Technische Universität München — **Theoretische Physik T70**
Physik Department — **B. Garbrecht, D. Gueter, J. Klarić**

Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)

Sommersemester 2015

Abgabe bis Freitag, 15.05.15, 12:00 neben PH 3218.

Übungsblatt Nr. 4 — Dieses Blatt wird in den Übungen vom 18.05. - 22.05.15 besprochen.

Aufgabe 1:
Eigenschaften der Wellenfunktion — 2 Punkte

Sei $\psi(x)$ eine zeitunabhängige Wellenfunktion und $\psi'(x) \equiv \frac{d}{dx}\psi(x)$ bzw. $\psi''(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2}\psi(x)$ deren erste bzw. zweite räumliche Ableitung sowie $V(x)$ ein Potential. Zeigen Sie unter der Verwendung der Stetigkeitsbedingung:

Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig, wenn für alle x_0 gilt:

$$\lim_{\epsilon \to 0} [f(x_0 + \epsilon) - f(x_0 - \epsilon)] = 0. \tag{1}$$

(a) $\psi(x)$ ist immer stetig.

(b) Für ein endliches Potential $V(x) < \infty$ ist $\psi'(x)$ stetig.

(c) Enthält das Potential $V(x)$ neben einem endlichen Anteil $V_{\text{fin}} < \infty$ zusätzlich einen δ-Anteil, $V(x) = V_{\text{fin}} + C\delta(x - x_0)$, mit einer Konstante C, so weist $\psi'(x)$ einen Sprung auf.

(d) Sei $V(x) = \infty$ in einem Intervall $I = [x_a, x_b]$, so verschwindet $\psi(x)$ in diesem Intervall und $\psi'(x)$ ist unstetig an den Grenzen $x_{a,b}$.

Hinweis:
Überlegen Sie sich bei Teilaufgabe (a), was für den Erwartungswert der kinetischen Energie gilt, sollte $\psi(x)$ nicht stetig sein. Integrieren Sie bei den Teilaufgaben (b) und (c) zunächst die zeitunabhängige, eindimensionale Schrödingergleichung über einen infinitesimalen Bereich $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$, und verwenden Sie anschließend die Stetigkeitsbedingung (1). Für Teilaufgabe (d) genügt es, eine qualitative Antwort zu liefern.

Aufgabe 2:
δ-Potential — 2 Punkte

Gegeben sei ein δ-Potential:

$$V(x) = -g\delta(x)\,, \text{ mit } g > 0\,. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass es für ein Teilchen der Masse m genau einen gebundenen Zustand gibt. Bestimmen sie dessen Wellenfunktion, sowie den dazugehörigen Energieerwartungswert, beide in Abhängigkeit von den Variablen m, g und der Konstanten $\hbar$.

Aufgabe 3:
Transmission und Reflexion im δ-Potential **2 Punkte**

Betrachten Sie ein weiteres δ-Potential:

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\eta\,\delta(x)\,, \text{ mit } \eta > 0\,. \tag{3}$$

Eine Lösung der Schrödingergleichung sei durch den folgenden Ansatz gegeben:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + A_1\mathrm{e}^{-ikx} & x \leq 0 \\ \psi_2(x) = A_2\mathrm{e}^{ikx} & x \geq 0 \end{cases}, \tag{4}$$

wobei $E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit $P_T \equiv |A_2|^2$, sowie die Reflexionswahrscheinlichkeit $P_R \equiv |A_1|^2$ in Abhängigkeit von k und η. Verifizieren Sie: $P_T + P_R = 1$.

(b) Was gilt für P_T und P_R für die Grenzfälle $\eta = 0$ bzw. $\eta \to \infty$?

Aufgabe 4:
Transmission im Potentialtopf **4 Punkte**

Ein Potentialtopf sei gegeben durch folgendes Potential:

$$V(x) = -V_0\theta(a - |x|)\,, \text{ mit } V_0 > 0. \tag{5}$$

Berechnen Sie mittels folgendem Ansatzes:

$$\psi(x) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & x < -a \\ C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa x} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa x} & -a < x < a \\ F\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + G\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & a < x \end{cases}, \tag{6}$$

die Transmissionswahrscheinlichkeit $P_T \equiv |F/A|^2$, sowie die Reflexionswahrscheinlichkeit $P_R \equiv |B/A|^2$ und verifizieren Sie: $P_R + P_T = 1$.