Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik 3: Quantenmechanik

Anatoly Zharikov, Björn Garbrecht, TU München, SS 2015

Übungsblatt 6 (20.05.15)

6.1 Kohärente Zustande

Die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ sind die Eigenzustände des Vernichtungsoperators eines harmonischen Oszillators der Masse m und der Frequenz ω:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

(a) Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl α die Identität

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

erfüllt ist, wobei $|\alpha\rangle$ ein normierte Zustand ist und $|n\rangle$ die normierte Eigenzustände des harmonischen Oszillators sind.

(b) Beweisen Sie, dass die kohärenten Zustände folgende Gleichung erfüllen:

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}, \quad \text{mit } \Delta x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \text{ und } \Delta p^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2.$$

Hinweis: $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*$.

(c) Berechnen Sie die Zeitentwicklung eines kohärenten Zustandes $|\alpha(t)\rangle$ und beweisen Sie, dass ein kohärenter Zustand mit der Zeit kohärent bleibt. Untersuchen Sie explizit die Zeitentwicklung von $\langle x\rangle$ und $\langle p\rangle$.

6.2 Hermitesche Operatoren

(a) Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gegebene hermitische Operatoren. Zeigen Sie, dass

(i) der Operator $\hat{A}\hat{B}$ hermitisch ist, nur wenn $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ gilt.

(ii) $(\hat{A} + \hat{B})^n$ hermitisch ist.

(b) Beweisen Sie, dass für jeden Operator $\hat{A}$ die Operatoren $\hat{A} + \hat{A}^\dagger$, $i(\hat{A} - \hat{A}^\dagger)$ und $\hat{A}^\dagger \hat{A}$ hermitisch sind.

(c) Für jeden Operator $\hat{A}$ ist der Operator $e^{\hat{A}}$ als $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{A}^n/n!$ definiert. Sei $\hat{H}$ ein hermitischer Operator. Zeigen Sie, dass der hermitisch konjugierte Operator von $e^{i\hat{H}}$ der Operator $e^{-i\hat{H}}$ ist.

(d) Beweisen Sie die Schwarzsche Ungleichung $\langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle \geq |\langle\psi|\phi\rangle|^2$.

Hinweis: *Betrachten Sie die Ungleichung* $\langle\psi + \lambda\phi|\psi + \lambda\phi\rangle \geq 0$ *und finden Sie den Wert von* λ*, der die linke Seite minimiert. Beachten Sie:* $\langle\psi + \lambda\phi|g\rangle = \langle\psi|g\rangle + \lambda^*\langle\phi|g\rangle$ *und dass* λ *und* λ^* *unabhängig voneineinder variiert werden.*

6.3 Operatoren

Diskutieren Sie die Eigenwerte eines hermiteschen und antihermiteschen Operators. Zeigen Sie, dass $\hat{x}$, $\hat{p}$ und $\hat{H}$ hermitesch sind. Berechnen Sie $(x\hat{p})^\dagger$.