3. Quantisierung des Elektromagnetischen Strahlungsfelds

Die Quantisierung von Punktteilchen wird üblicherweise dadurch eingeführt, daß im Hamilton-Formalismus Poissonklammern durch Kommutatoren ersetzt werden. (Eine andere, für alle praktischen Zwecke äquivalente, und insbesondere in der Quantenfeldtheorie wichtige Methode der Quantisierung ist der Pfadintegralformalismus). Dieses Konzept soll aufs Strahlungsfeld übertragen werden, so daß wir zunächst an den Lagrange- und an den Hamilton-Formalismus für Felder erinnern.

3.1 Die Mechanik diskreter und kontinuierlicher Systeme

Für ein Punktteilchen ist die Lagrangefunktion L gegeben durch $L = T - V$, wobei T die kinetische und V die potentielle Energie ist. Man postuliert Hamiltons Variationsprinzip (die Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$ soll stationär unter kleinen Variationen der Teilchenbahn sein):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\}) = \sum_j \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right\}$$

$$= \sum_j \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right\} \delta q_j = 0$$

wobei die Randterme der partiellen Integration aufgrund vorgegebener Randbedingungen $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ verschwinden. Da dies für beliebige $\delta q_j(t)$ gelten soll, folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = 0$$

Der zu q_i konjugierte kanonische Impuls ist $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$. Dann ist die Hamiltonfunktion $H(\{p_j\},\{q_j\}) = \sum_i p_i \dot q_i - L$ und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten:

$$\frac{d}{dt} f(p,q,t) = \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t},$$

mit der Poisson-Klammer.

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

Insbesondere folgen die Hamilton-Gleichungen

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_j}}_{\delta_{ij}} - \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j}\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_j}}_{\delta_{ij}} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

und die Poissonklammer $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$.

Zur Quantisierung ersetzen wir die Variablen durch Operatoren und die Poissonklammern durch $-\frac{i}{\hbar}$ mal einem Kommutator. So erhalten wir z.B.

$$[q_i, p_j] = i\hbar\,\delta_{ij}, \qquad [q_i, H] = i\hbar\frac{\partial H}{\partial p_i} = i\hbar\frac{p_i}{m},$$

$$[p_i, H] = -i\hbar\frac{\partial H}{\partial q_i} = -i\hbar\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Wir kehren zunächst zur klassischen Physik zurück und verallgemeinern den Lagrange-Formalismus für Systeme mit vielen Teilchen. Als ein konkretes Beispiel betrachten wir N Teilchen der Masse m, die geradlinig mit Federn mit der Federkonstante k verbunden sind.

Mit η_i bezeichnen wir die Auslenkung des i-ten Teilchens aus der Gleichgewichtsposition.
Die Lagrangefunktion ist damit

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\left[m\dot{\eta}_i^2 - k(\eta_{i+1}-\eta_i)^2\right] = \sum_{i=1}^{N-1} a\,\frac{1}{2}\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2 - ka\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}\right)^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} a\,\mathcal{L}_i$$

Dabei ist a der Abstand zweier Teilchen im Gleichgewicht und $\mathcal{L}_i$ ist die Lagrangefunktion per Einheitslänge, also die Lagrangedichte. Damit können wir zu einem kontinuierlichen System übergehen, indem

$$a \longrightarrow dx, \qquad \frac{m}{a} \longrightarrow \mu \text{ (Massendichte)}$$

$$\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a} \longrightarrow \frac{d\eta}{dx}, \qquad ka \longrightarrow Y \text{ (Elastizitätsmodul)}.$$

Damit ist ein elastisches Seil beschrieben durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu\dot{\eta}^2 - Y\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right] \text{ und } L = \int dx\,\mathcal{L}, \quad \eta = \eta(x,t).$$

Nun verlangen wir wiederum

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} dt\int dx\,\mathcal{L}\left(\eta, \dot{\eta}, \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$= \int dt\int dx\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta}\delta\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)}\delta\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}}\delta\dot{\eta}\right\}$$

$$= \int dt\int dx\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}}\right\}\delta\eta$$

Damit lautet die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} = 0$$

Für das Beispielsystem finden wir

$$\mu \ddot{\eta} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

Der zu η konjugierte kanonische Impuls ist $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}}$. Damit erhält man die Hamilton-Dichte

$$\mathcal{H} = \dot{\eta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 .$$

Offenbar entspricht diese hier der Energie pro Einheitslänge.

3.2 Klassisches Skalarfeld

Im Hinblick auf das elektromagnetische Feld benutzen wir bereits die kovariante relativistische Formulierung. Dazu nutzen wir den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die griechischen Indizes nehmen dabei die Werte $0, 1, 2, 3$ an – entsprechend t, x, y, z. Der metrische Tensor stellt die Verbindung zwischen kontravarianten (oberer Index) und kovarianten (unterer Index) Vektoren her, indem er diese Indizes hebt bzw. senkt:

$$x^\mu = (c x^0, \vec{x}) \qquad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (c x^0, -\vec{x})$$

Bewegt sich ein weiterer Beobachter gleichförmig mit der Geschwindigkeit v z.B. in z Richtung, wird er dem Ereignis x^μ andere Koordinaten zuschreiben, nämlich

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \quad \text{mit} \quad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

und $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Dies bezeichnet man als einen „Lorentz-Boost". Boosts entlang der anderen Achsen werden entsprechend erzeugt. Allgemein lassen Lorentz-Transformationen den metrischen Tensor invariant

$$\Lambda^{\sigma}{}_{\mu}\,\Lambda^{\varrho}{}_{\nu}\, g_{\sigma\varrho} = [\Lambda^T]_{\mu}{}^{\sigma}\, g_{\sigma\varrho}\,\Lambda^{\varrho}{}_{\nu} = g_{\mu\nu}$$

oder kurz $\Lambda^T g \Lambda = g$. Neben den Boosts haben auch Matrizen der Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & O_{3\times 3} & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

welche Drehungen erzeugen, diese Eigenschaft. Auch Produkte wie $\Lambda''^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda'^{\mu}{}_{\varrho}\,\Lambda^{\varrho}{}_{\nu}$ lassen den metrischen Tensor invariant, so daß die Lorentz-Transformationen eine Gruppe bilden.

Skalarprodukte sind Lorentz-Invariant

$$v \cdot w := v^{\mu} g_{\mu\nu} w^{\nu} = v^{\mu} [\Lambda^T]_{\mu}{}^{\varrho}\, g_{\varrho\sigma}\,\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}\, w^{\nu}$$

$$= v'^{\mu} g_{\mu\nu} w'^{\nu} = v' \cdot w'$$

Ein wichtiges Beispiel ist das Produkt des Viererimpulses

$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ (dabei ist E die Energie des Massenpunkts)

mit sich selbst:

$p_{\mu} p^{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2 c^2$, wobei m die Ruhemasse ist.

Für $\vec{p}=0$ folgt die berühmte Formel $E=mc^2$.

Kovariante Vektoren transformieren folgendermaßen:

$$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu = g_{\mu\varrho}\Lambda^\varrho{}_\sigma g^{\sigma\nu} x_\nu = x_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$$

Dabei identifizieren wir die inverse Lorentz-Transformation als

$$\Lambda_\mu{}^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = [(\Lambda^{-1})^T]_\mu{}^\nu$$

Dies ist gerechtfertigt wegen

$$v_\mu w^\mu = v'_\mu w'^\mu = v_\varrho (\Lambda^{-1})^\varrho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\sigma w^\sigma = v_\varrho \delta^\varrho{}_\sigma w^\sigma = v_\sigma w^\sigma$$

Die Ableitung nach einem kovarianten Vektor ist kontravariant:

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\varrho} = \Lambda^\mu{}_\varrho \frac{\partial}{\partial x_\varrho}$$

$$x'^\mu = x_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \Longleftrightarrow x'_\mu \Lambda^\mu{}_\varrho = x_\varrho$$

Umgekehrtes gilt für kontravariante Vektoren, so daß wir kurz schreiben:

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \text{und} \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Für das elastische Seil haben wir eine Lagrangedichte per Einheitslänge definiert. Wir betrachten nun eine Lagrangedichte pro Volumen für ein skalares Feld ϕ:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2(x)$$

Dabei haben wir $\mathcal{L}(x)$ so konstruiert, daß es selbst ein skalares Feld ist.

Mit $d^4x = c\,dt\,dx\,dy\,dz$ ist die Wirkung

$$S = \int d^4x\,\mathcal{L}(x)$$

Da $\det\Lambda = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$, ist das Integrationsmaß Lorentzinvariant und S insgesamt ein Lorentzskalar.

Durch das Variationsprinzip können wir nun gemäß dem speziellen Relativitätsprinzip Bewegungsgleichungen erhalten, die der Form nach Lorentzinvariant (d.h. kovariant) sind.

Mit

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi(x)} \delta \phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} \delta \partial_\mu \phi(x) \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} \right\} \delta \phi(x) = 0$$

erhalten wir die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \phi(x))} = 0$$

Mit obiger Lagrangedichte folgt die Klein-Gordon Gleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + \mu^2 \phi(x) = 0$$

$$= \partial^2 \phi(x) + \mu^2 \phi(x)$$

Zum Hamilton-Formalismus gehen wir über, indem wir den zu $\phi(x)$ kanonisch konjugierten Impuls $\Pi(x)$ einführen

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \dot{\phi}(x)} = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x)$$

Dies führt zur Hamiltonschen Dichte (die im gegebenen Fall der Energiedichte entspricht):

$$\mathcal{H}(x) = \Pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{c^2}{2} \Pi^2(x) + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2$$

Das Differential dieser Funktion ist $(i = 1, 2, 3)$

$$d\mathcal{H} = \cancel{\Pi \, d\dot{\phi}} + \dot{\phi} \, d\Pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} d\phi - \cancel{\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}}_{=\Pi} d\dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} d\, \partial_i \phi$$

$$= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi} d\Pi + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \phi)} d\, \partial_i \phi$$

Damit ist

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \phi)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)}$$

Indem wir die Euler-Lagrange Gleichungen $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} = 0$ erhalten wir benutzen, erhalten wir

$$\partial_t \Pi = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)}$$

Es folgen die Hamilton-Gleichungen

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi} \quad \text{und} \quad \dot{\Pi} = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \phi)} \right)$$

Für Funktionale $A(\phi, \Pi, t)$ und $B(\phi, \Pi, t)$ definieren wir die Poisonklammern

$$\{A, B\} = \int d^3x \left(\frac{\delta A}{\delta \phi(t, \vec{x})} \frac{\delta B}{\delta \Pi(t, \vec{x})} - \frac{\delta A}{\delta \Pi(t, \vec{x})} \frac{\delta B}{\delta \phi(t, \vec{x})} \right)$$

In unseren Anwendungen lassen sich die Funktionale als Integrale über entsprechende Dichten darstellen, also z.B.

$$A(\phi, \Pi, t) = \int d^3x \, \mathcal{A}(t, \phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{x}))$$

Die Funktionalableitung wird dann folgendermaßen ausgewertet (entsprechend für $\frac{\delta}{\delta \Pi}$):

$$\frac{\delta A}{\delta \phi(t, \vec{x})} = \int d^3x' \left(\frac{\partial \mathcal{A}(t, \phi(t, \vec{x}'), \Pi(t, \vec{x}'))}{\partial \phi(t, \vec{x}')} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{A}(t, \phi(t, \vec{x}'), \Pi(t, \vec{x}'))}{\partial(\partial_i \phi(t, \vec{x}'))} \right) \delta^3(x - \vec{x}')$$

$$= \frac{\partial \mathcal{A}(t, \phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{x}))}{\partial \phi(t, \vec{x})} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{A}(t, \phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{x}))}{\partial(\partial_i \phi(t, \vec{x}))}$$

Dabei versteht sich, daß A und ϕ zur gleichen Zeit t ausgewertet werden.
Wenn wir ϕ und Π selbst als Funktionale schreiben

$\phi(t,\vec{x}) = \int d^3y \;\; \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\,\phi(t,\vec{y})$ (entsprechend für Π),

erhalten wir

$$\{\phi(t,\vec{x}), \Pi(t,\vec{x}')\} = \int d^3z \;\delta^3(\vec{x}-\vec{z})\,\delta^3(\vec{x}'-z) = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

Entsprechend können wir Funktionalableitungen von Funktionen folgendermaßen auffassen (wir unterdrücken die räumlichen Ableitungen):

$$\frac{\delta \mathcal{A}(f(t,\vec{x}),t)}{\delta f(t,\vec{x}')} = \int d^3y\;\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\left\{\frac{\partial \mathcal{A}(f(t,\vec{y}),t)}{\partial f(t,\vec{x}')}\,\delta^3(\vec{y}-\vec{x}')\right.$$

$$\left.-\partial_i \frac{\partial \mathcal{A}(f(t,\vec{y}),t)}{\partial(\partial_i f(t,\vec{x}'))}\,\delta^3(\vec{y}-\vec{x}')\right\} = \left(\frac{\partial \mathcal{A}(f(t,\vec{y}),t)}{\partial f(t,\vec{x}')} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{A}(f(t,\vec{y}),t)}{\partial(\partial_i f(t,\vec{x}))}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

und damit $\displaystyle\int d^3x \,\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta f} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial f} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial(\partial_i f)} = \frac{\delta A}{\delta f}$

Im allgemeinen können wir folgende Bewegungsgleichung für Funktionale angeben:

$$\frac{d\,A(\phi,\Pi,t)}{dt} = \int d^3x\,\frac{d\mathcal{A}(t,\phi(t,\vec{x}),\Pi(t,\vec{x}))}{dt}$$

$$= \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \phi}\dot{\phi} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \pi}\dot{\Pi} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}\right)$$

$$= \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \phi}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Pi}\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i \phi)}\right] + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}\right)$$

$$= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \text{wobei } H(t) = \int d^3x\;\mathcal{H}(\vec{x},t)$$

Insbesondere gilt also:

$$\dot{\phi}(\vec{x},t) = \{\phi(\vec{x},t), H(t)\} \text{ und } \dot{\Pi}(\vec{x},t) = \{\Pi(\vec{x},t), H(t)\}.$$

Die Lagrange und Hamilton-Formalismen lassen sich also von Punktteilchen auf Felder verallgemeinern. An Stelle der Koordinaten q_i treten die Felder $\phi(\vec{x})$. Dabei tritt an die Stelle des diskreten Index i, der endlich viele Werte annehmen kann, der Raumzeitpunkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Wir erhalten so ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden.

3.3 Quantisiertes Skalarfeld

Die allgemeine Lösung der Klein-Gordon Gleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + \mu^2 \phi(x) = \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + \mu^2\right)\phi(x) = 0$$

lautet

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\hbar^3} \frac{c}{2E(\vec{p})}\left(\alpha(\vec{p})e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-E(\vec{p})t)} + \alpha^*(\vec{p})e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-E(\vec{p})t)}\right)$$

mit $\frac{E^2(\vec{p})}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = \hbar^2\mu^2 =: m^2c^2$, $E(\vec{p}) > 0$, und komplexen Koeffizienten $\alpha(\vec{p})$.

Wir haben in Analogie mit der Energie-Impuls Beziehung eine Masse $m = \frac{\hbar\mu}{c}$ für ϕ definiert.

Üblicherweise setzt man $\hbar = c = 1$, um sich einige Mühsal zu ersparen. Wir behalten hier jedoch die Einheiten bei, was den Zusammenhang zwischen relativistischer und nichtrelativistischer Quantenmechanik beleuchtet.

Der Faktor $\frac{1}{2E(\vec{p})}$ ist als Teil des Integrationsmaßes zu verstehen, und dient dazu, dieses Lorentz-invariant zu halten. Dies läßt sich folgendermaßen sehen:

$$\int d^4p\ \delta(p^2-m^2c^2)=\int d^3p\int dp^0\sum_{\pm}\frac{\delta(p^0\mp\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2c^2})}{2|p^0|}$$

$$=\int d^3p\sum_{\pm}\frac{1}{2|p^0|}\bigg|_{p^0=\pm\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2c^2}}\quad \left(p^0=\frac{E(\vec{p})}{c}\right),$$

da der erste Ausdruck manifest Lorentz-invariant ist.

Zur Quantisierung gehen wir nun wieder gemäß

$\{\cdot,\cdot\}\longrightarrow -\frac{i}{\hbar}[\cdot,\cdot]$ vor. Insbesondere verlangen wir

$$\{\phi(t,\vec{x}),\Pi(t,\vec{x}')\}=\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\longrightarrow[\phi(t,\vec{x}),\Pi(t,\vec{x}')]=i\hbar\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

Dies läßt sich erreichen, indem wir den Feldoperator

$$\phi(\vec{x},t)=c\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\hbar^3}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2E(\vec{p})}}\left(a(\vec{p})e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-E(\vec{p})t)}+a^\dagger(\vec{p})e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-E(\vec{p})t)}\right)$$

einführen. Dabei sind $a(\vec{p})$, $a^+(\vec{p})$ sogenannte Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren, welche ähnlich wie für den harmonischen Oszillator die Relationen

$$[a(\vec{p}),a^\dagger(\vec{p}')]=(2\pi)^3\hbar^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$[a(\vec{p}),a(\vec{p}')]=0\quad,\quad[a^+(\vec{p}),a^+(\vec{p}')]=0$$

erfüllen. Damit ist

$$\Pi(x)=\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\dot{\phi}(x)}=\frac{1}{c^2}\dot{\phi}(x)$$

$$=\frac{i}{c}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\hbar^3}\sqrt{\frac{E(\vec{p})}{2}}\left(-a(\vec{p})e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-E(\vec{p})t)}+a^\dagger(\vec{p})e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-E(\vec{p})t)}\right)$$

Wir berechnen

$$[\phi(t,\vec{x}),\Pi(t,\vec{x}')]=i\int\frac{d^3p\ d^3p'}{(2\pi)^6\hbar^6}\frac{\hbar}{2}\Big[(2\pi)^3\hbar^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}')$$

$$*\left(e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-E(\vec{p})t-\vec{p}'\cdot\vec{x}'+E(\vec{p}')t)}+e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-E(\vec{p})t-\vec{p}'\cdot\vec{x}'+E(\vec{p}')t)}\right)\Big]$$

$$= i\frac{\hbar}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\hbar^3}\left(e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}+e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\right)=i\hbar\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),$$

in Übereinstimmung mit der Quantisierungsbedingung.

Die Operatoren $\phi(t,\vec{x})$ und $\Pi(t,\vec{x})$ enthalten die volle Zeitabhängigkeit und sind daher Heisenbergoperatoren. Die Zeitentwicklung folgt aus der Heisenberggleichung $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O}=\frac{i}{\hbar}[H,\mathcal{O}]$ ($\mathcal{O}$ ein Heisenbergoperator), die für $\phi(\vec{x},t)$ z.B. aus der Quantisierung der Hamilton-Jacobi-Gleichung folgt:

$$\dot{\phi}(\vec{x},t)=\{\phi(\vec{x},t),H(t)\}\longrightarrow\dot{\phi}(\vec{x},t)=\frac{i}{\hbar}[H(t),\phi(\vec{x},t)]$$

Einen Schrödinger-Feldoperator erhält man, indem man den Heisenberg-Operator zu einer festen Zeit auswertet, also z.B. $\phi(\vec{x}):=\phi(\vec{x},t=0)$.

In der Quantenmechanik für Punktteilchen ist der Hilbertraum der Zustände durch die Wellenfunktionen gegeben. In der Feldtheorie tritt an deren Stelle ein Wellenfunktional

$$\psi(\vec{q},t)=\Psi(\phi,t)$$

Orts- und Impulsoperatoren ersetzt man folgendermaßen:

$$\vec{q}\;\psi(\vec{q},t)\longrightarrow\phi(\vec{x})\,\Psi(\phi,t)$$

$$\vec{p}\,\psi(\vec{q},t)=\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi(\vec{q},t)\longrightarrow\Pi(\vec{x})\Psi(\phi,t)=\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}\Psi(\phi,t)$$

In der Tat ist $\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}\equiv\Pi(\vec{x})$:

$$[\phi(\vec{x}),\Pi(\vec{x}')]=-\frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x}')}\phi(\vec{x})=i\hbar\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

Damit ist die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\phi,t) = H\, \Psi(\phi,t)$$
$$= \int d^3x \left[\frac{c^2}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 \right] \Psi(\phi,t)$$
$$= \int d^3x \left[-\frac{\hbar^2 c^2}{2} \frac{\delta^2}{\delta\phi^2(\vec{x})} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi(\vec{x}))^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2(\vec{x}) \right] \Psi(\phi,t)$$

Man sieht unmittelbar, daß nach einer Fouriertransformation sich die Impulsmoden separat wie harmonische Oszillatoren quantisieren lassen ($\rightarrow$ Übungsaufgabe). Damit erklärt sich auch, warum der Ansatz, den Feldoperator mit Hilfe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aufzustellen, zielführend ist.
Anstatt die funktionale Gleichung für $\Psi(\phi,t)$ zu lösen, berufen wir uns also auf die „algebraische" Methode zur Behandlung des harmonischen Oszillators.
Den Grundzustand bezeichnen wir als „Vakuum"
$$|0\rangle, \quad \langle 0|0\rangle = 1$$
Der Erzeugungsoperator hat die Eigenschaft
$$a^+(\vec{p})\,|0\rangle = |\vec{p}\rangle = |1(\vec{p})\rangle$$
Wir bezeichnen $|\vec{p}\rangle = |1(\vec{p})\rangle$ als Einteilchenzustand mit
$$\langle \vec{p}\,|\vec{p}\,'\rangle = \langle 0|a(\vec{p})a^+(\vec{p}\,')|0\rangle$$
$$= \langle 0|[a(\vec{p}), a^+(\vec{p}\,')] + a^+(\vec{p}\,')a(\vec{p})|0\rangle$$
$$= (2\pi)^3 \hbar^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')$$
Daneben können wir Mehrteilchenzustände mit verschiedenen Impulsen erzeugen:
$$a^+(\vec{p})a^+(\vec{p}\,')|0\rangle = |\vec{p}, \vec{p}\,'\rangle = |1(\vec{p}), 1(\vec{p}\,')\rangle$$
oder mit identischem Impuls:

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} a^{+n}(\vec{p})|0\rangle = |n(\vec{p})\rangle$$

Natürlich existieren auch beliebige Kombinationen solcher Zustände.

Wir berechnen noch den Hamiltonoperator. Dazu schreiben wir

$$\phi(\vec{x},t) = c\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\hbar^3}\sqrt{\frac{\hbar^2}{2E(\vec{p})}}\left(a(\vec{p})+a^+(-\vec{p})\right) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-E(\vec{p})t)}$$

$$\Pi(\vec{x},t) = -\frac{i}{c}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\hbar^3}\sqrt{\frac{E(\vec{p})}{2}}\left(a(\vec{p})-a^+(-\vec{p})\right) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x}-E(\vec{p})t)}$$

und damit

$$H(t) = H(t=0) = \int d^3x \left[\frac{c^2}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2\right]$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^6\hbar^6}\left\{-\frac{\sqrt{E(\vec{p})E(\vec{p}')}}{4}\left(a(\vec{p})-a^+(-\vec{p})\right)\left(a(\vec{p}')-a^+(-\vec{p}')\right)\right.$$

$$\left. + c^2\frac{\overbrace{-\vec{p}\cdot\vec{p}'+\hbar^2\mu^2}^{\to\, = m^2c^2}}{4\sqrt{E(\vec{p})E(\vec{p}')}}\left(a(\vec{p})+a^+(-\vec{p})\right)\left(a(\vec{p}')+a^+(-\vec{p}')\right)\right\} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\hbar^3} E(\vec{p})\left(a^+(\vec{p})a(\vec{p}) + \frac{1}{2}[a(\vec{p}), a^+(\vec{p})]\right)$$

Der Kommutator ergibt $(2\pi)^3\hbar^3\delta(0)$ und damit einen unendlich großen Beitrag zur Vakuum- oder Nullpunkts=energie. Sofern wir nicht die Energiedichte an die Schwerkraft koppeln, können wir diese konstante Energieverschiebung ignorieren. Die Kopplung an die Schwerkraft allerdings führt zum berüchtigten Problem der Kosmologischen Konstante.

Nun wollen wir uns noch überzeugen, daß die

Interpretation von $a^\dagger$ als Erzeugungsoperator von Teilchenzuständen zutreffend ist.
Sei $\varrho(\vec{q})$ eine Zustandsdichte mit einem scharfen Maximum um $\vec{q} = \vec{p}$. Mit dieser definieren wir einen Zustand:

$$|1_w, \vec{p}\,\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3\hbar^3} \sqrt{\varrho(\vec{q})}\, a^\dagger(\vec{q})|0\rangle$$ (w für normalisiert)

Dieser soll ein Teilchen beschreiben, also muß das Integral über die Teilchenzahldichte eins ergeben:

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3\hbar^3} \langle 1_w, \vec{p}\,|\, a^\dagger(\vec{q})\, a(\vec{q})\,|1_w, \vec{p}\,\rangle$$

$$= \int \frac{d^3q\, d^3q'\, d^3q''}{(2\pi)^9\hbar^9} (2\pi)^3\hbar^3 \delta^3(\vec{q}-\vec{q}\,')\,(2\pi)^3\delta^3(\vec{q}-\vec{q}\,'')\sqrt{\varrho(\vec{q}\,')\varrho(\vec{q}\,'')}$$

$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3\hbar^3}\, \varrho(\vec{q}) \overset{!}{=} 1$$

Zum Beispiel können wir $\varrho(\vec{q}) = (2\pi)^3\hbar^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})$ wählen
Damit finden wir für die Energie (den Vakuumterm berücksichtigen wir nicht)

$$\langle 1_w, \vec{p}\,|H|\,1_w, \vec{p}\,\rangle = \int \frac{d^3r\, d^3q\, d^3q'}{(2\pi)^9\hbar^9} \sqrt{\varrho(\vec{q}\,')\varrho(\vec{q})}\; E(\vec{r})$$

$$* \langle 0|\underbrace{a(\vec{q}\,')\, a^\dagger(\vec{r})}_{= a^\dagger(\vec{r})a(\vec{q}\,') + [a(\vec{q}\,') a^\dagger(\vec{r})]}\underbrace{a(\vec{r})\, a^\dagger(\vec{q})}_{= a^\dagger(\vec{q})a(\vec{r}) + [a(\vec{r}) a^\dagger(\vec{q})]}|0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3\hbar^3}\, \varrho(\vec{r})\, E(\vec{r}) = E(\vec{p})$$

Ein Zustand mit der Teilchenzahl eins und dem Impuls $\vec{p}$ hat also die Energie $E(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$. Die Wellenlänge ist dabei wie in der Quantenmechanik für

Punktteilchen durch die De Broglie Beziehung $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$ gegeben, so daß die Auffassung von $a(\vec{p})$ und $a^+(\vec{p})$ als Erzeugern und Vernichtern von Teilchen in der Tat zutreffend ist.

In der Quantenfeldtheorie wird das Konzept der Punkt=teilchen aufgegeben und auch Materieteilchen (z.B. das Elektron) werden als Felder behandelt.

3.4 Elektromagnetisches Feld

Ausgangspunkt ist das Vektorpotential $A^\mu = (\phi, \vec{A})$. Der Zusammenhang mit elektrischem und magnetischem Feld

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

läßt sich auf Lorentz-kovariante Weise zusammenfassen indem wir den elektromagnetischen Feldstärketensor definieren:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Dessen Komponenten können wir folgendermaßen identifizieren:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daneben läßt sich noch der duale Feldstärketensor definieren

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} F_{\varrho\sigma}$$

Dabei ist ε der total antisymmetrische Tensor mit $\varepsilon^{0123} = 1$. Automatisch erfüllt sind damit die Gleichungen:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}}_{\text{antisymm. in allen}}\,\underbrace{\partial_\mu(\partial_\varrho A_\sigma - \partial_\sigma A_\varrho)}_{\text{symm. in } \varrho\beta \text{, symm. in } \mu\sigma} = 0,$$

welche zwei der Maxwell-Gleichungen ergeben.
Die übrigen beiden folgen mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu ,$$

wobei $j^\mu = (\varrho c, \vec{j})$ die Viererstromdichte ist.
Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten hier:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = 0$$

Wir berechnen die einzelnen Terme:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} \underset{\substack{F \text{ hängt nur} \\ \text{von } \partial^\nu A^\mu \text{ ab}}}{=} -\frac{1}{c} j_\alpha \frac{\partial A^\alpha}{\partial A^\mu} = -\frac{1}{c} j_\alpha \delta^\alpha_\mu = -\frac{1}{c} j_\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} = -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} \frac{\partial}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} \left(F^{\gamma\delta} F^{\alpha\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}\, 2 F^{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} F^{\alpha\beta}$$

$$= -\frac{1}{8\pi} F_{\alpha\beta} \underbrace{\frac{\partial}{\partial(\partial^\nu A^\mu)} \left(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha\right)}_{= \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu - \delta^\beta_\nu \delta^\alpha_\mu} = -\frac{1}{8\pi} \left(F_{\nu\mu} - F_{\mu\nu}\right)$$

$$= -\frac{F_{\nu\mu}}{4\pi}$$

$\underset{\text{E.L.-Gl.}}{\Longrightarrow}$ $$-\frac{4\pi}{c} j_\mu + \partial^\nu F_{\nu\mu} = 0$$

Insgesamt erhalten wir so die Maxwell-Gleichungen:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \Longrightarrow \begin{array}{ll} \mu = 0: & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \varrho \\ \mu = i: & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{array}$$

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \mu = 0: \ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \mu = i: \ \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \end{array}$$

Setzen wir die Ausdrücke von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch die Potentiale in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen ein, erhalten wir

$$(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A})_i = \varepsilon_{ijk}\nabla_j\,\varepsilon_{klm}\nabla_l A_m$$
$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\nabla_j\nabla_l A_m$$
$$= [\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}]_i - [\vec{\nabla}^2\vec{A}]_i$$

$$-\vec{\nabla}^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 4\pi\varrho$$

$$-\vec{\nabla}^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Da die Lagrangedichte als Integrand im Wirkungsintegral auftaucht, ändern wir die Bewegungsgleichungen nicht, wenn wir den Integranden mittels partieller Integration manipulieren. Insbesondere können wir ersetzen:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$\longrightarrow -2A^\nu\partial^2 A_\nu + 2(\partial_\nu\partial^\mu A_\mu)A^\nu$$

In der relativistischen Quantenfeldtheorie bietet sich an dieser Stelle an, die Lorenz-Eichung

$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c}\partial_t\phi - \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ zu wählen. Damit fiele der zweite Term automatisch weg und die Quantisierung der einzelnen Komponenten von A^μ kann in Analogie mit dem skalaren Feld vollzogen werden (sofern man unphysikalische Polarisationszustände ausschließt). Weiterhin hat die Lorenz-Eichung den Vorteil, daß sie Lorentz-kovariant ist.

Mit Blick auf die Anwendung auf nichtrelativistische Atome, wählen wir hier jedoch die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$. In dieser lauten die Maxwell-Gleichungen:

$$-\vec{\nabla}^2\phi = 4\pi\varrho$$

$$-\vec{\nabla}^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \vec{\nabla}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi$$

Lösung der ersten Gleichung ist das Coulomb-Potential

$$\phi(\vec{x},t) = \int d^3y \, \frac{\varrho(\vec{y},t)}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

Die zweite Gleichung spalten wir in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil:

$$\vec{A} = \vec{A}_\parallel + \vec{A}_\perp \qquad \text{mit} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\perp = \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\perp = 0$$

$$\vec{j} = \vec{j}_\parallel + \vec{j}_\perp \qquad \text{mit} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{A}_\parallel = \vec{\nabla}\times\vec{j}_\parallel = 0$$

Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad \partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c}\partial_t c\varrho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

finden wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}^2\phi = 4\pi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j} \implies \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi = 4\pi\,\vec{j}_\parallel$$

(Da $\vec{\nabla}\phi$ ein Gradient ist kann rechts kein Term mit nichtverschwindender Rotation auftreten.)

Damit gilt dann

$$-\vec{\nabla}^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\perp .$$

so daß $\vec{A}$ rein transversal ist, im Einklang mit der Coulomb Eichung.

Wir wollen das freie Feld quantisieren und betrachten Wechselwirkungen als kleine Störung. In Abwesenheit von Ladungen sind

$$\phi = 0 \quad \text{und} \quad -\vec{\nabla}^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0$$

Mit diesen Bedingungen können wir in der Coulomb-Eichung im Integranden der Wirkung ersetzen:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \longrightarrow 2 \vec{A}\, \partial^2 \vec{A} \longrightarrow -2(\partial_\mu \vec{A})(\partial^\mu \vec{A})$$

Wir können die Komponenten des Photonfeldes also wie ein masseloses Skalarfeld quantisieren, müssen aber die Transversalitätsbedingung beachten. Die allgemeine Lösung der Maxwell-Gleichung für $\vec{A}$ ist

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \hbar^3} \frac{c}{2E(\vec{p})} \Big(c_\alpha(\vec{p})\, \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - E(\vec{p})t)} + c_\alpha^*(\vec{p})\, \vec{\varepsilon}^{(\alpha)*}(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - E(\vec{p})t)} \Big)$$

mit $E(\vec{p}) = |\vec{p}|c$. Die zwei unabhängigen transversalen Polarisationen werden mit α bezeichnet, c_α sind komplexe Koeffizienten und $\vec{\varepsilon}^{(\alpha)}$ orthonormierte Polarisations=vektoren,

$$\vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{p}) \cdot \vec{\varepsilon}^{(\beta)}(\vec{p}) = \delta_{\alpha\beta}$$

Die geforderte Transversalität impliziert

$$\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{p}) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 1,2.$$

Die Vollständigkeitsrelation lautet

$$\sum_{\alpha=1,2} \varepsilon^{(\alpha)i}(\vec{p})\, \varepsilon^{(\alpha)j}(\vec{p}) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^{\,2}},$$

wobei der letzte Term wegen der Transversalität auftritt,

$$\sum_i p^i \left(\delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^{\,2}} \right) = 0.$$

Für den Feldoperator können wir nun angeben

$$\vec{A}(\vec{x},t) = 2\sqrt{\pi}\, c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \hbar^3} \frac{\hbar}{\sqrt{2c|\vec{p}|}} \sum_{\alpha=1,2} \Big(a_\alpha(\vec{p})\, \vec{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{p})\, e^{-\frac{i}{\hbar} p\cdot x} + a_\alpha^\dagger(\vec{p})\, \vec{\varepsilon}^{(\alpha)*}(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar} p\cdot x} \Big)$$

Dabei sind die Vertauschungsrelationen für die Erzeugungsund Vernichtungsoperatoren

$$[a_\alpha(\vec{p}), a_{\alpha'}(\vec{p}')] = [a^+_\alpha(\vec{p}), a^+_{\alpha'}(\vec{p}')] = 0$$

$$[a_\alpha(\vec{p}), a^+_{\alpha'}(\vec{p}')] = (2\pi)^3 \hbar^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{p}')\, \delta_{\alpha\alpha'}$$

Der Faktor $2\sqrt{\pi}$ kommt dabei von der unterschiedlichen Normierung von $\frac{1}{8\pi}\partial_\mu \vec{A}\cdot\partial^\mu \vec{A}$ gegenüber $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$. In der Quantenfeldtheorie wird dieser Faktor durch die Heaviside-Lorentz Einheiten (Ersetzung aller expliziten Faktoren 4π in den Maxwell-Gleichungen durch 1) vermieden.

Die Polarisationsvektoren für links und rechts zirkular polarisiertes Licht, welches sich entlang der z-Achse ausbreitet sind

$$\vec{\varepsilon}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erinnern daran, daß Drehungen durch Exponenzierung des Drehimpulsoperators erzeugt werden, z.B. für Drehungen um die z-Achse

$$U(R(\hat{n}_z,\vartheta)) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vartheta J_z} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wobei der letzte Ausdruck als 3×3 Matrix für dreidimensionale Vektoren gilt (für Spinoren unterschiedlich). Damit können wir für Vektoren

$$J_z = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

identifizieren. Die Polarisationsvektoren $\varepsilon^\pm$ sind Eigenvektoren von J_z mit den Eigenwerten $\pm\hbar$. Wir können dies richtungsunabhängig ausdrücken, indem wir die Helizität definieren:

$$h = \frac{\vec{p} \cdot \vec{L}}{|\vec{p}|}$$

Diese ist für links (rechts) zirkular polarisiert Photonen $+\hbar$ $(-\hbar)$.

Analog zur Rechnung fürs Skalarfeld können wir noch den Hamiltonoperator des freien Photonenfeldes bestimmen:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \hbar^3} |\vec{p}| \sum_{\alpha=1,2} \left(a_\alpha^+(\vec{p}) a_\alpha(\vec{p}) + \frac{1}{2} [a_\alpha(\vec{p}), a_\alpha^+(\vec{p})] \right)$$

Anschaulich addiert dieser die Energien der einzelnen freien Photonen.