Theoretische Physik 4A (Statistische Mechanik und Thermodynamik)
Wintersemester 2016/17
Prof. Andreas Weiler (TUM), Reuven Balkin (TUM)
https://www.t75.ph.tum.de/teaching/ws1617-statistical-physics-t4a/

Blatt 3 (02.11.2016)

Abgabe: 09.11.2016

Aufgabe 1: Phasenraumvolumen

Betrachten Sie ein eindimensionales System mit dem Hamilton-Operator (bzw. der Hamilton-Funktion)

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{1}$$

für die folgenden zwei Fälle,

$$\text{System (1): } V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{2}$$

$$\text{System (2): } V(q) = \begin{cases} 0 & 0 < q < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} . \tag{3}$$

1.1 (2 Punkte) Skizzieren Sie das klassische Phasenraumvolumen für Zustände mit Energie kleiner als E.

1.2 (2 Punkte) Lösen Sie für das System (2) die Schrödinger-Gleichung, um die Energieeigenwerte und -eigenzustände (Wellenfunktionen) zu bestimmen. (Für das System (1) kann nachfolgend das bekannte Resultat für die Energieeigenwerte ohne Ableitung verwendet werden.)

1.3 (2 Punkte) Zeigen Sie durch Berechnung des klassischen Phasenraumvolumens für Zustände mit Energie kleiner als E und Abzählung der entsprechenden quantenmechanischen Energie-eigenzustände, dass einem quantenmechanischen Zustand größenordnungsmäßig ein klassisches Phasenraumvolumen $2\pi\hbar$ entspricht.

Aufgabe 2: Anharmonischer Oszillator

Gegeben sei ein System vom N unabhängigen (unterscheidbaren) eindimensionalen, anharmonischen Oszillatoren mit dem Hamilton-Operator

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_i^2 + \lambda x_i^4 \right) . \tag{4}$$

2.1 $\lambda = 0$ (6 Punkte) Berechnen Sie zunächst für $\lambda = 0$ die kanonische Zustandssumme, die freie Energie F, die Energie E und das chemische Potential i) quantenmechanisch und ii) klassisch als Funktion der Temperatur T. Vergleichen Sie die Resultate für große und kleine Temperaturen. Erläutern Sie anhand des ersten Hauptsatzes, warum das chemische Potential für tiefe Temperaturen positiv, für hohe jedoch negativ ist.

2.2 $\lambda \neq 0$ (8 Punkte) Wiederholen Sie nun die quantenmechanische Berechnung der Zustandssumme, der freien Energie und der Energie für $\lambda \neq 0$, jedoch so klein, dass eine Entwicklung in λ nach dem ersten Korrekturglied abgebrochen werden kann. Untersuchen Sie dann den Grenzfall tiefer und hoher Temperaturen und schätzen Sie ab, bei welchen Temperaturen die Entwicklung in λ versagt.

Hinweis: Das Matrixelement

$$\langle n|x^4|n\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 3(2n^2 + 2n + 1) \tag{5}$$

im Energiezustand $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators mit Energie $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ kann verwendet werden.