Technische Universität München — **Theoretische Physik T70**
Physik Department — **B. Garbrecht, D. Gueter, J. Klarić**

Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)

Sommersemester 2015

Abgabe bis Donnerstag, 30.04.15, 12:00 neben PH 3218.

Übungsblatt Nr. 2 — Dieses Blatt wird in den Übungen vom 04.05. - 08.05.15 besprochen.

Aufgabe 1:
Realität des Impulserwartungswertes — 1 Punkt

Sei $\psi(\mathbf{r}, t)$ eine quadratintegrable Wellenfunktion. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Impulses reell ist:

$$\langle \mathbf{p} \rangle_t = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \int \psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla_{\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}, t) \, \mathrm{d}^3 r \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Aufgabe 2:
Quadratisches Wellenpaket — 2 Punkte

Das Wellenpaket eines freien Teilchens der Masse m hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form:

$$\psi(x) = C\theta(a - |x|) \,, \tag{2}$$

wobei C und $a > 0$ Konstanten seien.

a) Bestimmen Sie die Konstante C so, dass die Wellenfunktion $\psi(x)$ auf 1 normiert ist.

b) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$

c) Bestimmen Sie $\tilde{\psi}(p)$ und verifizieren Sie die korrekte Normierung.

d) Berechnen Sie den Impulserwartungswert $\langle p \rangle$ des Wellenpaketes. Wie groß ist die Impulsunschärfe $\Delta p = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$?

Aufgabe 3:
Grundzustand des Elektrons im Wasserstofatom — 3 Punkte

Die Grundzustandswellenfunktion des Elektrons im Wasserstoffatom ist gegeben durch:

$$\psi(\mathbf{r}) = C\mathrm{e}^{-\frac{|\mathbf{r}|}{a_B}} \,; \; a_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \tag{3}$$

berechnen Sie:

a) die Konstante C so, dass die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r})$ auf 1 normiert ist,

b) $\langle \mathbf{r} \rangle$; $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$; $\Delta r = \sqrt{\langle \mathbf{r}^2 \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle^2}$,

c) $\langle \mathbf{p} \rangle$; $\langle \mathbf{p}^2 \rangle$; $\Delta p = \sqrt{\langle \mathbf{p}^2 \rangle - \langle \mathbf{p} \rangle^2}$,

d) $\Delta r \Delta p$,

e) die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$,

Hinweise:
Gehen Sie zu Kugelkoordinaten über:

$$\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z)^T \to \mathbf{r}(|\mathbf{r}|,\theta,\phi) = |\mathbf{r}|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)^T\,. \tag{4}$$

Der Gradient, sowie der Laplace-Operator haben dabei die folgende Darstellung:

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{5}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,. \tag{6}$$

Verwenden Sie außerdem die Eulersche Gammafunktion Γ, welche wie folgt definiert ist:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,. \tag{7}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die nützliche Beziehung:

$$\Gamma(n+1) = n!\,, \tag{8a}$$

$$\Gamma(1) = 1\,. \tag{8b}$$

Aufgabe 4:

Potential in der Impulsdarstellung **2 Punkte**

Stellen Sie für die Wellenfunktion in der Impulsdarstellung

$$\tilde{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{px}{\hbar}}\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

die zeitunabhängige, eindimensionale Schrödinger Gleichung im Potential

$$V(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{px}{\hbar}}\,\frac{\mathrm{d}p}{\hbar} \tag{10}$$

auf.

Aufgabe 5:
Kontinuitätsgleichung eines Gaußschen Wellenpaketes **2 Punkte**

Betrachten Sie das eindimensionale Gaußsche Wellenpaket aus der Vorlesung:

$$\varphi(x,t) = \frac{(8\pi d^2)^{\frac{1}{4}}}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{\frac{b^2}{a}-c}\,, \tag{11}$$

mit $a = \frac{d^2}{\hbar^2} + \mathrm{i}\frac{t}{2m\hbar}$, $b = \frac{d^2}{\hbar^2}p_0 + \frac{\mathrm{i}x}{2\hbar}$ und $c = d^2p_0^2/\hbar^2$.
Berechnen Sie die Stromdichte $j(x,t)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho(x,t)$. Verifizieren Sie die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0\,. \tag{12}$$