Technische Universität München **Theoretische Physik T70**
Physik Department **B. Garbrecht, D. Gueter, J. Klarić**

Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)

Sommersemester 2015

Abgabe bis Donnerstag, 21.05.15, 12:00 neben PH 3218.
Übungsblatt Nr. 5 Dieses Blatt wird in den Übungen vom 26.05. - 29.05.15 besprochen.

Aufgabe 1: Hermitesche Operatoren — 3 Punkte

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum und $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ beliebige Zustände aus $\mathcal{H}$. Ein zu einem Operator A adjungierter Operator $A^\dagger$ ist wie folgt definiert:

$$\langle\psi|A\phi\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle A^\dagger\psi|\phi\rangle = \langle\phi|A^\dagger\psi\rangle^* \,. \tag{1}$$

Ein Operator heißt hermitesch bzw. antihermitesch, wenn $A^\dagger = A$ bzw. $A^\dagger = -A$.

(a) Zeigen Sie, dass $A + A^\dagger$, $\mathrm{i}(A - A^\dagger)$ und $AA^\dagger$ hermitesch sind.

(b) Gegeben sei der Operator $C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}B} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{i}B)^n/n!$, mit einem hermiteschen Oparator B. Zeigen Sie, dass sein adjungierter Operator gegeben ist durch: $C^\dagger = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}$.

(c) Seien nun A und B hermitesche Operatoren. Was lässt sich über die Hermitiziät folgender Operatoren sagen:

- Kommutator: $[A, B] = AB - BA$
- Antikommutator: $\{A, B\} = AB + BA$
- Potenz der Summe: $(A + B)^n$

Zerlegen Sie außerdem $D = AB$ in einen hermiteschen sowie antihermiteschen Anteil.

(d) Bestimmen Sie unter Verwendung der Definition (1) den zu zu $|\alpha\rangle\langle\beta|$ adjungierten Operator.

Hinweis:
Sie können, wie in der Vorlesung behandelt, annehmen, dass für zwei Operatoren A, B gilt: $(A^\dagger)^\dagger = A$ und $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Aufgabe 2: Parallelogrammgleichung — 1 Punkt

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum und $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ beliebige Zustände aus $\mathcal{H}$. Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung:

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2 \,. \tag{2}$$

Aufgabe 3: Dreiecksungleichung — 2 Punkte

Verifizieren Sie mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung die Dreiecksungleichung:

$$\big|\|\alpha\| - \|\beta\|\big| \le \|\alpha + \beta\| \,. \tag{3}$$

Aufgabe 4:
Ein symmetrisches Potential **4 Punkte**

Gegeben sei ein eindimensionaler, symmetrischer, rechteckiger Potentialtopf:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } |x| > a+b \\ 0 & \text{for } a < |x| < a+b \\ V_0 & \text{for } |x| < a \end{cases} \tag{4}$$

(a) Stellen Sie jeweils für alle drei Teilbereiche die Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m auf.

(b) Formulieren Sie die Randbedingungen bei $x = \pm(a+b)$ sowie die Stetigkeitsbedingungen bei $x = \pm a$.

(c) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator invariant unter Parität ist.

(d) Diskutieren Sie qualitativ, was man im Bereich $E < V_0$ klassisch bzw. quantenmechanisch erwarten würde.

(e) Verwenden Sie die Randbedingungen um einen Ansatz für gerade bzw. ungerade Lösungen in den jeweiligen drei Teilbereichen zu formulieren. Verlangt sind hier die Lösungen bis auf die Normierungskoeffizienten in den drei Bereichen – die Stetigkeitsbedingungen sind also nicht nötig. Auch die Energie muss noch nicht näher spezifiziert werden.

(f) Skizzieren und beschriften Sie die zwei untersten Eigenzustände zu den Energien E_0, E_1.

(g) Nehmen Sie nun an, dass $V_0 \to \infty$. Geben sie, unter Verwendung der Stetigkeitsbedingung, für die beiden niedrigsten Energieeigenzustände (zerlegt in gerade und ungerade) einen exakten Ausdruck an.

(h) Nehmen Sie zuletzt an, dass V_0 endlich aber sehr groß gegenüber der quantisierten Energie der beiden niedrigsten Zustände ist. Geben Sie einen approximierten Ausdruck für die Energiedifferenz dieser zwei Zustände an.
Hinweis: Berechnen Sie $\Delta k = k - k_0$, mit der Wellenzahl k_0 für $V_0 \to \infty$.
Benutzen Sie für große $x \gg 1$ die folgenden Näherungen für $\tanh(x)$ und $\coth(x)$:

$$\tanh(x) = 1 - 2\mathrm{e}^{-2x}\,, \tag{5}$$

$$\coth(x) = 1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\,. \tag{6}$$