Blatt 8 (06.12.2016)

Abgabe: 12.12.2016

Aufgabe 1: Vielteilchensysteme und Fockraum (10 Punkte)

1.1 Die quantentheoretische Beschreibung von Vielteilchensystemen von Bosonen und Fermionen verwendet die Besetzungszahlzustände, die sich durch explizite Symmetrisierung bzw. Antisymmetrisierung von Produkten von Einteilchenzuständen ergeben. Die explizite (Anti-) Symmetrisierung kann durch die Einführung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren umgangen werden. Im Folgenden soll dies für *Bosonen* gezeigt werden. Dazu werden auf den Besetzungszahlzuständen die Operatoren a_i und $a_i^\dagger$ wie folgt definiert:

$$a_i \left|n_1, n_2, ..., n_i, ..\right\rangle = \sqrt{n_i}\left|n_1, n_2, ..., n_i - 1, ..\right\rangle , \quad a_i^\dagger \left|n_1, n_2, ..., n_i, ..\right\rangle = \sqrt{n_i + 1}\left|n_1, n_2, ..., n_i + 1, ..\right\rangle . \tag{1}$$

$a_i^\dagger$ fügt also dem Zustand ein Teilchen im Einteilchenzustand $|\lambda_i\rangle$ hinzu und sorgt für die korrekte Symmetrisierung, a_i entfernt ein solches. Die Operatoren wirken auf der direkten Summe aller (symmetrisierten) N-Teilchen-Hilberträume $\mathcal{F} = \sum_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(N)}$, dem sogenannten *Fockraum*. Die Zustände $|\lambda_i\rangle$ bilden eine Orthonormalbasis des Einteilchen-Hilbertraums. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:
a) $a_i^\dagger$ ist der zu a_i adjungierte Operator.
b) Es gelten die Vertauschungsrelationen $[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$, und $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$.
c) Die Besetzungszahlzustände sind durch $|n_1, n_2, ...\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!...}}(a_1^\dagger)^{n_1}(a_2^\dagger)^{n_2}...\,|0\rangle$ gegeben. $|0\rangle$ bezeichnet den normierten Nullteilchenzustand (Vakuum). Für ein N-Teilchensystem von freien Teilchen lautet der Hamilton-Operator

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{k=1}^{N} h_k\,, \quad h_k = \frac{\vec{P}_k^2}{2m}\,, \tag{2}$$

wobei $\vec{P}_k$ den auf das k-te Teilchen wirkenden Impulsoperator bezeichnet ($\vec{P}$ bezeichnet den Impulsoperator im Einteilchen-Hilbertraum). Zeigen Sie durch explizite Anwendung von $\mathcal{H}_0$ in der oben und unten angegebenen Form auf beliebige Besetzungszahlzustände im N-Teilchen-Hilbertraum $\mathcal{H}^{(N)}$, dass

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i,j} E_{ij} a_i^\dagger a_j \quad \text{mit} \quad E_{ij} = \langle\lambda_i|\, h \,|\lambda_j\rangle \tag{3}$$

Was ergibt sich, wenn man als Basiszustände $|\lambda_i\rangle$ des Einteilchensystems die Impulseigenzustände $|\vec{p}_i\rangle$ wählt? Welche Bedeutung hat folglich der Operator $a_i^\dagger a_i$?
1.2 Schreiben Sie die Dichtematrix und das großkanonische Potential, indem Sie den Hamilton- und Teilchenzahloperator verwenden. Vergleichen Sie dies mit dem in der Vorlesung hergeleiteten Resultat.

Aufgabe 2: Weiße Zwerge und Neutronensterne (10 Punkte)

Wenn die Energiequellen in großen Sternen aufgebraucht sind und sich die Temperatur dem Nullpunkt nähert, wird der Endzustand durch das Wechselspiel von Gravitation und chemischer oder nuklearer Energie, die benötigt wird um das das Material zu komprimieren, bestimmt. Ein vereinfachtes Model von gewöhnlicher stellarer Materie ist ein Fermi-See von nicht-wechselwirkenden Elektronen mit ausreichend vielen Atomkernen um die Ladung auszugleichen. Wir modellieren einen weißen Zwergstern als eine gleichmäßige Dichte von $N/2$ He^4 Kernen, die durch eine ebenfalls gleichmäßige Dichte von Elektronen bei $T \ll T_F$ kompensiert wird. Der Radius des Sterns ist R, seine Masse $M = 2Nm_p$, wobei m_p die Protonenmasse ist. Nehmen Sie an, dass die innere Energie ausschließlich durch die Energie eines nicht-wechselwirkenden Elektronengases (welche die Energieniveaus bis zur Fermi-Energie füllt) gegeben ist.

2.1 Ausgehend von nicht-relativistischen Elektronen, berechnen Sie die Energie einer Kugel aus Elektronen. Berechnen Sie die newtonsche Gravitationsenergie einer Kugel von He^4 Kernen von gleicher, aber entgegengesetzter, Ladungsdichte. Bei welchem Radius ist die Gesamtenergie minimal?

2.2 Benutzen Sie das nicht-relativistische Model aus (**2.1**) um die Fermi-Energie der Elektronen eines weißen Zwergsterns mit der selben Masse wie unserer Sonne zu berechnen, wobei Sie annehmen können, dass er komplett aus Helium besteht. (i) Vergleichen Sie das Ergebnis mit der typischen chemischen Bindungsenergie eines Atoms. Ist es gerechtfertigt, dass wir die Elektron-Elektron und Elektron-Nukleon Wechselwirkung vernachlässigen? (ii) Vergleichen Sie die Fermi-Energie mit der Temperatur im Inneren des Sterns (etwa 10^7 K). Ist die Annahme gerechtfertigt, dass das Elektronengas entartet ist (bei näherungsweise verschwindender Temperatur)? (iii) Vergleichen Sie die Fermi-Energie mit der Masse eines Elektrons. Ist die nicht-relativistische Näherung gerechtfertigt? (iv) Vergleichen Sie die Fermi-Energie mit der Massendifferenz von Proton und Neutron.

2.3 Nun beziehen wir relativistische Effekte mit ein. Die Energie des Elektrons ist jetzt durch die relativistische Energie-Impuls Beziehung $\epsilon = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2}$ gegeben. Zeigen Sie, dass der Fermi-Druck der Elektronen im nicht-relativistischen bzw. relativistischen Grenzfall durch

$$p_0 = \begin{cases} \frac{4}{5} a x_F^5 & x_F \ll 1 \\ a x_F^4 (1 - \frac{1}{x_F^2}) & x_F \gg 1 \end{cases} \tag{4}$$

gegeben ist. Hier bezeichnet $x_F = p_F/(m_e c)$, $p_F = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$ den Fermi-Impuls und $a = \frac{m_e c^2}{12\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3$.

2.4 Wie hängt der Druck p_0 jeweils von Masse und Radius des Sterns ab?

2.5 Als Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht wird angenommen, dass der Eigengravitation des Sterns durch den Fermi-Druck entgegengewirkt wird. Etwas vereinfachend folgt dann die Beziehung (streng genommen bis auf einen Faktor der Ordnung Eins) $p_0 = \frac{G_N M^2}{4\pi R^4}$. G_N bezeichnet die Newtonsche Gravitationskonstante. Leiten Sie aus dem Vorangegangenen eine Beziehung zwischen dem Radius und der Masse des weißen Zwergs ab, und zwar sowohl für den nicht-relativistischen wie für den relativistischen Fall. Zeigen Sie, dass in letzterem ein stabiles Gleichgewicht nur möglich ist, wenn die Masse kleiner als die *Chandrasekhar-Masse*

$$M_{\mathrm{cr}} = \frac{8}{9\pi} \left(\frac{27\pi}{64}\right)^{3/2} \left(\frac{\hbar c}{G_N m_p^2}\right)^{3/2} m_p \tag{5}$$

ist. Vergleichen Sie M_{cr} mit der Sonnenmasse.