Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)

Sommersemester 2015

Abgabe bis Donnerstag, 07.05.15, 12:00 neben PH 3218.

Dieses Blatt wird in den Übungen vom 11.05. - 15.05.15 besprochen.

Übungsblatt Nr. 3

Hinweis: Die Übungen können Sie ab jetzt zu dritt abgeben.

Aufgabe 1: Cauchy-ähnliches Wellenpaket — 1 Punkt

Gegeben sei ein Wellenpaket in der Impulsdarstellung:

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{N}{p^2 + a^2}\,, \tag{1}$$

wobei N und a Konstanten sind.

(a) Berechne die Konstante N so, dass die Wellenfunktion $\tilde{\psi}$ auf 1 normiert ist

(b) Bestimmen Sie die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung $\psi(x)$.

(c) Berechnen Sie die Impuls-, sowie die Ortsunschärfe, und zeigen Sie anschließend, dass unabhängig von der Konstante a gilt: $\Delta p \Delta x > \hbar/2$.

Aufgabe 2: Ein weiteres Wellenpaket — 1 Punkt

Betrachten Sie ein Teilchen, dessen normierte Wellenfunktion gegeben ist durch:

$$\psi(x) = \theta(x) 2\alpha\sqrt{\alpha} x \mathrm{e}^{-\alpha x}\,. \tag{2}$$

(a) Für welche x ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x) = |\psi(x)|^2$ maximal?

(b) Berechnen Sie $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$, sowie $\Delta x = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$.

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen zwischen $x = 0$ und $x = 1/\alpha$ befindet?

(d) Bestimmen Sie $\tilde{\psi}(p)$, um damit die Erwartungswerte $\langle p \rangle$ und $\langle p^2 \rangle$ zu berechnen.

Aufgabe 3:
Kommutatoridentitäten **3 Punkte**

Der Kommutator zweier linearer Operatoren A and B ist wie folgt definiert:

$$[A.B] = AB - BA\,. \tag{3}$$

Seien A, B und C lineare Operatoren and α, β Skalare. Prüfen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $[A, B] = -[B, A]$ (Antisymmetrie)

(b) $[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C]$ (Linearität)

(c) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobi-Identität)

(d) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$, $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ (Produktregel)

(e) Das Matrixexponential von A wird durch die folgende Potenzreihe definiert:

$$\mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \tag{4}$$

Verwenden Sie für die folgenden Teilaufgaben, dass A und B mit $[A, B]$ kommutieren.

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0\,. \tag{5}$$

Zeigen Sie induktiv, dass

$$[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]\,, \tag{6a}$$
$$[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]\,, \tag{6b}$$

gilt und damit, dass die sogenannte Baker-Campbell-Hausdorff-Formel erfüllt ist:

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B \mathrm{e}^{-[A,B]/2}\,. \tag{7}$$

Hinweis:
Definieren Sie sich zunächst eine Funktion $f(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$. Zeigen Sie anschließend, dass $f(t)$ die Differentialgleichung $\frac{df(t)}{dt} = (A + B + t[A, B])f(t)$ erfüllt und lösen Sie diese.