Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik 3: Quantenmechanik

Anatoly Zharikov, Björn Garbrecht, TU München, SS 2015

Übungsblatt 7 (27.05.15)

7.1 n-dimensionaler quantenmechanischer Oszillator

a) Betrachten Sie einen quantechanischen 3-D Oszillator. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und den Entartungsgrad.

b) Im klassischen Fall sind $M_{kl} = p_k p_l + m^2\omega^2 x_k x_l$ $(k, l = 1, ..., n)$ die Erhaltungsgrößen. Zeigen Sie, dass die Operatoren $\hat{M}_{kl} = \hat{p}_k\hat{p}_l + m^2\omega^2\hat{x}_k\hat{x}_l$ $(k, l = 1, ..., n)$ mit Hamiltonoperator des Oszillators kommutieren.

7.2 Geladenes Teilchen im Magnetfeld

Der Operator für die Geschwindigkeit des Teilchens ist definiert über die Forderung

$$\langle \hat{\boldsymbol{v}} \rangle := \frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{r} \rangle \,.$$

a) Berechnen Sie $\hat{\boldsymbol{v}}$.

b) Berechnen Sie den Kommutator zweier verschiedener Komponenten von $\hat{\boldsymbol{v}}$.

7.3 Laplace-Operator in höheren Dimensionen

Der n-dimensionale Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten ist definiert als:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

a) Sei $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ eine Funktion nur von r: $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

b) Allgemein gilt:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\sigma$$

wobei Δ_σ ein Operator ist, die nur auf Funktionen der Winkel wirkt, welche die Richtung im Raum $\boldsymbol{R}^n$ bestimmen. Nehmen wir an, es gäbe eine homogene Funktion $f(x_1, x_2, .., x_n)$ vom Grad k $(k = 0, 1, 2, ...)$, die harmonisch sei: $\Delta f = 0$. Zeigen Sie, dass f geschrieben kann als $f = r^k Y_k$, wobei Y_k eine Eigenfunktion von Δ_σ zum Eigenwert $-k(k + n - 2)$ ist.