Technische Universität München — **Theoretische Physik T70**
Physik Department — **B. Garbrecht, D. Gueter, J. Klarić**

Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)

Sommersemester 2015

Abgabe bis Donnerstag, 25.06.15, 12:00 neben PH 3218.

Übungsblatt Nr. 10 — Dieses Blatt wird in den Übungen vom 29.06. - 03.07.15 besprochen.

Aufgabe 1: Kugelsymmetrischer Potentialtopf — 4 Punkte

In einem kugelförmigen Hohlraum bewegt sich ein Teilchen der Masse m. Das Potential lautet dementsprechend:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < a\,, \\ \infty & \text{für } r \geq a\,. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie die Energieeigenfunktionen.

(b) Welche Bedingungen legen die Energieeigenwerte fest? Diskutieren Sie diese für $l = 0$.

(c) Wie sehen die Energieeigenwerte für $ka = \sqrt{2m/\hbar^2)E}a \gg l$ aus?

Hinweis: Benutzen Sie die Besselsche Differentialgleichung:

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 2x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left[x^2 - l(l+1)\right] y = 0\,, \tag{2}$$

welche

$$y(x) = A j_l(x) + B n_l(x) \tag{3}$$

als Lösung hat, mit j_l und n_l den sphärischen Besselfunktionen:

$$j_m(x) = (-x)^m \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m \frac{\sin x}{x}\,, \qquad n_m(x) = -(-x)^m \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^m \frac{\cos x}{x}\,. \tag{4}$$

Die Funktionen $n_m(x)$ sind divergent im Ursprung!
Für $x \to \infty$ findet man:

$$j_l(x) \approx \frac{\sin(x - l\pi/2)}{x}\,. \tag{5}$$

Aufgabe 2: Impulsunschärfe im Wasserstoffatom — 2 Punkte

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in seinem Grundzustand.

(a) Wie lautet der Erwartungswert der kinetischen Energie?

(b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, ein Atom mit einer kinetischen Energie größer als deren Erwartungswert zu finden?

(c) Bestimmen Sie die Impulsunschärfe $\Delta\mathbf{p}$.

Aufgabe 3:
Harmonischer Oszillator in Kugelkoordinaten **4 Punkte**

Ein Teilchen bewege sich im Feld eines Zentralpotentials:

$$V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \tag{6}$$

(a) Formulieren Sie die Radialgleichung und diskutieren Sie diese für die Grenzfälle $r \to 0$ und $r \to \infty$. Zeigen Sie, dass

$$u(r) = rR(r) = r^x \mathrm{e}^{-\gamma r^2} g(r) \tag{7}$$

ein passender Ansatz ist, der diesen Grenzfällen Rechnung trägt. Welche Bedeutung haben x und γ?

(b) Leiten Sie mit dem Ansatz aus (a) eine Bestimmungsgleichung für $g(r)$ ab.

(c) Wählen Sie für $g(r)$ den Ansatz

$$g(r) = \sum_{\mu} \alpha_\mu r^\mu \tag{8}$$

und begründen Sie, warum die Reihe bei einem endlichen μ_0 abbrechen muss.

(d) Bestimmen Sie das Spektrum der Energieeigenwerte.

Hinweis:
Geben Sie das Verhältnis α_{n+2}/α_n unter der Entwicklung $e^{x^2} = \sum_n \alpha_n x^n$ an.