indem Sie den Impulsübertrag pro Fläche und Zeit betrachten, wenn die Photonen an den Wänden elastisch reflektiert werden. Zeigen Sie, dass (wie in der Vorlesung thermodynamisch bestimmt)

$$p = \frac{1}{3}\frac{E}{V} \tag{5}$$

gilt.