Blatt 11 (18.01.2017)

Abgabe: 25.01.2017

Aufgabe 1: Potts-Modell (5 Punkte)

Das q-Zustands-Potts-Modell ist eine Verallgemeinerung des Ising-Modells. Es existiert auf jedem Gitterpunkt die Variable $\sigma_i \in \{1, 2, ..., q\}$. Desweiteren ist die Hamiltonfunktion gegeben durch die Summe über die nächsten Nachbarn

$$\mathcal{H}_{\text{Potts}} = -\frac{3J}{2} \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i \sigma_j} \, . \tag{1}$$

1.1 Wieviele Grundzustände hat das System bei $T = 0$?
1.2 Zeige, dass das 3-Zustands-Potts-Modell äquivalent ist zur Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \, , \tag{2}$$

wobei

$$\vec{s}_i \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right\} . \tag{3}$$

Finde durch eine Mean-Field-Theorie für $\mathcal{H}$ die Selbstkonsitenzbedingung der Magnetisierung $\vec{m} = \langle \vec{s}_i \rangle$. Berechne zudem die Freie Energie in der Mean-Field-Theorie und zeige, dass, auch in Abwesenheit externer Felder, die Theorie einen Phasenübergang erster Ordnung durchläuft. [Hinweis: Die Rechnung vereinfacht sich, wenn argumentiert wird, dass es ausreicht sich auf Magnetisierungsvektoren der Form $\vec{m} = (m, 0)$ zu beschränken.]

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Betrachte die Freie Energie

$$F = a(T)m^2 + b(T)m^4 + c(T)m^6 \tag{4}$$

wobei $b(T) < 0$ und wegen Stabilität $c(T) > 0$ für alle T gilt. Skizziere die verschiedenen Möglichkeiten, wie die Freie Energie, bei Änderung von $a(T)$, variert und identifiziere außerdem den jeweiligen Grundzustand, sowie die metastabilen Zustände. Zeige zudem, dass das System einen Phasenübergang erster Ordnung bei einer gewissen Temperatur T_c druchläuft. Bestimme desweiteren noch die Werte $a(T_c)$ und die Unstetigkeit in m bei dem Übergang.

Aufgabe 3 : 'Domain walls' in Magneten (10 Punkte)

Die Freie Energiedichte eines Isingmagneten unter T_c kann näherungsweise als doppelter Potentialtopf mit zwei Minima bei $\pm m_0$ betrachtet werden:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}K(\nabla m)^2 + \frac{\mu(T)}{2}m^2 + (g/4!)m^4 \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2}K(\nabla m)^2 + (g/4!)(m^2 - m_0^2)^2 \,. \tag{6}$$

Diese Aufgabe untersucht die Struktur der durch eine 'domain wall' getrennten Regionen positiver Magnetisierung von denen mit negativer Magnetisierung.

Betrachte eine Magnetisierung $m(x)$ die nur entlang der x-Achse variert, wobei $m(-\infty) = -m_0$ und $m(\infty) = +m_0$. Dazwischen muss eine Barrierenregion mit $m \approx 0$ überwunden werden. Die Steifigkeit K unterdrückt starke Gradienten in der Magnetisierung; g bringt Regionen verschiedener Magnetisierung aus dem Gleichgewicht bei $\pm m_0$. Der zweite Term in $\mathcal{F}$ ist der doppelte Potentialtopf mit Barriere B, die zwei Regionen trennt und außerdem die Einheiten Energie pro Volumen besitzt. Eine Grenzfläche, der Dicke Δ zwischen $m = -m_0$ und $m = +m_0$, verursacht einen Energieverlust von $\sim B \times \Delta$ pro Fläche wegen der Barriere, welche ein möglichst kleines Δ bevorzugt. Der erste Term in $\mathcal{F}$ beschreibt die Steifigkeit der Ordnungsparameter gegen plötzliche Änderungen in m und addiert zudem die Energie pro Fläche $\sim K\Delta \times (m_0/\Delta)^2$.

3.1 Finde, unter Verwendung dieser groben Abschätzungen, B, minimiere die Summe und gib einen ungefähren Wert für die Energie pro Fläche der Bloch-Wand ausgedrückt durch K, m_0, und g an.

3.2 Finde die Gleichung, die $m(x)$ erfüllen muss, um $F = \int \mathcal{F} dx$ unter den Randbedingungen zu minimieren. (Dies ist die Euler-Lagrange Gleichung aus der Variationsrechung.)

3.3 Zeige, dass durch die Lösung $m(x)$ die Kombination

$$E = (K/2)(\partial m/\partial x)^2 - (g/4!)(m^2 - m_0^2)^2$$

unabhängig von x wird. [Hinweis: Was ist $\frac{\partial E}{\partial x}$?]

3.4 Argumentiere, ausgehend von den Randbedingungen, dass $E = 0$ und finde damit den minimalen Weg der Freien Energie $m(x)$ der die Randbedingungen $m(\pm\infty) = \pm m_0$ erfüllt. War die Abschätzung der Wanddicke aus Teil **3.1** korrekt? [Hinweis: Durch die Kenntnis von $dy/dx = f(y)$ ist auch $\int dy/f(y) = \int dx$ bekannt.]