Theoretische Physik 4A (Statistische Mechanik und Thermodynamik)
Wintersemester 2016/17
Prof. Andreas Weiler (TUM), Reuven Balkin (TUM)
https://www.t75.ph.tum.de/teaching/ws1617-statistical-physics-t4a/

Blatt 7 (29.11.2016) Abgabe: 06.12.2016

Aufgabe 1: Wasserdampf (5 Punkte)

Betrachten Sie flüssiges Wasser im thermodynamischen Gleichgewicht mit Wasserdampf. Der Wasserdampf soll als ideales Gas approximiert werden. Bei $T = 25°\mathrm{C}$ beträgt der Dampfdruck von Wasser $p_w = 3.17$ kPa, seine latente Wärme $L = 44.0$ kJ/mol.

1.1 Berechnen Sie den Dampfdruck von Wasser als Funktion der Temperatur unter der Annahme, dass die latente Wärme konstant ist. Schätzen Sie die tatsächliche Temperaturabhängigkeit der latenten Wärme ab, indem Sie Ihr Ergebnis mit dem Siedepunkt von Wasser bei Normalbedingungen vergleichen.

1.2 Außer Wasserdampf befindet sich nun ein weiteres Gas oder Gasgemisch (z.B. Luft), das sich nicht in Wasser löst, über der Wasseroberfläche und trägt zum Gesamtdruck p bei. Wie groß ist die relative Änderung des Dampfdrucks p_w von Wasser bei $T = 25°\mathrm{C}$ und $p = 10^5$ Pa verglichen mit der Situation von Aufgabenteil (**1.1**) (kein weiteres Gas)? [Achtung: In diesem Aufgabenteil kann das spezifische Volumen des flüssigen Wassers $v_f = 1.8 \times 10^{-5}$ m^3/mol nicht vernachlässigt, soll jedoch als druckunabhängig angenommen werden.]

Aufgabe 2: Quantenmechanische Entropie (7 Punkte)

2.1 Zeigen Sie, dass die Entropie eines idealen Fermi-Gases durch

$$S = -k_B \sum_k \left[(1 - n_k)\ln(1 - n_k) + n_k \ln n_k\right] \tag{1}$$

gegeben ist, wobei n_k die mittleren Besetzungszahlen der Einteilchenzustände bezeichnet. Zeigen Sie weiter, dass $\lim_{T\to 0} S = 0$ im Einklang mit dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik. Leiten Sie das entsprechende Ergebnis für das Bose-Gas ab. Was ergibt sich jeweils für kleine n_k?

2.2 Ein quantenmechanisches System (definiert durch einen Hamiltonoperator) bei Temperatur T, wird beschrieben durch die Dichtematrix $\rho(t)$ mit entsprechender Entropie $S(t) = -\mathrm{Tr}[\rho(t)\ln \rho(t)]$. Geben Sie die Zeitentwicklungsgleichung für die Dichtematrix an und verwenden Sie diese um $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$ zu berechnen.

2.3 Verwenden Sie die Methode der Lagrange Multiplikatoren um das Maximum des Dichteoperators $\rho_{\max}$ zu finden, welches das Funktional $S[\rho]$ unter der Bedingung einer festen mittleren Energie $\langle \mathcal{H} \rangle = \mathrm{Tr}[\mathcal{H}\rho] = E$ maximiert.

2.4 Zeigen Sie, dass die Lösung aus (**2.3**) stationär ist, d.h. $\partial\rho_{\max}/\partial t = 0$.

Aufgabe 3: Zustandssummen für 2 Teilchen (4 Punkte)

Zwei Teilchen befinden sich in drei Niveaus mit de Energien $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3,$. Es handelt sich um (i) klassische, unterscheidbare Teilchen, die der Maxwell-Boltzmannstatistik genügen, (ii) Bosonen mit Spin 0, (iii) Fermionen mit Spin 1/2. Geben Sie die jeweiligen Zustandssummen an. Der Einfachheit halber setzen wir das chemische Potential in allen Fällen Null.

Aufgabe 4: Zustandsdichte (4 Punkte)

Berechnen Sie die Zustandsdichte für nicht-relativistische Teilchen in D Dimensionen. Benutzen Sie dazu wie in der Vorlesungen zunächst periodische Randbedingungen und vergleichen mit dem Ergebnis aus der Vorlesung (für den Spezialfall $D = 3$):

$$g_{D=3}(\epsilon) = g_s \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\epsilon} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass man dasselbe Resultat erhält, wenn man stattdessen annimmt, dass außerhalb des Kastens das Potential $U(\vec{r}) = \infty$ beträgt. Wie verhält sich die Zustandsdichte in $D = 2$ ($D = 1$)?