

5. Aharonov-Bohm-Effekt, Berry-Phase

Für die Berry-Phase betrachten wir Hamilton-Störoperatoren mit sehr schwacher Zeitabhängigkeit, für welche die sogenannte adiabatische Näherung gültig ist. Verwandt mit der Berry-Phase ist der Aharonov-Bohm-Effekt im Gegenwart eines statischen magnetischen Flusses. Bevor wir die adiabatische Näherung diskutieren behandeln wir noch kurz den komplementären Fall einer abrupten zeitlichen Änderung des Störoperators, welche mit der sogenannten "Sudden Approximation" behandelt wird.

5.1 Sudden Approximation

Wir betrachten den Zeitentwicklungsoperator $U(t, t')$ im Schrödingerbild

$$|\psi, t\rangle = U(t, t_0) |\psi, t_0\rangle$$

Mit der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \quad \text{folgt}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H U(t, t_0).$$

Nehmen wir nun an, daß $H = H_0 + V(t)$ mit konstantem H_0 . Für $t < t_i$, $V(t) \equiv 0$ und für $t > t_i + \tau_S$, $V(t) = \bar{V} = \text{const.}$ Innerhalb der Schaltzeit τ_S kommt es also zu einer plötzlichen Änderung des Hamiltonoperators.

Die Sudden Approximation setzt man auf

$\hbar \tau_S^{-1} \gg \langle H \rangle \Big|_{t \gg t_i}^{t \ll t_i}$. Führen wir den dimensionslosen Zeitparameter $s = \frac{t}{\tau_S}$ ein, erhalten wir

$$i \frac{\partial}{\partial s} U(t, t_0) = \frac{\tilde{V}_s H}{\hbar} U(t, t_0).$$

Damit gilt $U(t, t_0) \rightarrow 1$ für $\tilde{V}_s \rightarrow 0$.

Seien $|n\rangle$ die Eigenzustände von H_0 und $|\bar{n}\rangle$ von $H_0 + \bar{V}$, ergibt sich also eine Übergangswahrscheinlichkeit

$$P_{i \rightarrow \bar{j}} = |\langle \bar{j} | i \rangle|^2$$

Systeme, für die die Sudden Approximation von Relevanz ist, sind radioaktive Atome, bei denen sich die Elektronenhiülle nach einem Zerfall an die geänderte Kernladung anpasst, also z.B. ${}^3_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He}^+ + e^-$.

5.2 Adiabatische Näherung

Wir betrachten nun den umgekehrten Fall, für den die Schaltzeit groß ist gegenüber $\hbar \langle H \rangle^{-1}$.

Wir notieren die Schrödinger-Gleichung in der Form

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha; t\rangle = H(t) |\alpha; t\rangle,$$

und die zeitabhängigen Energieeigenwerte und -Eigenvektoren als

$$H(t) |n; t\rangle = E_n(t) |n; t\rangle$$

Damit entwickeln wir

$$|\alpha; t\rangle = \sum_n c_n(t) e^{i \mathcal{D}_n(t; t_0)} |n; t\rangle \quad \text{mit} \quad \mathcal{D}_n(t; t_0) = -\frac{1}{\hbar} \int_{t_0}^t E_n(t') dt'$$

Die Separation der Phase wird sich weiter unten als nützlich erweisen. Wir erhalten

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_n c_n(t) e^{i \mathcal{D}_n(t; t_0)} |n; t\rangle = \sum_n E_n(t) c_n(t) e^{i \mathcal{D}_n(t; t_0)} |n; t\rangle$$

$$= i \hbar \sum_n e^{i \mathcal{D}_n(t; t_0)} \left(\dot{c}_n(t) - c_n(t) \frac{i}{\hbar} E_n(t) + c_n(t) \frac{\partial}{\partial t} \right) |n; t\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_n e^{i\gamma_n(t;t_0)} \left[\dot{c}_n(t) + c_n(t) \frac{\partial}{\partial t} \right] |n;t\rangle = 0$$

Wir multiplizieren nun von links mit $\langle m;t | e^{-i\gamma_m(t;t_0)}$:

$$\dot{c}_m(t) = - \sum_n c_n(t) e^{i[\gamma_n(t;t_0) - \gamma_m(t;t_0)]} \langle m;t | \frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle.$$

Die Zeitableitung der Eigenwertgleichung ergibt:

$$\left(\dot{H} + H \frac{\partial}{\partial t} \right) |n;t\rangle = \left(\dot{E}_n(t) + E_n(t) \frac{\partial}{\partial t} \right) |n;t\rangle$$

Für $m \neq n$ folgt denn:

$$\begin{aligned} & \langle m;t | \dot{H}(t) |n;t\rangle + E_m(t) \langle m;t | \frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle \\ &= \underbrace{\langle m;t | \dot{E}(t) |n;t\rangle}_{=0} + E_n(t) \langle m;t | \frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle \\ \Rightarrow & \langle m;t | \dot{H}(t) |n;t\rangle = (E_n(t) - E_m(t)) \langle m;t | \frac{\partial}{\partial t} |n;t\rangle \end{aligned}$$

Für $m \neq n$ setzen wir dies in obige Gleichung ein und erhalten

$$\dot{c}_m(t) = -c_m(t) \langle m;t | \frac{\partial}{\partial t} |m;t\rangle - \sum_{n \neq m} c_n(t) e^{i[\gamma_n(t;t_0) - \gamma_m(t;t_0)]} \frac{\langle m;t | \dot{H} |n;t\rangle}{E_n(t) - E_m(t)}$$

Diese Gleichung ist eine formale Lösung des zeitabhängigen Problems ohne Näherung. Wir benutzen nun die adiabatische Näherung:

$$\frac{\langle m;t | \dot{H} |n;t\rangle}{E_n(t) - E_m(t)} \sim \frac{1}{\tau_s} \ll \langle m;t | \frac{\partial}{\partial t} |m;t\rangle \sim \frac{E_m}{\hbar}$$

Mit dieser läßt sich der zweite Term vernachlässigen, und wir erhalten:

$$c_n(t) = e^{i\gamma_n(t;t_0)} c_n(t_0)$$

$$\text{mit } \gamma_n(t;t_0) = i \int_{t_0}^t dt' \langle n;t' | \frac{\partial}{\partial t'} |n;t'\rangle$$

Die Funktion $\gamma_n(t; t_0)$ ist reell, da

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle n; t | n; t \rangle = \left[\frac{\partial}{\partial t} \langle n; t | \right] |n; t \rangle + \langle n; t | \left[\frac{\partial}{\partial t} |n; t \rangle \right]$$
$$\Rightarrow \left(\langle n; t | \left[\frac{\partial}{\partial t} |n; t \rangle \right] \right)^* = - \langle n; t | \left[\frac{\partial}{\partial t} |n; t \rangle \right]$$

Wir fassen zusammen: wenn das System in einem Energieeigenzustand $|n; t_0\rangle$ von $H(t_0)$ zur Zeit t_0 startet, dann verbleibt es in adiabatischer Näherung im Zustand $|n; t\rangle$. Für stark zeitabhängige Hamiltonoperatoren oder für entartete Energieeigenwerte kann diese Näherung zusammenbrechen.

Wir setzen $c_n(t) = e^{i\gamma_n(t; t_0)} c_n(t_0)$ ein in $|\alpha; t\rangle = \sum_n c_n(t) e^{i\varphi_n(t; t_0)} |n; t\rangle$, was uns zur Definition von

$$|\alpha^{(n)}; t\rangle := e^{i\gamma_n(t; t_0)} e^{i\varphi_n(t; t_0)} |n; t\rangle$$

Wir prüfen unsere Resultate für einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator, für welchen $|n; t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |n\rangle$, so daß

$$\langle n; t | \frac{\partial}{\partial t} |n; t\rangle = -\frac{i}{\hbar} E_n, \quad \gamma_n(t; t_0) = \frac{1}{\hbar} E_n (t - t_0),$$

$$\varphi_n(t; t_0) = -\frac{1}{\hbar} E_n (t - t_0) \text{ und somit } |\alpha^{(n)}; t\rangle = |n; t\rangle.$$

Die Phasendifferenz $\gamma_n(t; t_0) + \varphi_n(t; t_0)$ ist ein nicht-triviales Resultat der adiabatischen Näherung, die ansonsten die einfache Vorhersage über den Verbleib im augenblicklichen Energieeigenzuständen macht. Bevor wir zu den Effekten der Berry Phase kommen, geben wir noch ein relevantes Beispiel für die adiabatische Näherung: solare Neutrinos.

Diese entstehen als Elektronen-Neutrinos in $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$.

Neben der Vakuummasse trägt auch die Materie in der Sonne durch einen Brechungseffekt zu deren Masse bei. Während diese effektive Masse durch Materieeffekte die Form

$$m_{\mu} = \begin{pmatrix} m_{\mu e} & 0 \\ 0 & m_{\mu\mu} \end{pmatrix} \text{ hat,}$$

ist die Vakuummasse nichtdiagonal,

$$m_{\text{vac}} = U \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} U^\dagger, \text{ mit } m_2 > m_1.$$

Dabei entsprechen die Zeilen/Spalten den Neutrino-Flavours ν_e und ν_{μ} (Elektronen- und Myonen-Neutrinos).

Wir parametrisieren

$$U = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

In der Fusionsregion der Sonne ist $m_{\mu e} > m_{\mu\mu}$ und $m_{\mu e, \mu} \gg m_{1,2}$. Im Vakuum ist $m_{\mu e, \mu} = 0$, und in der Zwischenregion gilt die adiabatische Näherung für Neutrinos mit Energie $\gtrsim 10$ MeV. Die ν_e werden also im Masseneigenzustand $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Eigenwert $m_{\mu e}$ produziert und gehen adiabatisch über in den Eigenzustand im Vakuum mit Eigenwert m_2 , $U \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, indem sie dem größeren Eigenwert adiabatisch folgen. Im Detektor auf der Erde misst man denn das Neutrino mit der Wahrscheinlichkeit $\sin^2 \vartheta$ als Elektronen-Neutrino. In der Tat misst man weniger Neutrinos als man theoretisch erwarten würde, falls keine Flavormischung vorliegen würde. Mit $\vartheta = 34^\circ$ kann das solare Neutrino-Defizit allerdings erklärt werden.

Die Flavourumwandlung von Neutrinos in Materie wird als Mikhejev-Smirnov-Wolfenstein (MSW) Effekt bezeichnet. Für solare Neutrinos mit geringeren Energien oder solchen, die im Hintergrund mit geringerer Dichte als im Inneren der Sonne produziert werden, sind dagegen Neutrinooszillationen von wesentlicher Bedeutung.

5.3 Berry-Phase

Wir nehmen an, daß die Zeitabhängigkeit durch einen Vektor von parametern $\vec{R}(t)$ in der Form $H(t) = H(\vec{R}(t))$ und damit auch $E_n(t) = E_n(\vec{R}(t))$ und $|n(t)\rangle = |n(\vec{R}(t))\rangle$ ausgedrückt werden kann. Damit ist

$$\langle n; t | \frac{\partial}{\partial t} | n; t \rangle = \langle n; t | \vec{\nabla}_{\vec{R}} | n; t \rangle \cdot \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Damit erhalten wir die Berry-Phase

$$\begin{aligned} \gamma_n(t; t_0) &= i \int_{t_0}^t dt' \langle n; t' | \frac{\partial}{\partial t'} | n; t' \rangle = i \int_{t_0}^t dt' \langle n; t' | \vec{\nabla}_{\vec{R}} | n; t' \rangle \cdot \frac{d\vec{R}}{dt'} \\ &= i \int_{\vec{R}(t_0)}^{\vec{R}(t)} d\vec{R} \cdot \langle n; t' | \vec{\nabla}_{\vec{R}} | n; t' \rangle \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist als Wegintegral im Vektorraum von \vec{R} zu verstehen, d.h. im allgemeinen hängt das Integral nicht allein von den Endpunkten, sondern auch vom gewählten Weg ab. Für eine geschlossene Kurve \mathcal{C} schreiben wir

$$\gamma_n(\mathcal{C}) = i \oint_{\mathcal{C}} d\vec{R} \cdot \langle n; t' | \vec{\nabla}_{\vec{R}} | n; t' \rangle$$

Wir definieren nun $\vec{V}_n(\vec{R}) = i \langle n; t' | \vec{\nabla}_{\vec{R}} | n; t' \rangle$ und

spezialisieren auf den Fall, daß \vec{R} dreidimensional ist. Der Stokes'sche Satz gibt damit

$$\gamma_n(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} \vec{V}_n(\vec{R}) \cdot d\vec{R} = \int_{S_{\mathcal{C}}} d\vec{a} [\vec{\nabla}_{\vec{R}} \times \vec{V}_n(\vec{R})].$$

Dabei ist $d\vec{a}$ Element einer beliebigen Fläche $S_{\mathcal{C}}$ mit Rand \mathcal{C} . Die Berry-Phase ist für einen geschlossenen Pfad $\vec{R}(t)$ damit gleich dem „Fluß“ des verallgemeinerten Feldes $\vec{W}_n(\vec{R}) = \vec{\nabla}_{\vec{R}} \times \vec{V}_n(\vec{R})$ durch eine von $\vec{R}(t)$ umschlossene Fläche $S_{\mathcal{C}}$. Ebenso wie γ_n sind $\vec{V}_n(\vec{R})$ und $\vec{W}_n(\vec{R})$ reellwertig.

Wenn wir eine willkürliche Phase $\varphi(\vec{R})$ einführen, mit

$$|n;t\rangle \mapsto e^{i\varphi(\vec{R})} |n;t\rangle,$$

dann führt dies zu

$$\vec{V}_n(\vec{R}) \mapsto i \langle n;t' | \vec{\nabla}_{\vec{R}} | n;t' \rangle \mapsto \vec{V}_n(\vec{R}) - \vec{\nabla}_{\vec{R}} \varphi(\vec{R}),$$

$$\gamma_n(\mathcal{C}) \mapsto \gamma_n(\mathcal{C}).$$

Die Berry-Phase ändert sich also nicht, da der Zusatzterm rotationsfrei ist. Da $\gamma_n(\mathcal{C})$ damit allein vom Pfad im \vec{R} -Raum und nicht von etwaigen zusätzlichen Phasen abhängt, nennt man die Berry-Phase auch geometrische Phase. Für interessante Effekte müssen wir allerdings noch Beispiele mit $\gamma_n(\mathcal{C}) \neq 0$ finden.

Zur Berechnung von $\gamma_n(\mathcal{C})$ verschaffen wir uns zunächst einen konkreteren Ausdruck für $\vec{W}_n(\vec{R})$:

$$\vec{W}_n(\vec{R}) = i \vec{\nabla}_{\vec{R}} \times \langle n;t | \vec{\nabla}_{\vec{R}} | n;t \rangle = i \left[\vec{\nabla}_{\vec{R}} \langle n;t | \right] \times \left[\vec{\nabla}_{\vec{R}} | n;t \rangle \right]$$

Dabei haben wir benutzt, daß die Rotation des Gradienten verschwindet. Als nächstes fügen wir

einen kompletten Satz von Zuständen ein, so daß

$$\vec{W}_n(\vec{R}) = i \sum_{m \neq n} \left[\vec{\nabla}_{\vec{R}} \langle n; t | \right] |m; t\rangle \times \langle m; t | \left[\vec{\nabla}_{\vec{R}} |n; t\rangle \right]$$

Der Term mit $m=n$ trägt hier nicht bei, da
 $\vec{\nabla}_{\vec{R}} \underbrace{\langle n; t | n; t \rangle}_{\equiv 1} = 0 \Rightarrow \left[\vec{\nabla}_{\vec{R}} \langle n; t | \right] |n; t\rangle = - \langle n; t | \left[\vec{\nabla}_{\vec{R}} |n; t\rangle \right]$

und somit das Kreuzprodukt verschwindet.

Wir berechnen noch für $m \neq n$:

$$\langle m; t | \vec{\nabla}_{\vec{R}} H(\vec{R}(t)) |n; t\rangle = \langle m; t | \vec{\nabla}_{\vec{R}} E_n(\vec{R}(t)) |n; t\rangle$$

\Rightarrow

$$\langle m; t | (\vec{\nabla}_{\vec{R}} H(\vec{R}(t))) |n; t\rangle + E_m(\vec{R}(t)) \langle m; t | \vec{\nabla}_{\vec{R}} |n; t\rangle$$

$$= \underbrace{\langle m; t | (\vec{\nabla}_{\vec{R}} E_n(\vec{R}(t))) |n; t\rangle}_{=0} + E_n(\vec{R}(t)) \langle m; t | \vec{\nabla}_{\vec{R}} |n; t\rangle$$

\Rightarrow

$$\langle m; t | \vec{\nabla}_{\vec{R}} |n; t\rangle = \frac{\langle m; t | (\vec{\nabla}_{\vec{R}} H(\vec{R}(t))) |n; t\rangle}{E_n - E_m}$$

Damit erhalten wir Berrys Resultat:

$$\gamma_n(\mathcal{C}) = \int d\vec{q} \cdot \vec{W}_n(\vec{R}) \quad \text{mit}$$

$$\vec{W}_n(\vec{R}) = i \sum_{m \neq n} \frac{\langle n; t | [\vec{\nabla}_{\vec{R}} H(\vec{R}(t))] |m; t\rangle \times \langle m; t | [\vec{\nabla}_{\vec{R}} H(\vec{R}(t))] |n; t\rangle}{(E_m - E_n)^2}$$

Entscheidend ist nun, daß singuläre Punkte im \vec{R} -Raum mit $E_m = E_n$ Beiträge zu $\gamma_n(\mathcal{C})$ liefern können, auch wenn \mathcal{C} selbst solche Punkte nicht enthält.

Als Beispiel betrachten wir nun die Bahen eines Spin- $\frac{1}{2}$

Teilchen, welche von einem adiabatisch langsam veränderndem Magnetfeld manipuliert wird. Dazu identifizieren wir $\vec{R}(t) = \vec{B}(t)$ und $H(t) = H(\vec{B}(t)) = -\frac{2\mu}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B}(t)$. Dabei ist \vec{S} wieder der Spin- $\frac{1}{2}$ Drehimpulsoperator, und μ das magnetische Moment des Teilchens. Für die Spineigenzustände in Richtung von $\vec{B}(t)$ ergeben sich damit die Energieeigenwerte

$$E_{\pm}(t) = \mp \mu |\vec{B}(t)|$$

mit den Eigenvektoren $|\pm; t\rangle$. (Die Zeitabhängigkeit der Eigenvektoren kommt von der Zeitabhängigkeit der Richtung von $\vec{B}(t)$.)

Zur Berechnung von $\overline{W}_{\pm}(\vec{B})$ benötigen wir

$$\vec{\nabla}_{\vec{B}} H(\vec{B}(t)) = -\frac{2\mu}{\hbar} \vec{S}$$

sowie

$$\langle \pm; t | \vec{S} | \mp; t \rangle \times \langle \mp; t | \vec{S} | \pm; t \rangle = \langle \pm; t | \vec{S} | \mp; t \rangle \times \langle \pm; t | \vec{S} | \mp; t \rangle^*$$

Um den letzten Ausdruck auszuwerten, benutzen wir die Rotationsinvarianz und wählen ein Koordinatensystem, in dem $|\pm; t\rangle$ die Eigenzustände von S_z sind.

Dann schreiben wir:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (S_+ + S_-) \hat{x} + \frac{1}{2i} (S_+ - S_-) \hat{y} + S_z \hat{z},$$

so daß wir unmittelbar sehen:

$$\langle \pm; t | \vec{S} | \mp; t \rangle = \frac{\hbar}{2} (\hat{x} \mp i \hat{y})$$

Damit ist

$$\langle \pm; t | \vec{S} | \mp; t \rangle \times \langle \pm; t | \vec{S} | \mp; t \rangle^* = \frac{\hbar^2}{4} (\hat{x} \mp i \hat{y}) \times (\hat{x} \pm i \hat{y}) = \pm \frac{\hbar^2}{2} i \hat{z}$$

und

$$\overline{W}_{\pm}(\vec{B}(t)) = \mp \frac{\hbar^2}{2} \hat{z} \frac{4\mu^2}{\hbar^2} \frac{1}{|2\mu \vec{B}(t)|^2} = \mp \frac{\hat{z}}{2|\vec{B}(t)|^2}$$

Dieses Resultat ist gültig im Koordinatensystem mit

$\hat{z} = \frac{\vec{B}(t)}{|\vec{B}(t)|}$, so daß im ursprünglichen System gilt:

$$\vec{W}_{\pm}(\vec{B}(t)) = \mp \frac{\vec{B}(t)}{2|\vec{B}(t)|^3}$$

Schließlich ergibt sich damit für die Berry-Phase

$$\gamma_n(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} d\vec{a} \cdot \vec{W}_n(\vec{R}) = \mp \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} d\vec{a} \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} = \mp \frac{1}{2} \Omega$$

Dabei ist Ω der „Raumwinkel“, den der geschlossene Pfad $\vec{B}(t)$ vom Punkt $\vec{B}=0$ aus gesehen einschließt. Dies weist wiederum auf den geometrischen Charakter der Berry-Phase hin: Die Phase ist unabhängig von den Details des Pfades, sofern der gleiche Raumwinkel eingeschlossen wird. Interessanterweise ist die Phase auch unabhängig vom magnetischen Moment μ .

Experimentell kann dieser Effekt mit einem Strahl ultrakalter Neutronen, welche durch ein gewandenes magnetisches Feld gesandt werden, nachgewiesen werden.

Das Feld soll dabei folgende Form haben:

$$B_y = B_0 \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad B_z = B_0 \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad B_x = \alpha B_0$$

Die Neutronen sind für $t=0$ im \hat{z} -Richtung polarisiert.

Zu diesem Zeitpunkt hat der Hamiltonoperator die Form

$$H(t=0) = -\mu B_0 \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

mit den Eigenzuständen

$$|E_+, t=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{i+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \end{pmatrix}, \quad E_+ = \mu B_0 \sqrt{1+\alpha^2}$$

$$|E_-, t=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \end{pmatrix}, \quad E_- = -\mu B_0 \sqrt{1+\alpha^2}$$

Damit ist

$$|s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |E_+, t=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |E_-, t=0\rangle$$

In der adiabatischen Näherung verbleiben die Neutronen im rotierenden Magnetfeld in den Energieeigenzuständen (oder in derjenigen Linearkombination).

Die Energieeigenzustände erhalten die adiabatischen Phasen

$$\varrho_{\pm}(t;0) = \pm \mu B_0 \sqrt{1+\alpha^2} t$$

Für die Berry-Phasen ergibt sich für $t = NT$:

$$\gamma_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \int_{S_C} d\vec{a} \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2} = \pm \frac{N}{2} \frac{2\pi B_0^2}{(1+\alpha^2) B_0^2} = \pm \frac{\pi N}{(1+\alpha^2)}$$

Damit ist ($|\psi; t=0\rangle = |s_z = \frac{\hbar}{2}\rangle$)

$$|\psi; t=2\pi N\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\pi i N \mu B_0 \sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\pi N}{(1+\alpha^2)} |E_+; t=0\rangle \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\pi i N \mu B_0 \sqrt{1+\alpha^2}} - \frac{\pi N}{(1+\alpha^2)} |E_-; t=0\rangle$$

Für die \hat{z} -Polarisation ergibt sich

$$\langle s_z \rangle = \langle \psi; t=2\pi N | \frac{\hbar}{2} \hat{S}_z | \psi; t=2\pi N \rangle$$

$$\langle E_+; t=0 | \hat{S}_z | E_+; t=0 \rangle = 0$$

$$\langle E_+; t=0 | \hat{S}_z | E_-; t=0 \rangle = -1$$

$$\Rightarrow \langle s_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos\left(4\pi N \mu B_0 \sqrt{1+\alpha^2} - \frac{2\pi N}{(1+\alpha^2)}\right)$$

Dies ist also ein Beispiel, für welches die Berry-Phase einen beobachtbaren Effekt zeigt.

5.4 Aharonov-Bohm-Effekt

Im Kapitel zu den Strahlungsübergängen erwähnten wir bereits die Unterscheidung zwischen kanonischem und kinetischem Impuls. Wir erinnern nun daran, daß diese Unterscheidung bereits in der klassischen Mechanik und Elektrodynamik notwendig ist. Betrachten wir dazu die Hamiltonfunktion eines Teilchens der Masse m und Ladung q :

$$H = \frac{(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}, t))^2}{2m} + q \underline{\Phi}(\vec{x}, t)$$

Wir schreiben die Hamilton-Jacobi Gleichungen aus:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} \left(p_i - \frac{q}{c} A_i(\vec{x}, t) \right)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= - \frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{1}{m} \left(p_j - \frac{q}{c} A_j(\vec{x}, t) \right) \frac{q}{c} \nabla_i A_j(\vec{x}, t) - q \nabla_i \underline{\Phi}(\vec{x}, t) \\ &= \dot{x}_j \frac{q}{c} \nabla_i A_j - q \nabla_i \underline{\Phi} \end{aligned}$$

Wir leiten die erste Gleichung nochmals ab, substituieren die zweite und erhalten so die Newton'schen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_i &= \dot{p}_i - \frac{q}{c} \nabla_j A_i \dot{x}_j - \frac{q}{c} \dot{A}_i \\ &= \frac{q}{c} \dot{x}_j \nabla_i A_j - q \nabla_i \underline{\Phi} - \frac{q}{c} \nabla_j A_i \dot{x}_j - \frac{q}{c} \dot{A}_i \end{aligned}$$

Mit $\epsilon_{ijk} \epsilon_{krs} = \delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}$

$$\begin{aligned} (\dot{\vec{x}} \times \vec{B})_i &= \epsilon_{ijk} \dot{x}_j \epsilon_{krs} \nabla_r A_s = \dot{x}_j (\nabla_i A_j - \nabla_j A_i), \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i &= B_i \quad \text{und} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \underline{\Phi} - \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \end{aligned}$$

können wir noch die Potentiale durch die Felder ersetzen, so daß wir die bekannte Form

$$m \ddot{x}_i = \left(\frac{q}{c} \dot{\vec{x}} \times \vec{B} + q \vec{E} \right)_i \quad \text{erhalten.}$$

Der kanonische Impuls ist \vec{p} , der kinetische $m \dot{\vec{x}}$.

Die Newton'schen Gleichungen lassen sich selbstverständlich auch mit Hilfe der Lagrangefunktion herleiten. Während Hamilton- und Lagrangefunktion von den Potentialen $\underline{\Phi}$ und \vec{A} abhängen, lassen sich die klassischen Bewegungsgleichungen allein mit Hilfe der Felder \vec{E} und \vec{B} aufstellen. Wir werden sehen, daß dies für quantenmechanische Observable nicht immer möglich ist. Trotz dessen bleiben die Observablen eichinvariant, wobei wir die klassischen Eichtransformationen in geeigneter Weise verallgemeinern.

Betrachten wir zunächst die Vertauschungsrelationen im Gegenwart des elektromagnetischen Feldes. Gemäß den Regeln der kanonischen Quantisierung gelten weiterhin die Vertauschungsrelationen

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad \text{und} \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$$

Mittels dieser folgt für den kinetischen Impuls:

$$[x_i, m \dot{x}_j] = [x_i, \frac{\hbar}{i} \nabla_j - \frac{q}{c} A_j] = i\hbar \delta_{ij},$$

$$[m \dot{x}_i, m \dot{x}_j] = \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_i - \frac{q}{c} A_i, \frac{\hbar}{i} \nabla_j - \frac{q}{c} A_j \right] = i\hbar \frac{q}{c} (\nabla_i A_j - \nabla_j A_i) \\ = i\hbar \frac{q}{c} \epsilon_{ijk} B_k$$

wobei wir benutzt haben, daß

$$\epsilon_{ijk} B_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{krs} \nabla_r A_s = (\delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr}) \nabla_r A_s = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i$$

Im Gegensatz zum kanonischen Impuls kommutieren die einzelnen Komponenten des kinetischen Impulses also nicht miteinander.

Als nächstes betrachten wir eine Eichtransformation, welche wir durch eine skalare Funktion $\Lambda(\vec{x}, t)$ parametrisieren

und durch welche

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \longmapsto \vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{v} \mathcal{L}(\vec{x}, t)$$

$$\Phi(\vec{x}, t) \longmapsto \Phi'(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}(\vec{x}, t)$$

Bekanntermaßen und offensichtlicherweise läßt diese Transformation die Felder

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}, t) - c \dot{\vec{A}}(\vec{x}, t),$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t)$$

invariant.

Wir betrachten nun das Transformationsverhalten der Schrödinger-Gleichung

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right)^2 + q \Phi(\vec{x}, t) \right] \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t)$$

Diese Gleichung ist eichkovariant, wenn die Wellenfunktion folgendermaßen transformiert:

$$\psi(\vec{x}, t) \longmapsto \psi'(\vec{x}, t) = e^{\frac{iq}{\hbar c} \mathcal{L}(\vec{x}, t)} \psi(\vec{x}, t)$$

Wir multiplizieren die Schrödinger-Gleichung nun mit $e^{\frac{iq}{\hbar c} \mathcal{L}(\vec{x}, t)}$ von links und benutzen zweimal die Identität

$$e^{f(y)} \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f(y)}{\partial y} \right) e^{f(y)}$$

so daß wir erhalten

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{x}, t) - \frac{q}{c} \vec{v} \mathcal{L}(\vec{x}, t) \right)^2 + q \Phi(\vec{x}, t) \right] e^{\frac{iq}{\hbar c} \mathcal{L}(\vec{x}, t)} \psi(\vec{x}, t) \\ &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{\frac{iq}{\hbar c} \mathcal{L}(\vec{x}, t)} \psi(\vec{x}, t) + \frac{q}{c} \dot{\mathcal{L}}(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

und letztlich

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A}'(\vec{x}, t) \right)^2 + q \Phi'(\vec{x}, t) \right] \psi'(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'(\vec{x}, t)$$

Anhand dieser Gleichung sehen wir die Bedeutung des Begriffs „eichkovariant“: die transformierte Schrödingergleichung hat in den transformierten Größen die gleiche Form wie die ursprüngliche Gleichung.

Wir hätten auch umgekehrt von der Transformation der Wellenfunktion ausgehend die Kovarianz der Schrödingergleichung fordern können. In der Tat folgen aus der Forderung nach bestimmten Eichinvarianzen in der relativistischen Feldtheorie die fundamentalen Wechselwirkungen (Elektroschwache und Starke Wechselwirkung sowie letztlich auch das allgemeine Relativitätsprinzip).

Als nächstes betrachten wir den Spezialfall eines zeitlich konstanten Magnetfeldes, welches in einem bestimmten Gebiet verschwindend soll, so daß dort $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ gilt.

Somit ist $\vec{A}(\vec{x})$ in diesem Gebiet rotationsfrei und darstellbar als

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \chi \quad \text{mit} \quad \chi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}).$$

Das Integral ist wegunabhängig, wiederum aufgrund der Rotationsfreiheit von $\vec{A}(\vec{x})$. Außerdem ist $\vec{A}(\vec{x})$ unabhängig von \vec{x}_0 . Desweiteren soll $\chi(\vec{x}) = 0$ gelten, so daß im magnetfeldfreien Gebiet folgende Schrödingergleichung gilt:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

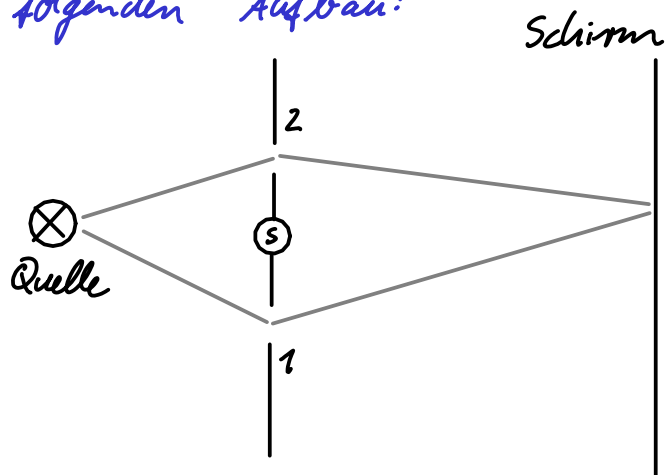
Das Potential V soll nichtelektromagnetische Effekte darstellen.

Mit der Eichtransformation $\mathcal{L}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \chi(\vec{x})$ erhalten wir $\vec{A}'(\vec{x}) = 0$, $\psi'(\vec{x}, t) = e^{-\frac{iq}{\hbar c} \chi(\vec{x})} \psi(\vec{x}, t)$ und

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \right)^2 \psi' + V\psi' = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'$$

Das Aharonov-Bohm Interferenzexperiment hat nun den

folgenden Aufbau:



Es ist das klassische Doppelspaltexperiment, bei welchem auf dem Schirm Interferenzmaxima und -Minima auftreten. Hinzu kommt eine Spule, die sich im Gebiet, in dem die Wellenfunktion

verschwindet (also z.B. zwischen den beiden Spalten) befindet.

Durch die Spule soll ein magnetischer Fluss

$\Phi_B = \int d\vec{a} \cdot \vec{B} = \int d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}$ fließen, welchen wir ein- und ausschalten können. Außerhalb der Spule verschwindet das Magnetfeld. Die Wellenfunktion bei geöffnetem Spalt i ,

wobei der andere Spalt geschlossen ist, und eingeschaltetem Magnetfeld sei Ψ_{iB} , bei abgeschaltetem Magnetfeld Ψ_{i0} .

Mittels obiger Überlegungen folgt

$$\Psi_{iB}(\vec{x}) = \Psi_{i0}(\vec{x}) \exp \left\{ \frac{iq}{\hbar c} \int_i d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}) \right\},$$

wobei das Wegintegral von der Quelle durch den Spalt i verläuft. Sind beide Spalte geöffnet, ergibt sich die Wellenfunktion als die Superposition

$$\begin{aligned} \Psi_B(\vec{x}) &= \Psi_{1B}(\vec{x}) + \Psi_{2B}(\vec{x}) \\ &= \left(\Psi_{10}(\vec{x}) e^{\frac{iq}{\hbar c} \Phi_B} + \Psi_{20}(\vec{x}) \right) e^{\frac{iq}{\hbar c} \int_2 d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s})} \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben

$$\int_1 d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}) - \int_2 d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}) = \oint d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}) = \int d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = \Phi_B$$

Mit einer Änderung des Flusses Φ_B ändert sich somit auch das Interferenzbild.

Etwas genauer können wir die von den Spalten ausgehenden Zylinderwellen betrachten:

$$\psi_{i0}(\vec{x}) = \frac{e^{ikr_i}}{\sqrt{r_i}}, \quad r_i = |\vec{x} - \vec{x}_i|, \quad \text{wobei } \vec{x}_i \text{ der Ort des Spalts } i \text{ ist und } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ mit } \lambda \text{ der Wellenlänge.}$$

Interferenzmaxima treten dann auf für

$$k r_1 + \frac{q}{\hbar c} \Phi_B - k r_2 = 2\pi n \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \quad \text{oder entsprechend}$$

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \left(2\pi n - \frac{q}{\hbar c} \Phi_B \right).$$

Während die Phasen von ψ_{iB} eichabhängig sind, ist die relative Phase eichunabhängig, was daraus folgt daß das geschlossene Wegintegral über $\vec{\nabla} \chi(\vec{x})$ verschwindet, oder äquivalent daß der magnetische Fluß eichinvariant ist.

Anders als in den Newton'schen Bewegungsgleichungen lassen sich in der Schrödingergleichung die Eichpotentiale also nicht vermeiden.

Wir erinnern noch kurz an die Bedeutung magnetischer Flüsse durch ringförmige Supraleiter. Für diese muß gelten, daß

$$\psi_{iB}(\vec{x}) = \psi_{i0}(\vec{x}) \exp \left\{ \frac{i q}{\hbar c} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}) \right\},$$

wobei \vec{x} im supraleitenden Ring liegt, periodisch ist. Demnach muß gelten:

$$\frac{q}{\hbar c} \oint d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}) = \frac{q}{\hbar c} \Phi = 2\pi n \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \quad \text{oder}$$

$$\Phi = -n \Phi_0 \quad \text{mit } \Phi_0 = -\frac{2\pi \hbar c}{q}$$

Ein Cooper Paar im Supraleiter besteht aus zwei Elektronen, also ist das Flussquantum $\Phi_0 = \frac{\hbar c}{|e|}$.