Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)

Sommersemester 2015

Abgabe bis Donnerstag, 02.07.15, 12:00 neben PH 3218.

Übungsblatt Nr. 11 Dieses Blatt wird in den Übungen vom 06.07. - 10.07.15 besprochen.

Aufgabe 1:
Harmonischer Oszillator im Elektrischen Feld **2 Punkte**

Ein Teilchen der Ladung q sei im Potential eines eindimensionalen harmonischen Oszillators, $V = \frac{1}{2}kx^2$, gebunden. Zusätzlich dazu soll sich das System in einem externen zeit- und ortsunabhängigen elektrischen Feld $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$ befinden. Der Hamiltonoperator sei dabei gegeben als:

$$H = H_0 + H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2 - qEx\,. \tag{1}$$

Berechnen Sie die Energiekorrektur für den Grundzustand bis zur Ordnung $\mathbf{E}^2$.

Aufgabe 2:
Störung eines Harmonischen Oszillators **2 Punkte**

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator der Frequenz ω_0. Die Energieeigenzustände sollen hierbei mit n benannt werden, wobei $n = 0$ den energetisch tiefsten bezeichnet. Zusätzlich zum Potential des harmonischen Oszillators soll eine zeitunabhängige Störung $V_{\text{pert}}(x)$ wirken. Anstatt die Form von $V_{\text{pert}}(x)$ zu notieren, geben wir dessen explizite Matrixelemente in der Basis der ungestörten Zustände an. Die Matrixelemente von V_{pert} seien 0 für ungerade m and n. Im Folgenden sei ein Teil der Matrix gegeben, wobei ϵ eine kleine dimensionslose Konstante sei. (Die Indizes in der angegebenen Matrix gehen von $n = 0$ bis $n = 4$)

$$V_{\text{pert}} = \epsilon\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{1/2} & 0 & \sqrt{3/8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{1/2} & 0 & 1/2 & 0 & -\sqrt{3/16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3/8} & 0 & -\sqrt{3/16} & 0 & 3/8\,. \end{pmatrix} \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die neuen Energien der ersten fünf Energielevels zur ersten Ordnung in der Störungstheorie.

(b) Berechnen Sie die neuen Energien für $n = 0$ und $n = 1$ zur zweiten Ordnung in der Störungstheorie.

Aufgabe 3:
Elliptische Vorformung eines Atomkerns **3 Punkte**

Für einen kugelförmigen Atomkern kann man annehmen, dass die Nukleonen sich in einem ebenfalls kugelförmigen Potential mit Radius R befinden:

$$V_{\mathrm{sp}} = \begin{cases} 0\,, & r < R \\ \infty\,, & r > R\,. \end{cases} \tag{3}$$

Unter Annahme eines leicht verformten Kern lässt sich das Potential mittels eines elliptischen unendlichen Potentialtopfes beschreiben:

$$V_{\mathrm{el}} = \begin{cases} 0\,, & \text{im Innern des Ellipsoids:} \frac{x^2+y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1\,, \\ \infty\,, & \text{sonst}\,, \end{cases} \tag{4}$$

mit $a = R(1 + 2\beta/3)$, $b = R(1 - \beta/3)$ und $\beta \ll 1$.

Berechnen Sie für ein Nukleon der Masse m die durch die elliptische Vorformung hervorgerufene approximative Änderung der Grundzustandsenergie E_0 zur ersten Ordnung in der Störungstheorie, indem Sie ein passendes H_1 finden.

Hinweis:

Versuchen Sie eine Variablentransformation zu finden, die das elliptische Potential kugelförmig aussehen lässt.

Aufgabe 4:
Linearer Unendlicher Potentialtopf **3 Punkte**

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m in einem unendlichen Potentialtopf mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} \frac{V_0}{a}x\,, & 0 \leq x \leq a\,, \\ \infty\,, & \text{sonst}\,, \end{cases} \tag{5}$$

für $V_0 \ll \hbar^2/(2ma^2)$.

Berechnen Sie die ersten drei Energieeigenwerte zur ersten Ordnung in der Störungstheorie.