Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik 3: Quantenmechanik

Anatoly Zharikov, Björn Garbrecht, TU München, SS 2015

Übungsblatt 5 (13.05.15)

5.1 Variationsverfahren

a) Diskutieren Sie das Variationsverfahren.

b) Betrachten Sie das Eigenwertsproblem in einem quartischen Potential $V(x) = Ax^4$. Wählen Sie die unnormierte Versuchswellenfunktion $\psi = e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$ für den Grundzustand und $\psi = xe^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$ für den angeregten Zustand. Geben Sie die Variationsabschätzung für die Energien beider Zustände.

c) Zeigen Sie, dass in einem überwiegend attraktiven 1D-Potential ($\int V(x)dx < 0$) mindestens einen gebundenen Zustand gibt.

5.2 Kohärente Zustände.

Der Anfangszustand eines Teilchens im quadratischen Potential läßt sich mit der Wellenfunktion

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{2}}, \quad \xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

beschreiben.

Berechnen Sie die zeitliche Enwicklung der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ und die Erwartungswerte $< \hat{x} >$, $< \hat{p} >$, sowie die Schwankungen Δx und Δp.

Hinweis: Die Energieeigenwerte und die normierte Eigenfunktionen des Hamiltonoperator $\hat{H}$ lauten

$$\hat{H}\psi_n(\xi) = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\psi_n(\xi), \ \ \psi_n(\xi) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n\, n!}} H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

Die erzeugende Funktion der Hermite-Polynomen $H_n(\xi)$ lautet: $e^{-z^2+2z\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(\xi)$.

5.3 Hilbert-Raum

Die Zustände $|n\rangle$ seien die Eigenzustände des Hamiltonoperators eines Oszillators. Der Vernichtungsoperator $\hat{b}$ ist definiert durch: $\hat{b}|n\rangle = n|n-1\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass der adjungierte Operator $\hat{b}^\dagger$ ein Erzeugungsoperator ist.

b) Beweisen Sie, dass der Operator $\hat{b}^\dagger$ **keine** Eigenfunktionen besitzt.