Blatt 10 (11.01.2017)

Abgabe: 18.01.2017

Aufgabe 1: Ising-Modell (13 Punkte)

1.1 Berechnen Sie für das eindimensionale Ising-Modell von N Spins mit dem Hamilton-Operator

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \sigma_{i+1} \tag{1}$$

die kanonische Zustandssumme Z_N ohne Verwendung der Molekularfeldnäherung, z.B. indem Sie zuerst die Rekursionsformel $Z_{N+1} = 2Z_N \cosh(\beta J)$ etablieren. (Jedes σ_i kann die Werte ± 1 annehmen.)

1.2 Betrachten Sie nun das eindimensionale Ising-Modell mit periodischer Randbedingung ($\sigma_{N+1} = \sigma_1$) in einem äußeren Magnetfeld B. Der Hamilton-Operator lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i \quad \text{mit} \quad H_i = -\left[\frac{\mu B}{2}(\sigma_i + \sigma_{i+1}) + J\sigma_i\sigma_{i+1}\right] \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass die Zustandssumme dieses Systems durch

$$Z_N(T, B) = \mathrm{tr}(T^N) \tag{3}$$

gegeben ist, wobei T die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+\mu B)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-\mu B)} \end{pmatrix} \tag{4}$$

bezeichnet. [Hinweis:Die Matrixelemente von T entsprechen $e^{-\beta H_i}$ für die vierverschiedenen Spinkonfigurationen eines Paares benachbarter Spins.]

1.3 Berechnen Sie nun explizit die Zustandssumme für das Ising-Modell aus Aufgabenteil **1.2** . Ergebnis:

$$Z_N(T, B) = E_+^N + E_-^N \tag{5}$$

mit

$$E_\pm = e^{\beta J}\left[\cosh(\beta\mu B) \pm \sqrt{\cosh^2(\beta\mu B) - 2e^{-2\beta J}\sinh(2\beta J)}\right] \tag{6}$$

Vergleichen Sie dieses Ergebnis für $B = 0$ im thermodynamischen Limes ($N \to \infty$) mit dem Ergebnis aus **1.1**. Spielt die Wahl der Randbedingung im thermodynamischen Limes eine Rolle?

1.4 Berechnen Sie im thermodynamischen Limes die Magnetisierung $M(T, B)$ aus der Zustandssumme und zeigen Sie, dass das eindimensionale Ising-Modell für $T > 0$ keine spontane Magnetisierung besitzt. Warum könnte die Molekularfeldnäherung, die auch in einer Dimension eine ferromagnetische Phase vorhersagt, in einer Dimension weniger gut funktionieren als in drei Dimensionen?

Aufgabe 2: Magnonen (7 Punkte)

In ferromagnetischen Festkörpern gibt es neben den kollektiven Schwingungen der Atomlagen auch solche der Spinorientierung, deren Quasiteilchen als Magnonen bezeichnet werden. Diese besitzen jedoch die Dispersionsrelation

$$\omega(\vec{k}) = A|\vec{k}|^2 \tag{7}$$

2.1 Berechnen Sie in Analogie mit der Behandlung von Phononen den Beitrag der Magnonen zur großkanonischen Zustandssumme, zur mittleren Energie und zur Wärmekapazität CV . Pro Atom gibt es einen Spinfreiheitsgrad.

2.2 Berechnen Sie die mittlere Anzahl von Magnonen pro Atom eines Festkörpers und vergleichen Sie mit der mittleren Zahl von Phononen.

Für alle Größen außer der Zustandssumme soll neben dem exakten Resultat (als Integraldarstellung) auch der führende Term in der Entwicklung für kleine und große Temperaturen angegeben werden. Verwenden Sie für Magnonen wie für Phononen eine Debye-Näherung.