

Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik 3: Quantenmechanik

Anatoly Zharikov, Börn Garbrecht, TU München, SS 2015

Übungsblatt 11 (24.06.15)

11.1 Wasserstoffatom

Bei den störungstheoretischen Berechnungen der relativistischen Feinstrukturterme und des Stark-Effekts im H-Atom treten Matrixelemente $\langle r^k \rangle$ mit $k = 2, 1, -1, -2, -3$ auf.

- a) Mit Hilfe des Hellmann-Feynman-Theorems bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle \frac{1}{r} \rangle$ und $\langle \frac{1}{r^2} \rangle$ für die Eigenzustände des Wasserstoffatoms.

Hinweis: Die Energieeigenwerte lauten $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$, $n = n_r + l + 1$, wobei n_r die Anzahl der Nullstellen der Radialenwellenfunktion auf dem Intervall $(0, \infty)$ ist.

- b) Beweisen Sie die Rekursionsformel von Kramers

$$-\frac{k+1}{n^2} \langle \tilde{r}^k \rangle + (2k+1) \langle \tilde{r}^{k-1} \rangle + k \left[\frac{k^2-1}{4} - l(l+1) \right] \langle \tilde{r}^{k-2} \rangle = 0 \quad (\tilde{r} = r/a_B).$$

- (c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle r \rangle$, $\langle r^2 \rangle$ und $\langle \frac{1}{r^3} \rangle$.

11.2 Runge-Lenz-Vektor

- a) Betrachten Sie ein Wasserstoffatom. Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor

$$\hat{A} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} \times \hat{L} - \hat{L} \times \hat{p} \right) - \frac{e^2 \vec{r}}{r}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

- b) Diskutieren Sie die "zufällige" Entartung in Coulomb-Potential.

11.3 Wasserstoffatom in vier Dimensionen

Das quantenmechanische Energiespektrum des Wasserstoffatoms mit einem als unendlich schwer und punktförmig angenommenen Kern besteht im bekannten dreidimensionalen Fall aus einem diskreten Anteil $E_n = -Ry/n^2$, $n = 1, 2, \dots$ bei negativen Energien $E < 0$ und einem Kontinuum von Streuzuständen bei $E \geq 0$. In einem vierdimensionalen Raum, mit Radialkoordinate $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ gibt es im allgemeinen aber überhaupt keine gebundenen Zustände.

- a) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld E einer Punktladung e am Ursprung im vierdimensionalen Fall wie $1/r^3$ abfällt und bestimmen Sie damit die Wechselwirkungsenergie $V(r) = -e\varphi(r)$ eines Elektron im Potential $\varphi(r)$ des Kerns mit Ladung e .

Hinweis: Verwenden $\vec{E} = -(\partial_r \varphi(r)) \vec{e}_r$, sowie das Gauß'sche Gesetz $\int \vec{E} \cdot \vec{f} = e$ mit $2\pi^2$ als Oberfläche der Einheitskugel in vier Dimensionen.

- b) Zeigen Sie, dass es zu jeder Lösung $\psi_E(\vec{x})$ der stationären Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right) \psi_E(\vec{x}) = E \psi_E(\vec{x})$$

eine Lösung $\psi_E^{(\lambda)}(\vec{x}) = \psi_E(\vec{x}/\lambda)$ für beliebigem $\lambda > 0$ gibt, die eine Energie E/λ^2 besitzt. Da λ eine kontinuierliche Variable ist, kann es also kein diskretes Spektrum geben.

- c) Die Schrödingergleichung für radialsymmetrische Zustände $\psi(\vec{x}) = \psi(r)$ bei $E = 0$ hat die Form

$$\frac{1}{r^3} (r^3 \psi')' + \frac{\gamma}{r^2} \psi = 0 \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^2}{4\pi^2}.$$

Bestimmen Sie die beiden möglichen Werte $\nu_{1,2}$ des Exponenten ν im Lösungsansatz $\psi \sim r^\nu$ und den kritischen Wert γ_c der dimensionslosen Stärke γ der Coulombwechselwirkung, oberhalb der keine reellen Lösungen für ν existieren.

d) Ersetzen Sie das Potential γ/r^2 für die Abstände $r < r_p$ durch eine Konstante γ/r_p^2 und zeigen Sie, dass sich in dem durch den 'Protonradius' r_p regularisierten Potential die Wellenfunktion im Bereich $r < r_p$ wie $\psi(r) = \psi(0) - ar^2 + \dots$ verhält. Wie hängt die Konstante a_p von r_p ab? d) Ersetzen Sie das Potential γ/r^2 für die Abstände $r < r_p$ durch eine Konstante γ/r_p^2 und zeigen Sie, dass sich in dem durch den 'Protonradius' r_p regularisierten Potential die Wellenfunktion im Bereich $r < r_p$ wie $\psi(r) = \psi(0) - ar^2 + \dots$ verhält. Wie hängt die Konstante a_p von r_p ab?

e) Zeigen Sie, dass für $\gamma < \gamma_c$, wo $\nu_1 > \nu_2$ reell sind, die Anschlussbedingung ψ'/ψ stetig bei $r = r_p$ das Verhältnis der Koeffizienten A und B in der allgemeinen Lösung $\psi(r) = Ar^{\nu_1} + Br^{\nu_2}$ im Bereich $r > r_p$ im Limes $r_p \rightarrow 0$ zu $B/A \sim r_p^{\nu_1 - \nu_2} \rightarrow 0$ festgelegt. Bei $r_p = 0$ folgt die Wellenfunktion für Energie $E = 0$ also einem reinen Potenzgesetz $\psi = A/r^{|\nu_1|}$ und hat keine Knoten. In Übereinstimmung mit der Folgerung in Teilaufgabe b) gibt es daher keine gebundenen Zustände mit $E < 0$.