Technische Universität München — **Theoretische Physik T70**
Physik Department — **B. Garbrecht, D. Gueter, J. Klarić**

Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)

Sommersemester 2015

Abgabe bis Donnerstag, 11.06.15, 12:00 neben PH 3218.

Übungsblatt Nr. 8 — Dieses Blatt wird in den Übungen vom 15.06. - 19.06.15 besprochen.

Aufgabe 1: Drehimpulsoperatoren — 3 Punkte

(a) Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren

$$[L_x, \mathbf{r}^2]\,, \quad [L_y, \mathbf{p}^2]\,. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass ein Operator, der mit zwei Komponenten des Bahndrehimpulses kommutiert, dies auch mit der dritten Komponente tut.

(c) Drücken Sie die Operatorprodukte L_+L_- und L_-L_+ durch $\mathbf{L}^2$ und L_z aus.

Aufgabe 2: Exponentieren einer Matrix — 4 Punkte

Funktionen von Quadratmatrizen können durch Taylor-Entwicklungen angegeben werden; wie z.B das Matrixexponential:

$$\mathrm{e}^M = \mathbf{1} + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die Exponentiale e^A und e^B für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(b) Zeigen Sie, dass für eine diagonalisierbare Quadratmatrix C gilt:

$$\det\left(\mathrm{e}^C\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,C} \tag{4}$$

(c) Im Allgemeinen kann gezeigt werden, dass Gleichung (4) auch für nicht-diagonalisierbare erfüllt ist. Zeigen Sie damit, dass eine beliebige Matrix F folgende Identität erfüllt:

$$\mathrm{Tr}[\log(F)] = \log[\det(F)]\,. \tag{5}$$

Aufgabe 3:
Matrixdarstellung des Hamiltonoperators **3 Punkte**

Gegeben sei der eindimensionale harmonische Oszillator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega\hat{x}^2 \,. \tag{6}$$

Im Folgenden gilt es, die Matrixdarstellung des Orts- und Impulsoperators in der Basis der Eigenzustände des Besetzungszahloperators zu bestimmen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie zunächst die Darstellungsmatrizen $(a)_{mn}$ und $(a^\dagger)_{mn}$ in dieser Basis. Dabei sei der m-n-te Eintrag gegeben durch

$$a_{mn} = \langle m|\hat{a}|n\rangle \,, \qquad a^\dagger_{mn} = \langle m|\hat{a}^\dagger|n\rangle \,. \tag{7}$$

(b) Berechnen Sie damit in derselben Basis die Darstellungsmatrizen der Orts- und Impulsoperatoren, deren Komponenten gegeben seien durch:

$$(x)_{mn} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\,(a^\dagger + a)_{mn} \,, \qquad (p)_{mn} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}\,(a^\dagger - a)_{mn} \,. \tag{8}$$

(c) Verifizieren Sie durch die entsprechende Matrixmultiplikation die Kommutatorrelation

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar \,, \qquad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \,. \tag{9}$$

Hinweise:
In dieser Aufgabe werden Operatoren durch einen Hut, wie z.B $\hat{a}$, gekennzeichnet. Die zugehörigen Darstellungsmatrizen mit Komponenten a_{mn} sind durch $(a)_{mn}$ gegeben.
Die Darstellungsmatrizen sind unendlichdimensional. Es genügt aber, die oberen linken 4×4 Blockmatrizen anzugeben.