Theoretische Physik 4A (Statistische Mechanik und Thermodynamik)
Wintersemester 2016/17
Prof. Andreas Weiler (TUM), Reuven Balkin (TUM)
https://www.t75.ph.tum.de/teaching/ws1617-statistical-physics-t4a/

Blatt 5 (16.11.2016)

Abgabe: 23.11.2016

Aufgabe 1 (3 Punkte)

1.1 Zeigen Sie, dass

$$\left.\frac{\partial C_V}{\partial V}\right|_T = T\left.\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right|_V \quad \text{und} \quad \left.\frac{\partial C_p}{\partial p}\right|_T = -T\left.\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right|_p . \tag{1}$$

1.2 Zeigen Sie, dass für ein van-der-Waals Gas mit der Zustandsgleichung

$$\left(p + a\frac{N^2}{V^2}\right)(V - Nb) = Nk_B T \qquad a, b = \text{Const.} \tag{2}$$

$C_V(T, V)$ tatsächlich unabhängig vom Volumen ist und (für kleine a, b)

$$C_p - C_V \approx Nk_B T + 2a\frac{N^2}{VT} . \tag{3}$$

1.3 Ein Stoff habe die Eigenschaft, dass sowohl C_V und C_p konstant sind. Zeigen Sie, dass die Zustandsgleichung und innere Energie in diesem Fall die Form

$$(C_p - C_V)T = (p + a)(V + B)\,, \tag{4}$$
$$E = C_V T + aV + c \tag{5}$$

haben, wobei a, b, c Konstanten sind.

1.4 Zeigen Sie, dass für ein beliebiges System die folgende Beziehung zwischen der isothermen und der adiabatischen Kompressibilität gilt:

$$\kappa_T - \kappa_S = VT\frac{\alpha^2}{C_p} \tag{6}$$

Aufgabe 2: Virialkoeffizienten (5 Punkte)

Betrachten Sie ein Gas aus Teilchen im d-dimensionalen Raum, welche durch ein paarweises Zentralpotential, $V(r)$, miteinander wechselwirken, wobei

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & 0 < r < a\,, \\ -\epsilon & a < r < b\,, \\ 0 & b < r < \infty \end{cases} \tag{7}$$

2.1 Berechnen Sie den zweiten Virialkoeffizienten $B_2(T)$ und erläutern Sie sein Verhalten bei hohen und niedrigen Temperaturen.

2.2 Berechnen Sie die erste Korrektur zur isothermalen Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\bigg|_{T,N} \tag{8}$$

2.3 Bringen Sie im Grenzfall von hohen Temperaturen die Zustandsgleichung in die van-der-Waals Form und identifizieren sie die van-der-Waals Parameter.
2.4 Berechnen Sie den dritten Virialkoeffizienten $B_3(T)$ für $b = a$ und $d = 1$.

Aufgabe 3 : Exakte Lösung für ein eindimensionales Gas (12 Punkte)

In der statistischen Mechanik gibt es nur sehr wenige exakt lösbare Systeme von wechselwirkenden Teilchen. Exakte Lösungen sind jedoch sehr wichtig, da sie es uns erlauben die Zuverlässigkeit von Näherungsverfahren zu überprüfen. Ein eindimensionales Gas mit kurzreichweitigen Wechselwirkungen is ein solches exakt lösbares System.
3.1 Zeigen Sie, dass für ein Potential mit einem harten Kern, welches die Wechselwirkung von weiteren Nachbarn abschirmt, der Hamiltonoperator/ die Hamiltonfunktion für N Teilchen als

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=2}^{N} V(x_i - x_{i-1})\,. \tag{9}$$

geschrieben werden kann. Die (ununterscheidbaren) Teilchen werden durch Koordinaten x_i beschrieben, sodass $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_N \leq L$, wobei L die Länge der Box bezeichnet, die die Teilchen einschließt.
3.2 Schreiben Sie den Ausdruck für die Zustandssumme $Z(T, N, L)$. Gehen Sie über zu Variablen

$$\delta_1 = x_1\,, \quad \delta_2 = x_2 - x_1\,, ..., \delta_N = x_N - x_{N-1}\,, \tag{10}$$

und geben Sie die Integrationsgrenzen sowie die zugehörigen Einschränkungen an.
3.3 Betrachten Sie die Gibbssche Zustandssumme, die aus einer Laplace Transformation hervorgeht

$$\mathcal{Z}(T, N, p) = \int_0^\infty \mathrm{d}L \exp[-\beta p L] Z(T, N, L)\,, \tag{11}$$

und finden Sie die Standardformel für p im kanonischen Ensemble, indem Sie den Integranden extremieren.
3.4 Wechseln Sie Variablen von L nach $\delta_{N+1} = L - \sum_{i=1}^{N} \delta_i$, und finden Sie den Ausdruck für $\mathcal{Z}(T, N, p)$ als Produkt von eindimensionalen Integralen über jedes i.
3.5 Finden Sie für gegebenen Druck p die Ausdrücke für die mittlere Länge L und die Dichte $n = \frac{N}{L(T,N,p)}$ (Dies beinhaltet Verhältnisse von Integralen, die aber einfach auszuwerten sein sollten.)
3.6 Berechnen Sie die Zustandsgleichung $p(T, N)$ für ein Gas aus harten Kugeln mit minimalem Abstand a zwischen zwei Teilchen. Vergleichen Sie den Faktor für das ausgeschloßene Volumen mit der Näherungslösung, die wir in früheren Aufgaben erhalten haben. Bestimmen Sie auch den allgemeinen Virialkoeffizienten $B_l(T)$.