Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik 3: Quantenmechanik

Anatoly Zharikov, Björn Garbrecht, TU München, SS 2015

Übungsblatt 4 (06.05.15)

4.1 Modifiziertes Pöschl-Teller-Potential

a) Berechnen Sie die Wellenfunktionen und Bindungsenergien der gebundenen Zustände in einem anziehenden Potential der Form

$$V = -\frac{\hbar^2 a^2 l(l+1)}{2m}\frac{1}{\cosh^2(ax)}\,, \quad (a, l > 0)\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $y = \tanh(ax)$.

b) Im Falle $l = 1$ zeigen Sie, dass die Funktion

$$\psi_k(x) = \frac{ik - a\tanh(ax)}{ik + a}e^{ikx}$$

die Eigenfunktion des Hamiltonoperators ist. Bestimmen Sie die Transmissionsamplitude $t(E)$ und die Transmissionswarscheinlichkeit $T(E)$.

4.2 SUSY QM

a) Betrachten Sie den Hamiltonoperator der Form $\hat{H}^0 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V^0(x)$. Die Energie E_0 und die Wellenfunktion des Grundzustandes ψ_0 seien bekannt. Zeigen Sie, dass sich der Hamiltonoperator in der Form

$$\hat{H}^0 = \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 + E_0$$

repräsentiren läßt, wobei $\hat{A}$ ein Vernichtungsoperator ($\hat{A}\psi_0 \equiv 0$) ist und $\hat{A}_0^\dagger$ der zu $\hat{A}$ adjungierte Operator ist. Führen Sie den Operator

$$\hat{H}^1 = \hat{A}_0 \hat{A}_0^\dagger + E_0$$

ein und zeigen Sie, dass mit der Ausnahme des Wertes E_0 beide Operatoren isospektral sind. $\hat{H}^1$ nennt man den supersymmetrischen (**SUSY**-) Partner von $\hat{H}^0$.

b) Die Grundzustandswellenfunktion eines Hamiltonoperators lautet

$$\psi_0 \propto \frac{1}{\cosh^n x} \, .$$

Bestimmen Sie das Potential V^0 , den SUSY-Partner und die Anzahl der gebundenen Zuständen.

4.3 Variationsverfahren

a) Diskutieren Sie das Variationsverfahren.

b) Betrachten Sie das Eigenwertsproblem in einem quartischen Potential $V(x) = Ax^4$. Wählen Sie die unnormierte Versuchswellenfunktion $\psi = e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$ für den Grundzustand und $\psi = xe^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$ für den angeregten Zustand. Geben Sie die Variationsabschätzung für die Energien beider Zustände.

c) Zeigen Sie, dass in einem überwiegend attraktiven 1D-Potential ($\int V(x)dx < 0$) mindestens einen gebundenen Zustand gibt.