Blatt 1: Statistik (18.10.2016)

Abgabe: 25.10.2016

Aufgabe 1: Gammafunktion

Die Gammafunktion ist definiert als

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(x) > 0\,. \tag{1}$$

1.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\Gamma(N+1) = N\Gamma(N) \quad \text{und} \quad \Gamma(1) = 1\,. \tag{2}$$

Es folgt also

$$\Gamma(N+1) = N!\,, \quad N \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

1.2 (2 Punkte)

Leiten Sie die Stirlingformel her,

$$N! \sim \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad \text{für} \quad N \to \infty\,, \tag{4}$$

indem Sie in Eq. (1) den Exponenten von $t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln t - t}$ um das Maximum entwickeln. Dies ist die sogenannte Sattelpunktsapproximation.

Aufgabe 2: Erwartungswerte, Schwankungen

In einem Behälter mit Volumen V befinden sich N nicht wechselwirkende Teilchen.

2.1 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_n, dass in einem Teilvolumen v genau n Teilchen zu finden sind. Gehen Sie dabei von der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{v}{V}$ (bzw. $1-p$) aus, mit der sich ein Teilchen im Teilvolumen v (bzw. nicht) befindet.

2.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Mittelwert $\langle n \rangle$ der sich in v befindlichen Teilchen und die mittlere quadratische Abweichung $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$ davon.

2.3 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Verteilung p_n und die im Aufgabenteil **2.2** berechneten Mittelwerte im thermodynamischen Grenzfall $N, V \to \infty$ mit $\frac{N}{V} = \rho =$ konst. für beliebige Werte von n und speziell im Fall $n \gg 1$.

Aufgabe 3: Gerichtete Zufallsbewegung

Die Bewegung eines Teilchens in drei Dimensionen ist eine Serie unabhängiger Schritte der Länge l. Jeder Schritt bildet einen Winkel θ mit der z-Achse, der nach der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{5}$$

verteilt ist, welche auf eins normiert ist

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, f(\theta) = 1 \,. \tag{6}$$

Der azimutale Winkel ϕ ist gleichverteilt, d.h. seine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist einfach durch $g(\phi) = \frac{1}{2\pi}$ gegeben. Beide Winkel sind unabhängig voneinander. Das Teilchen beginnt auf dem Achsenursprung, und macht $N \gg 1$ Schritte.

3.1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Mittelwerte $\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle y^2 \rangle, \langle z^2 \rangle$ und die Kovarianzen $\langle xy \rangle, \langle xz \rangle, \langle yz \rangle$. Hinweis: Benutzen Sie die Symmetrie-eigenschaften des Problems!

3.2 (4 Punkte)

Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz, um die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x, y, z)$ zu bestimmen.