Blatt 2 (25.10.2016)

Abgabe: 01.11.2016

Aufgabe 1: Dichteoperator

1.1 Photonen (3 Punkte) Ein Photon bewegt sich entlang der z-Achse. Geben Sie den Dichteoperator $\hat{\rho}$ für ein linear polarisiertes (in Richtung $\hat{x} = (1,0)$), ein zirkular rechts-händig polarisiertes $(1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2})$ und ein unpolarisiertes Photon an. Berechnen Sie $\mathrm{Tr}[\hat{\rho}]$, $\mathrm{Tr}[\hat{\rho}^2]$ und $S = -k_B \mathrm{Tr}[\hat{\rho}\log\hat{\rho}]$. Erklären Sie die Ergebnisse: welche Spur misst Informationen? Welche Spur definiert die Normierung? Welche Spur weist auf reine Zustände hin?

1.2 Spins (2 Punkte) Der Hamiltonoperator für ein Spin-1/2 Teilchen ist definiert als

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar}{2}\mathbf{B}\cdot\vec{\sigma}\,. \tag{1}$$

$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ist ein Vektor der Pauli-Matrizen und $\mathbf{B}$ ist das magnetische Feld. Zeigen Sie, dass jede 2×2 Dichtematrix $\hat{\rho}$ als

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1}_2 + \mathbf{p}\cdot\vec{\sigma}\right) \tag{2}$$

geschrieben werden kann. Benutzen Sie die Heisenbergsche Bewegungsgleichung $i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [\mathcal{H}, \hat{\rho}]$, um die Bewegungsgleichung für $\mathbf{p}$ abzuleiten,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{B}\times\mathbf{p}\,. \tag{3}$$

Aufgabe 2: Harte-Kugeln-Modell für ein Gas

Betrachten Sie ein Gas aus N harten Kugeln in einem Behälter mit Volumen V. Eine einzelne Kugel besitzt ein Volumen ω um seinen Schwerpunkt und schließt dieses für alle anderen Kugeln aus. Die Kugel, bzw. deren Schwerpunkt, kann sich in dem Volumen V bewegen (falls der Behälter ansonsten leer ist). Es gibt keine weiteren Wechselwirkungen zwischen den Kugeln, außer der Einschränkung, dass sich die Kugelvolumina nicht überlagern dürfen.

2.1 Entropie (2 Punkte) Berechnen Sie die Entropie S als Funktion der Gesamtenergie E.
Hinweis:

$$(v - a\omega)(v - (N-a)\omega) = \left(v - \frac{N}{2}\omega\right)^2 + O\left(\left(a - \frac{N}{2}\right)^2\right) \tag{4}$$

2.2 Zustandsgleichung (2 Punkte) Bestimmen Sie die Zustandsgleichung des Gases.
2.3 Isothermale Kompressibilität (1 Punkte) Zeigen Sie, dass die isothermale Kompressibilität, $\kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T$, immer positiv ist.

Aufgabe 3: Bekenstein-Hawking-Entropie (Schwarzes Loch)

Der Radius eines schwarzen Loches der Masse M ist gegeben durch $R_{\rm bh} = \frac{2MG}{c^2}$, wobei G die Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Dies ist der sogenannte Schwarzschild Radius. Hawking hat gezeigt, dass die Temperatur eines schwarzen Loches durch

$$T_{\rm bh} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \tag{5}$$

gegeben ist. Die Energie eines schwarzen Loches ist die Ruheenergie, $E = Mc^2$.
3.1 Spezifische Wärme (3 Punkte) Berechnen Sie die spezifische Wärme eines schwarzen Loches. Ist sie positiv oder negativ? Was heißt das?
3.2 Entropie (2 Punkte) Berechnen Sie die Bekenstein-Hawking-Entropie. Nehmen Sie hierfür an, dass die Entropie verschwindet, wenn das schwarze Loch masselos ist. Schreiben Sie das Resultat mittels der Fläche $A = 4\pi R_{\rm bh}^2$ und der Planck-Länge $l^* \equiv \sqrt{\hbar G/c^3}$. Erklären Sie das Resultat.

Aufgabe 4: Shannon-Entropie (Informationstheorie)

Die Entropie kann als Maß für den Informationsgehalt eines Systems betrachtet werden. Nehmen Sie an, es gibt N mögliche Nachrichten, die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von p_m, $m = 1, ..., N$ gesendet werden können. Die Shannon-Entropie ist dann definiert als

$$S = -k \sum_{m=1}^{N} p_m \log p_m \,, \qquad k = 1/\log 2\,. \tag{6}$$

4.1 Maximale und Minimale Entropie (2 Punkte) Nehmen Sie an $N = 2^\alpha$. Finden sie die maximalen und minimalen Werte von S unter der Bedingung $\sum_m p_m - 1 = 0$. Was ist der maximale und der minimale Wert der Entropie pro Bit S/α? In welchem Zusammenhang steht das zu der benötigten Anzahl an Bits in beiden Fällen, um eine Nachricht zu übermitteln? Hinweis: Verwenden Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren um das Maximum von S zu finden.
4.2 Kompressionslimit (2 Punkte) Begründen Sie, dass die Shannon-Entropie im Allgemeinen die minimale Anzahl an Bits angibt, die benötigt wird um ein Ensemble an Nachrichten zu übertragen.
4.3 Einfaches Beispiel (1 Punkte) Betrachten Sie ein Alphabet bestehend aus 4-Buchstaben, $\{a, b, c, d\}$, mit den Wahrscheinlichkeiten $p(a) = 2p(b) = 4p(c) = 4p(d) = \frac{1}{2}$. Ein binäres Codierungsschema ist gegeben durch

$$a \to 0 \quad b \to 10 \quad c \to 110 \quad d \to 111\,. \tag{7}$$

Dieses Codierungsschema heißt Huffman-Kodierung. Was ist die Shannon-Entropie in diesem Fall? Ist das Codierungsschema optimal, in dem Sinne dass es das Kompressionslimit vollständig ausreizt?