

## 8. Alternative Formulierungen und Meßprozeß

Nach zahlreichen theoretischen Entwicklungen sowie Beispielen ist es nun noch einmal interessant zu den Grundlagen zurückzukehren. Pfadintegrale ergeben eine neue Perspektive auf die Wellenmechanik sowie deren probabilistischer Interpretation, alternativ zur bislang verfolgten Methode der kanonischen Quantisierung. Auch der Meßprozeß, bei dem die Wahrscheinlichkeitsdeutung der Wellenfunktion sowie deren Kollaps im Gegensatz zur klassischen Physik stehen, soll noch einmal näher betrachtet werden.

### 8.1 Das Pfadintegral

Wir betrachten die Amplitude

$$K(q', T; q, 0) = \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H T} | q \rangle$$

wobei  $|q\rangle$  und  $|q'\rangle$  Ortseigenzustände mit  $\langle q' | q \rangle = \delta(q - q')$  sind.

Nun zerlegen wir die Zeitentwicklung in  $N$  Schritte der Dauer  $\varepsilon = \frac{T}{N}$ , so daß

$$K(q', T; q, 0) = \langle q' | \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon} \cdots e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon}}_{N \text{ mal}} | q \rangle$$

$$= \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon H} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon H} | q_{N-2} \rangle \cdots \\ \cdot \langle q_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon H} | q \rangle$$

$$= \int dq_1 \dots dq_{N-1} K(q', \epsilon; q_{N-1}, 0) \dots K(q_1, \epsilon; q, 0)$$

Nun entwickeln wir

$$\begin{aligned} K(q_{j+1}, \epsilon; q_j, 0) &= \langle q_{j+1} | 1 - \frac{i}{\hbar} \epsilon H + \mathcal{O}(\epsilon^2) | q_j \rangle \\ &= \underbrace{\langle q_{j+1} | q_j \rangle}_{= \delta(q_{j+1} - q_j)} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \int \frac{dP_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} P_j (q_{j+1} - q_j)} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Wenn wir annehmen, dass  $H = \frac{P^2}{2m} + V(q)$ , folgt weiterhin

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \frac{P^2}{2m} + V(q) | q_j \rangle &= \int \frac{dP_j}{2\pi\hbar} \langle q_{j+1} | (\frac{P^2}{2m} + V(q)) | P_j \rangle \langle P_j | q_j \rangle \\ &= \int \frac{dP_j}{2\pi\hbar} \langle q_{j+1} | \frac{P_j^2}{2m} + V(q_{j+1}) | P_j \rangle \langle P_j | q_j \rangle \\ &= \int \frac{dP_j}{2\pi\hbar} \left( \frac{P_j^2}{2m} + V(q_{j+1}) \right) e^{\frac{i}{\hbar} P_j (q_{j+1} - q_j)} \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist  $p$  als Operator und  $P_j$  als reelle Zahl aufzufassen. Man könnte den vollständigen Satz der Impulsigen Zustände auch links einfügen können und so einen Term mit  $V(q_j)$  erhalten.

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} K(q_{j+1}, \epsilon; q_j, 0) &= \int \frac{dP_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} P_j (q_{j+1} - q_j)} \left[ 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} \left( \frac{P_j^2}{2m} + V(q_{j+1}) \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \int \frac{dP_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} P_j (q_{j+1} - q_j)} e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} H(P_j, q_{j+1})} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Wir schreiben noch  $\dot{q}_j = \frac{q_{j+1} - q_j}{\epsilon}$  und erhalten insgesamt

$$K(q', T; q, 0) = \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \int \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} [p_j \dot{q}_j - H(p_j, q_{j+1})]} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Für den Grenzfalle  $N \rightarrow \infty$  führen wir die folgende Notation ein:

$$K(q', T; q, 0) = \int \mathcal{D}p(t) \mathcal{D}q(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt (p\dot{q} - H(p, q))}$$

Dieser Ausdruck bezeichnet man als Phasenraumdarstellung des Pfadintegrals. Die Pfadintegrale laufen über alle möglichen Funktionen  $p(t)$  und  $q(t)$ , wobei letztere noch die Randbedingungen  $q(0) = q$  und  $q(T) = q'$  erfüllen.

Hat die Hamiltonfunktion die angenommene Form  $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ , dann lassen sich die Impulsintegrale durchführen:

$$\begin{aligned} K(q', T; q, 0) &= \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} V(q_{j+1})} \int \prod_{j=1}^{N-1} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \left( -\frac{p_j^2}{2m} + p_j \dot{q}_j \right)} \\ \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \left( -\frac{p_j^2}{2m} + p_j \dot{q}_j \right)} &= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{1}{2m} \left[ -(p_j - m\dot{q}_j)^2 + m^2 \dot{q}_j^2 \right]} \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi\hbar m}{i\epsilon}} e^{\frac{i\epsilon}{2\hbar} m \dot{q}_j^2} \end{aligned}$$

Die Konvergenz des Integrals kann dabei z.B. durch Hinzufügen eines Terms  $-\epsilon' p_j^2$  zum Exponenten im Grenzfalle  $\epsilon' \rightarrow 0$  hergestellt werden.

Insgesamt erhält man so:

$$K(q', T; q, 0) = \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} V(q_{j+1})} \prod_{j=1}^{N-1} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}} e^{\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{m}{2} \dot{q}_j^2}$$

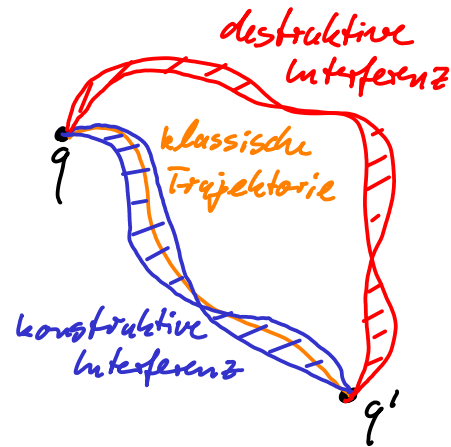
$$= \left( \frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \exp \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \left( \frac{m}{2} \dot{q}_j^2 - V(q_{j+1}) \right)$$

Für  $N \rightarrow \infty$  schreiben wir dann

$$K(q', T; q, 0) = \int \mathcal{D}q(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]}; \quad S[q(t)] = \int_0^T dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$$

Dies bezeichnet man als die Konfigurationsraumdarstellung des Pfadintegrals.

Die klassischen Bewegungsgleichungen lauten  $\delta S = 0$ . Zum Pfadintegral tragen in der Nähe des Extremums der Wirkung  $S$  die verschiedenen Pfade mit annähernd gleichen Phasen zur Amplitude bei, d.h. es tritt konstruktive Interferenz auf. In größerem Abstand vom Extremum ist die Interferenz destruktiv, so daß dort insgesamt nur ein stark unterdrückter Beitrag zur Amplitude auftritt. Im Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0$  „dominiert“ also die klassische Trajektorie von  $q$  nach  $q'$ .



Als Beispiel wollen wir nun die Energieniveaus des harmonischen Oszillators herleiten. Für die Normierung der Amplitude wird es sich als nützlich erweisen, diese zunächst für ein freies Teilchen auszuwerten:

$$K_0(x, T; y, 0) = \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} T} | y \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dP}{2\pi\hbar} \langle x|P\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} T} \langle P|y\rangle \\
&= \int \frac{dP}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} P(x-y) - \frac{i}{\hbar} \frac{P^2}{2m} T} \\
&= \int \frac{dP}{2\pi\hbar} e^{-\frac{iT}{2\hbar m} \left[ \left( P - m \frac{x-y}{T} \right)^2 - \frac{m^2 (x-y)^2}{T^2} \right]} \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{\pi 2\hbar m}{iT}} e^{i \frac{m(x-y)^2}{2\hbar T}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar iT}} e^{i \frac{m(x-y)^2}{2\hbar T}}
\end{aligned}$$

Für den harmonischen Oszillator gehen wir nun aus von der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

und der Wirkung

$$S[q] = \int dt L(q(t), \dot{q}(t))$$

→ Bewegungsgleichung

$$\frac{\delta S}{\delta q(t)} = -m\ddot{q}(t) - m\omega^2 q(t) = 0$$

$q_c(t)$  Lösung mit Randbedingungen  $q_c(t_a) = q_a, q_c(t_b) = q_b$

Zerlege beliebigen Pfad in  $q(t) = q_c(t) + y(t) \rightarrow y(t_a) = y(t_b) = 0$

Damit schreiben wir

$$S[q] = S[q_c] + \underbrace{\int_{t_a}^{t_b} dt \frac{\delta S[q]}{\delta q(t)} \Big|_{q=q_c}}_{=0} y(t) + \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt \int_{t_a}^{t_b} dt' \frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(t) \delta q(t')} \Big|_{q=q_c} y(t) y(t')$$

Für den harmonischen Oszillator bricht die Entwicklung zu dieser Ordnung ab, während im Allgemeinen höhere Terme auftreten, welche z.B. störungstheoretisch behandelt

werden können.

Mit

$$\frac{\delta^2}{\delta q(t) \delta q(t')} S[q] = -m \left( \frac{d^2}{dt^2} \delta(t-t') + \omega^2 \delta(t-t') \right)$$

erhalten wir

$$S[q] = S[q_c] + \frac{m}{2} \int_{t_a}^{t_b} dt (\dot{y}^2(t) - \omega^2 y^2(t)) = S[q_c] + S[y]$$

Einsetzen in die Pfadintegraldarstellung der Übergangsamplitude ergibt:

$$\begin{aligned} K(q_b, t_b; q_a, t_a) &= \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S[q]} = \int \mathcal{D}y e^{\frac{i}{\hbar} (S[q_c] + S[y])} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} S[q_c]} \int \mathcal{D}y e^{\frac{i}{\hbar} S[y]} \end{aligned}$$

Wir benötigen nun die explizite Lösung welche gegeben ist durch ( $T = t_b - t_a$ )

$$\begin{aligned} q_c(t) &= \frac{1}{\sin \omega T} [(q_b \cos \omega t_a - q_a \cos \omega t_b) \sin \omega t \\ &\quad + (q_a \sin \omega t_b - q_b \sin \omega t_a) \cos \omega t] \end{aligned}$$

→

$$S[q_c] = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} [(q_a^2 + q_b^2) \cos \omega T - 2q_a q_b]$$

Schließlich benötigen wir noch

$$K(0, T; 0, 0) = \int \mathcal{D}y e^{\frac{i}{\hbar} S[y]}$$

und schreiben nun

$$S[y] = \frac{m}{2} \int_0^T dt y(t) \left( -\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right) y(t)$$

Eigenfunktionen von  $-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2$  mit  $y(0) = y(T) = 0$ :

$$y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{n\pi t}{T}, n \in \mathbb{N} \quad \left( \left[ -\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 \right] y_n(t) = \lambda_n y_n(t) \right)$$

→ vollständiger, orthonormaler Satz:

$$\int_0^T dt y_n(t) y_m(t) = \delta_{nm}$$

$$\text{Eigenwerte: } \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{T^2} - \omega^2$$

Wir entwickeln damit  $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(t)$

→

$$S[y] = \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2$$

Das Integrationsmaß läßt sich damit transformieren:

$$Dy = \int \prod_{n=1}^{\infty} da_n$$

Dabei ist  $J$  die Jacobi-Determinante, welche wir nicht bestimmen.

Wir erhalten so

$$\begin{aligned} \int Dy e^{\frac{i}{\hbar} S[y]} &= \int \prod_{n=1}^{\infty} da_n e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \sum_n \lambda_n a_n^2} = \int \prod_{n=1}^{\infty} da_n e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \lambda_n a_n^2} \\ &= \int \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m}{2i\hbar} \lambda_n \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Während  $J$  nicht bekannt ist, kennen wir vom freien Teilchen jedoch bereits die Übergangsamplitude für  $\omega = 0$ :

$$K_0(0, T; 0, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar iT}}$$

Wir berechnen daher das Verhältnis  $(\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}))$

$$\frac{K(0, T; 0, 0)}{K_0(0, T; 0, 0)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_{n=0}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\omega^2 T^2}{n^2\pi^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left( \frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow K(0, T; 0, 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar iT \sin \omega T}}$$

Insgesamt ist damit

$$K(q_b, t_b; q_a, t_a) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar iT \sin \omega T}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} [(q_b^2 + q_a^2) \cos \omega T - 2q_b q_a]}$$

Zur Bestimmung der Energieeigenwerte benutzen wir schließlich den Zusammenhang

$$\hbar e^{-\frac{i}{\hbar} H T} = \int_{-\infty}^{\infty} dq K(q, T; q, 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar iT \sin \omega T}} \sqrt{\frac{\pi\hbar \sin \omega T}{m\omega i (\cos \omega T - 1)}}$$

$$= \left( 2 \underbrace{(\cos \omega T - 1)} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2i \sin \frac{\omega T}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{i\omega T}{2}} - e^{-\frac{i\omega T}{2}}}$$

$$\approx -2 \sin^2 \frac{\omega T}{2}$$

$$= e^{-\frac{i\omega T}{2}} \frac{1}{1 - e^{-i\omega T}} = e^{-\frac{i\omega T}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\omega T}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega T} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T}$$

$$\Rightarrow E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

Trotz der intuitiv einleuchtenden Form des Pfadintegrals ist für die Berechnung von Spektren der kanonische Formalismus



offenbar einfacher anzuwenden. In der Quantenmechanik ist das Pfadintegral allerdings zur Behandlung zeitabhängiger Prozesse, für welche die Dyson-Reihe nicht geeignet ist, d.h. insbesondere für Tunnelübergänge, von Bedeutung.

Ein weiteres Spektrum von Anwendungen und eine Reihe von Vorteilen gegenüber dem kanonischen Formalismus ergibt sich für den Pfadintegralzugang in der Quantenfeldtheorie.

Wir betonen, daß der Pfadintegralzugang und der kanonische Formalismus äquivalent sind, da sie sich wechselseitig aneinander herleiten lassen.

Im Zusammenhang mit den Bellschen Ungleichungen werden wir noch Theorien mit verborgenen Variablen erwähnen.

## 8.2 Meßprozeß

Wir erinnern an die Postulate der Quantenmechanik

- I. Der quantenmechanische Zustand eines Systems wird durch einen Zustandsvektor in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  beschrieben.
- II. Physikalische Meßgrößen entsprechen hermiteschen Operatoren  $A$ .
- III. Erwartungswerte von  $A$  sind gegeben durch  $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$  und beschreiben den Mittelwert vieler Messungen am jeweils gleich präparierten Zustand  $|\psi\rangle$ .
- IV. Die Zeitentwicklung des Zustands ist gegeben durch die Schrödingergleichung  
$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle.$$

V. Wird bei einer Messung der Eigenwert  $a_n$  festgestellt ( $a_n |n\rangle = A |n\rangle$ ), dann geht der Zustand in  $|n\rangle$  über.

Dabei formulieren die Postulate I.-IV. für sich genommen eine deterministische Theorie. Eine der Ursachen für das im Vergleich zur klassischen Mechanik komplexere Verhalten ist die Tatsache, daß ein der Zustand eines Teilchens in  $D$  Dimensionen nicht mehr durch seine Koordinaten im  $2D$ -dimensionalen Phasenraum, sondern durch seine Wellenfunktion im unendlichdimensionalen Hilbertraum gegeben ist. Postulat V. führt dagegen ein nicht-deterministisches Element in die Zeitentwicklung des Zustandes ein: Wird mit einem bestimmten Eigenwert gemessen, so geht der Zustand (i.A. eine Superposition aus allen Eigenzuständen) in den zugehörigen Eigenzustand über (Kollaps der Wellenfunktion). Wir wollen im Folgenden Meßapparat und die ablesende Experimentaltulphysikerin oder den ablesenden Experimentalphysiker als Teil des Quantensystems behandeln, um so den Gebrauch von Postulat V. zu vermeiden.

Wir erinnern dazu zunächst an die aus der statistischen Physik bekannte Dichtematrix.

Betrachte ein Ensemble aus  $N$  Systemen. Davon befinden sich  $N_i$  im Zustand  $|\varphi_i\rangle$ , d.h. wir

finden den Zustand  $|\psi_i\rangle$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p_i = \frac{N_i}{N}$ .  $\Rightarrow \sum_i p_i = 1$ .

Dichtematrix:  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_i |\psi_i\rangle p_i \langle \psi_i|$

reiner Zustand: genau ein  $p_i = 1$ , alle übrigen verschwinden.

gemischter Zustand: Zustand, welcher nicht rein ist.

Folgerungen:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \sum_n \sum_i p_i \langle \psi_i | A | n \rangle \langle n | \psi_i \rangle \\ &= \sum_n \sum_i \langle n | \psi_i \rangle p_i \langle \psi_i | n \rangle = \text{tr}[\rho A] \end{aligned}$$

mit einem vollständigen, orthonormalen Satz  $|n\rangle$

$$\text{tr}[\rho] = \sum_i p_i = 1$$

$\uparrow$   
 $A = \mathbb{1}$   
 $\rho^\dagger = \rho$

$$\rho^2 = \sum_i \sum_j p_i p_j |\psi_i\rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j| \neq \rho, \text{ falls mehr als ein } p_i \neq 0 \text{ ist (gemischter Zustand).}$$

reiner Zustand:

$$\rho^2 = \sum_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i | \psi_i \rangle \langle \psi_i| = |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \rho$$

Spur von  $\rho^2$ :

$$\begin{aligned} \text{tr} \rho^2 &= \sum_{i,j} p_i p_j \langle n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | n \rangle \\ &= \sum_{i,j} p_i p_j |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 \leq \sum_{i,j} p_i p_j = \sum_i p_i \sum_j p_j = 1 \end{aligned}$$

Da  $|\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle| < 1$  für  $i \neq j$  gilt für einen gemischten Zustand  $\text{tr}[e^2] < 1$ , für einen reinen Zustand  $\text{tr}[e^2] = 1$ .

Als ein einfaches Modell für den Messprozess betrachten wir einen Produktzustand aus untersuchtem Objekt und Meßapparat. Zur Zeit  $t=0$  sei dieser gegeben durch

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\theta, n\rangle |A\rangle$$

Dabei sei  $|A\rangle$  der „neutrale“ Zustand des Apparats vor der Messung. Wird der Eigenwert  $n$  registriert, zeigt der Apparat dies entsprechend an, d.h. er befindet sich im Zustand  $|A, n\rangle$ , welcher für  $m \neq n$  makroskopisch unterscheidbar von  $|A, m\rangle$  sein soll (z.B. Zeigerstellung). Da makroskopisch unterscheidbare Zustände keine Quanteninterferenzeffekte zeigen, benutzen wir im Folgenden  $\langle A, n | A, m \rangle = \delta_{nm}$ .

Zu einem Zeitpunkt  $t$  nach der Messung befindet sich das Gesamtsystem also im Zustand

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n |\theta, n\rangle |A, n\rangle$$

Die zugehörige Dichtematrix ist  $e(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$

Sofern wir den Meßwert nicht ablesen, erhalten wir bezüglich des Objektes ein Gemisch:

$$\hat{e}(t) = \text{tr}_{A,n} [e(t)] = \sum_r \sum_n \sum_m c_n c_m^* \langle A, r | A, n \rangle \langle A, m | A, r \rangle * |\theta, n\rangle \langle \theta, m|$$

$$= \sum_n |c_n|^2 |\theta, n\rangle \langle \theta, n|$$

In diesem Sinne befindet sich der Zustand nach der Messung also gemäß der Wahrscheinlichkeit  $|c_n|^2$  im Eigenzustand  $|\theta, n\rangle$ .

Inwiefern trifft die Wahrscheinlichkeitsaussage auch auf den Apparat zu? Gemäß Postulat V folgt unmittelbar daß nach Anzeige von  $n$ , was gemäß III mit der Wahrscheinlichkeit  $|c_n|^2$  eintritt, sich die Dichtematrix  $|\theta, n\rangle \langle \theta, n|$  ergibt. In dieser Sichtweise wird der Apparat allerdings klassisch beschrieben, und der Kollaps der Wellenfunktion wird postuliert.

Diese Annahmen von Postulat V sollen aber nun umgangen werden. Wir koppeln das System dazu an eine Umgebung  $U$ , wobei die Messung folgenden Effekt hat:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\theta, n\rangle |A\rangle |U\rangle \xrightarrow{\text{Messung}} |\psi(t)\rangle = \sum_n c_n |\theta, n\rangle |A, n\rangle |U, n\rangle$$

Dabei kann  $|A\rangle$  nun der eigentliche Apparat sein oder das Gesamtsystem aus Apparat und ablesender Person.

(Oder man denke an die Apparatur und Katze im berühmten „Katzenparadoxon“.)  $\rightarrow$  Demarkationsproblem.

Entscheidend ist, daß früher oder später nicht mehr die gesamte Entwicklung der Umgebung verfolgt wird, diese wird also „herausgespart“:

$$\hat{e}_1(t) = \text{tr}_{u,m} [e] = \sum_n |c_n|^2 |A,n\rangle |0,n\rangle \langle 0,n| \langle A,n|$$

Dabei ist wiederum entscheidend, daß  $\langle u,n | u,m \rangle = \delta_{nm}$ . Der Beobachter A nimmt also eine stochastische Verteilung der Messwerte (Wahrscheinlichkeiten  $|c_n|^2$ ) sowie einen Kollaps der Wellenfunktion im „Untersystem“.

Auf Postulat V kann mit diesem Argument also verzichtet werden. Der Preis ist, daß neben der vom Beobachter wahrgenommenen Realität alle anderen a priori möglichen Meßergebnisse gleichberechtigt sind („viele Welten“). Zu einer solchen Interpretation kann man auch in naheliegender Weise im Pfadintegralformalismus gelangen.

### 8.3 Bellsche Ungleichung

Der Nichtdeterminismus von Messungen hat Einstein, Podolsky und Rosen (EPR) 1935 zu der Annahme motiviert, daß die Quantenmechanik unvollständig sei, d.h. daß sie durch Hinzunahme verborgener Parameter in eine deterministische Theorie überführt werden kann. Zur genaueren Erläuterung betrachten wir ein Spin-0 Teilchen, welches aus dem Ruhezustand in zwei Spin- $\frac{1}{2}$  Teilchen zerfällt, so daß sich ein Spin-Singlett Zustand ergibt:

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle)$$

Dies ist ein sogenannter verschränkter Zustand (Gegensatz: separabler Zustand), da er sich nicht als Produkt von Zuständen aus den beiden Hilberträumen schreiben läßt.

Für beide Teilchen sollen nun bei A und B Meßapparate bereitstehen, welche den Spin feststellen.



Die Messung erfolge bei A zur Zeit  $t$ , bei B zur Zeit  $t+\epsilon$ , so daß keine sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitende Information ausgetauscht werden kann.

Die Quantenmechanik sagt folgendes voraus:

- \* Bei A wird mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit der Spin bezüglich einer bestimmten Achse (z.B.  $z$ ) als  $S_z^{(A)} = \pm \frac{\hbar}{2}$  gemessen.
- \* Die Wellenfunktion kollabiert (oder wir können gemäß obigen Argumente im Folgenden einen entsprechenden gemischten Zustand betrachten).
- \* Bei B wird somit mit Sicherheit bezüglich derselben Achse  $S_z^{(B)} = \mp \frac{\hbar}{2}$  festgestellt.

EPR definieren man:

Eine physikalische Größe, welche mit Sicherheit vorhersagbar ist und gemessen werden kann, ohne diese Größe zu stören, ist ein Element der physikalischen Realität.

Aufgrund dieses Begriffs wird verlangt:



Eine Theorie ist vollständig, sofern in ihr jedes Element der physikalischen Realität eine Entsprechung hat.

Durch die Messung in  $A$  können wir offenbar die Meßgröße in  $B$  bestimmen, scheinbar denn aufgrund der endlichen Signallaufzeit die Größe in  $B$  zu beeinflussen.  $S_z^{(B)}$  entspricht im Sinne von EPR also einer physikalischen Realität.

Entscheiden wir uns stattdessen  $S_x^{(A)}$  zu messen, so ist  $S_x^{(B)}$  mit Sicherheit festgelegt, also auch eine physikalische Realität. Die Entscheidung für  $x$  oder  $z$  kann dabei kurz vor der Messung erfolgen, so daß kein Signal vor der Messung bei  $B$  von  $A$  nach  $B$  gelangen kann.  $S_z^{(B)}$  und  $S_z^{(A)}$  müßten also physikalische Realitäten sein, welche vor der Messung feststehen und mittels lokaler verborgener Variablen vorhersagbar sein müßten.

In der Quantenmechanik werden aber wegen  $[S_x, S_z] \neq 0$  diese Observablen nicht simultan scharf vorhergesagt, so daß die Theorie im Sinne von EPR unvollständig erscheint.

Wir stellen allerdings fest, daß durch die Existenz nichtlokaler Korrelationen in der Quantenmechanik die Messung in  $A$  den zu erwartenden Meßwert in  $B$  sehr wohl beeinflusst. Dieser Aspekt der Nichtlokalität verletzt allerdings nicht die Kausalität. Beobachter  $B$  mißt stets mit der Wahrscheinlichkeit 50% einen



der beiden möglichen Eigenwerte, egal ob und bezüglich welcher Achse bei  $A$  gemessen wird. Es geschieht also keine Übertragung von Information mit Überlichtgeschwindigkeit.

Es bleibt aber bemerkenswert, daß aufgrund der Existenz nichtkommutierender Observablen und verschränkter Zustände quantenmechanische Korrelationen anders als klassische zu nichtlokalen Effekten führen können. Die Bellschen Ungleichungen erfassen diesen Sachverhalt quantitativ und legen auch einen experimentellen Test dieses Aspekts der Quantenmechanik, welcher im klaren Kontrast zur klassischen Physik steht, nahe.

Dazu nehmen wir an, bei  $A$  ( $B$ ) werde der Spin in Richtung  $\vec{a}$  ( $\vec{b}$ ) gemessen. In einer Theorie mit verborgenen Parametern, welche im Sinne von EPR lokal, realistisch und vollständig ist, werden die Meßwerte bereits vor den Messungen für alle möglichen Richtungen  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vorhergesagt.

Die Meßwerte werden bezeichnet mit  $M_A(\vec{a}) = \pm 1$  und  $M_B(\vec{b}) = \pm 1$ . Aus der Drehimpulserhaltung folgt  $M_A(\vec{a}) = -M_B(\vec{a})$ .

Wir bestimmen nun für beliebige  $\vec{a}, \vec{b}$  die Korrelation

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \langle M_A(\vec{a}) M_B(\vec{b}) \rangle = - \langle M_A(\vec{a}) M_A(\vec{b}) \rangle$$

Nun bestimmen wir für bestimmte  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ :

$n(\alpha, \beta, \gamma)$ : Anteil der Fälle mit  $M_A(\vec{a}) = \alpha$ ,  $M_A(\vec{b}) = \beta$ ,  
 $M_A(\vec{c}) = \gamma$  mit  $\alpha, \beta, \gamma = \pm 1$   
 Unabhängig von der Messung bei B!

Per Definition ist  $\sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) = 1$

$$\rightarrow P(\vec{a}, \vec{b}) = - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) \alpha \beta \quad \text{usw.}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) \alpha (\beta - \gamma) \\ &= - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) \alpha \beta (1 - \gamma \beta) \end{aligned}$$

Bellsche Ungleichung:

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) (1 - \beta \gamma) = 1 + P(\vec{b}, \vec{c})$$

Wir prüfen nun, ob die von der Quantenmechanik vorhergesagten Korrelationen mit der Bellschen Ungleichung verträglich ist. Die Vorhersage ist

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{4}{\hbar^2} \langle (\vec{S}^{(A)} \cdot \vec{a}) (\vec{S}^{(B)} \cdot \vec{b}) \rangle_{\text{Singlett}} = \\ &= - \frac{4}{\hbar^2} \langle (\vec{S}^{(A)} \cdot \vec{a}) (\vec{S}^{(A)} \cdot \vec{b}) \rangle_{\text{Singlett}} \\ &= - \frac{4}{\hbar^2} \frac{1}{2} \left( \langle \uparrow | (\vec{S}^{(A)} \cdot \vec{a}) (\vec{S}^{(A)} \cdot \vec{b}) | \uparrow \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \downarrow | (\vec{S}^{(A)} \cdot \vec{a}) (\vec{S}^{(A)} \cdot \vec{b}) | \downarrow \rangle \right) \\ &= - \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Wir wählen nun

$$\vec{a} = (1, 0, 0), \quad \vec{b} = (0, 1, 0), \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

$$\rightarrow P(\vec{a}, \vec{b}) = 0, \quad P(\vec{a}, \vec{c}) = P(\vec{b}, \vec{c}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| = \frac{1}{\sqrt{2}} > 1 + P(\vec{b}, \vec{c}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Im Widerspruch mit der Bellschen Ungleichung.

→ Die Quantenmechanik ist nicht lokal und realistisch im Sinne von EPR.

Wir betonen aber, daß der Quantenmechanik sowie dem Standardmodell der Teilchenphysik lokale Logikrangschemata zugrundeliegen. Diese Theorien sind somit kausal, allerdings können verschränkte Zustände zu nicht-lokalen Effekten führen.

Die sogenannte Bohrsche Formulierung fußt auf verborgenen Variablen und erfüllt die EPR Forderung nach Vollständigkeit, allerdings ist diese Formulierung nicht lokal.

Das Experiment von Aspect (1982) bestätigt im Einklang mit der Quantenmechanik die Verletzung der Bellschen Ungleichung.