Zentralübung zur Vorlesung

Theoretische Physik 3: Quantenmechanik

Anatoly Zharikov, Börn Garbrecht, TU München, SS 2015

Übungsblatt 10 (17.06.15)

10.1 Schwache anziehende Potentiale

a) Mithilfe von Variationsverfahren zeigen Sie, dass in einem überwiegend attraktiven 1D-Potential ($\int V(x)dx < 0$) mindestens einen gebundenen Zustand gibt. Bestimmen Sie die Energie des gebundenen Zustandes.

b) Diskutieren Sie einen 3D-Fall

10.2 Dipolpotential

Betrachten Sie ein Elektron in einem Dipolpotential der Form

$$V_d(\vec{r}) = -\frac{ed}{r^2}\cos\theta\,.$$

a) Reduzieren Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung zu einem dimensionslosen Eigenwertsproblem. Mithilfe von Separationsansatz $\psi(\vec{r}) = \frac{u(\tilde{r})}{\tilde{r}}Y(x)\,,\ x = \cos\theta$ formulieren Sie die Eigenwertsprobleme für die Eigenfunktionen $u(\tilde{r})$ und $Y(x)$.

b) Zeigen Sie, dass eine kritische Dipolstärke d_c gibt, oberhalb der unendlich viele gebundene Zustände existieren.

c) Betrachten Sie den Unterraum der Zustände $|l = 0, m = 0\rangle$ und $|l = 0, m = 0\rangle$ und bestimmen Sie d_c. Diskutieren Sie die sogenannte "Niveau-Abstoßung". Wie ändert sich das Ergebnis, falls Sie den Unterraum auf die Zustände $|l = 0, m = 0\rangle$, $|l = 1, m = 0\rangle$ und $|l = 2, m = 0\rangle$ erweitern?

Hinweis: Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}P_l(x) = -l(l+1)P_l(x)\,,$$

$$\int_{-1}^{1} dx P_l(x)P_m(x) = \delta_{lm}\frac{2}{2l+1}\,,\qquad \int_{-1}^{1} dx P_l(x)xP_m(x) = \delta_{l(m-1)}\frac{l+1}{\sqrt{(2l+1)(2l+3)}}\ \ (m \geq l).$$

d) Betrachten Sie ein zusätziches abstoßendes Potential der Form

$$V_a(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \text{für } r > a \\ \infty, & \text{für } r < a \end{cases}$$

Diskutieren Sie die gebundene Energieeigenwerte des Elektrons in Falle $d > d_c$.

Hinweis: Die Macdonaldsfunktionen

$$K_{i\nu}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\; e^{-z\cosh t}\cos(\nu t)$$

genügen der Gleichung

$$z^2 K''_{i\nu} + z K'_{i\nu} - (z^2 - \nu^2) K_{i\nu} = 0\,.$$

10.3 Wasserstoffatom

Bei den störungstheoretischen Berechnungen der relativistischen Feinstrukturterme und des Stark-Effekts im H-Atom treten Matrixelemente $\langle r^k \rangle$ mit $k = 2, 1, -1, -2, -3$ auf.

a) Mit Hilfe des Hellmann-Feynman-Theorems (siehe ZÜblatt 6) bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle \frac{1}{r} \rangle$ und $\langle \frac{1}{r^2} \rangle$ für die Eigenzustände des Wasserstoffatoms.
   Hinweis: Die Energieeigenwerte lauten $E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$, $\quad n = n_r + l + 1$, wobei n_r die Anzahl der Nullstellen der Radialenwellenfunktion auf dem Interval $(0, \infty)$ ist.

b) Beweisen Sie die Rekursionsformel von Kramers

$$-\frac{k+1}{n^2}\langle \tilde{r}^k \rangle + (2k+1)\langle \tilde{r}^{k-1} \rangle + k\left[\frac{k^2-1}{4} - l(l+1)\right]\langle \tilde{r}^{k-2} \rangle = 0 \quad (\tilde{r} = r/a_B).$$

(c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle r \rangle$, $\langle r^2 \rangle$ und $\langle \frac{1}{r^3} \rangle$.