Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik 3: Quantenmechanik

Anatoly Zharikov, Björn Garbrecht, TU München, SS 2015

Übungsblatt 8 (03.06.15)

8.1 Radial Komponente des Impulsoperators

Der Operator des Radialimpulses ist definiert als

$$\hat{p}_r = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_r) \quad (\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}).$$

Beweisen Sie die folgende Relationen

$$[r, \hat{p}_r] = i\hbar, \quad \hat{p}_r = -i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r.$$

8.2 Runge-Lenz-Vektor

Der quantenmechanische Runge-Lenz-Vektor $\hat{\boldsymbol{A}}$ ist definiert als

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\boldsymbol{p}} \times \hat{\boldsymbol{L}} - \hat{\boldsymbol{L}} \times \hat{\boldsymbol{p}}\right) - \frac{e^2 \boldsymbol{r}}{r}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass das Vektorprodukt zweier Vektoroperatoren auch ein Vektoroperator ist.

b) Beweisen Sie für ein beliebigen Vektoroperator $\hat{\boldsymbol{V}}$ folgende Identität

$$\hat{\boldsymbol{V}} \times \hat{\boldsymbol{L}} = -\hat{\boldsymbol{L}} \times \hat{\boldsymbol{V}} + 2i\hbar \hat{\boldsymbol{V}}\,.$$

Was folgt daraus für den Runge-Lenz-Vektor?

8.3 2D-Oszillator und das Kastenpotential

Betrachten Sie das Eigewertsproblem im Potential

$$V(x,y,z) = \begin{cases} \frac{m\omega^2(x^2+y^2)}{2} & \text{für} \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit Hilfe eines Separationsansatzes bestimmen Sie das Energiespektrum und die Eigenfunktionen. Diskutieren Sie ausserdem dieses Problem in Zylinderkoordinaten.