Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)

Sommersemester 2015

Abgabe bis Donnerstag, 18.06.15, 12:00 neben PH 3218.

Übungsblatt Nr. 9 Dieses Blatt wird in den Übungen vom 22.06. - 26.06.15 besprochen.

Aufgabe 1:
Rotator **3 Punkte**

Gegeben sei ein starres Hantelmolekül, welches im Raum um den Koordinatenursprung mit zwei Freiheitsgraden, den Polarwinkeln ϑ sowie ϕ, rotiert. Dies wird durch den folgenden Hamiltonoperator beschrieben:

$$H = \frac{1}{2J}\mathbf{L}^2 \,. \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen samt ihren Eigenwerten sowie eventuelle Entartungsgrade.

(b) Der Rotator befinde sich zu einem bestimmten Zeitpunkt im Zustand

$$\psi(\vartheta,\phi) = \alpha\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\cos 2\phi\right)\,, \tag{2}$$

mit einer Normierungskonstante α.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Messung von $\mathbf{L}^2$ die Werte

$$6\hbar^2, 2\hbar^2, 0\,? \tag{3}$$

Hinweis:
Nutzen Sie die Ortsdarstellung der Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\vartheta,\phi) = \langle\vartheta\phi|lm\rangle$:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,, \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\vartheta - 1\right)\,, \quad Y_{2\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta \mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}\phi}\,, \tag{4}$$

(c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine simultane Messung von $\mathbf{L}^2$ und L_z das Wertepaar $(6\hbar^2, -2\hbar)$ ergibt?

Aufgabe 2:
Kristallfeldoperator **2 Punkte**

In der Festkörperphysik wird häufig der Hamiltonoperator

$$H = A\,L_z^2 + B\left(L_x^2 + L_y^2\right) \tag{5}$$

als sogenannter Kristallfeldoperator verwendet, um das elektrische Feld in Kristallen zu beschreiben. Berechnen Sie unter der Verwendung der Symmetrierelation,

$$Y_{l-m}(\vartheta, \phi) = (-1)^m Y^*_{lm}(\vartheta, \phi)\,, \tag{6}$$

seine Eigenwerte und seine reellen Eigenfunktionen.

Aufgabe 3:
Drehimpulsoperatoren für ein $l = 1$ System **3 Punkte**

(a) Geben Sie für $l = 1$ die Eigenwerte und Eigenfunktionen von L_z an.

(b) Ermitteln Sie die Eigenzustände von L_x und L_y und drücken Sie diese durch die von L_z aus.

(c) Berechnen Sie $\Delta L_x = \sqrt{\langle L_x^2\rangle - \langle L_x\rangle^2}$ für den Zustand $|1, 1\rangle$.

(d) Geben Sie für den Zustand $|1, 1\rangle$ die Wahrscheinlichkeit an, die in Teilaufgabe (b) berechneten Eigenwerte von L_x zu messen.

Aufgabe 4:
Tensoren **2 Punkte**

Ein Tensor vom Rang n ist ein mathematisches Objekt, welches unter einer Rotation R wie folgt transformiert:[1]

$$T'_{i_1 i_2 \cdots i_n} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \cdots j_n}\,. \tag{7}$$

Ein Vektor sei dabei ein Tensor vom Rang 1.

(a) Zeigen Sie, dass Rotationsmatrizen R orthogonale Matrizen sind, $R^{-1} = R^t$, indem Sie fordern, dass sie die Länge eines Vektors erhalten.

Die Determinante einer Matrix A für $n = 3$ Dimensionen kann geschrieben werden als:

$$\det A = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}\,, \tag{8}$$

mit ϵ_{ijk} dem Levi-Civita-Symbol.

(b) Verifizieren Sie die allgemeinere Beziehung:

$$\det A\,\epsilon_{rst} = \epsilon_{ijk} A_{ri} A_{sj} A_{tk}\,. \tag{9}$$

(c) Beweisen Sie damit, dass es sich bei dem Levi-Civita-Symbol um einen invarianten Tensor vom Rang 3 handelt: $\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$.

(d) Bestätigen Sie außerdem, dass das Kronecker-Delta δ_{ij} ein invarianter Tensor vom Rang 2 ist: $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$

[1] In dieser Aufgabe verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention, die besagt, dass über doppelt vorkommende Indizes summiert wird.