B. Garbrecht, D. Gueter, J. Klarić

Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)

Sommersemester 2015

Präsenzübung

Aufgabe 1:
Identitäten der δ - Funktion

δ-Funktionen sind Distributionen, die wie folgt auf Testfunktionen $t(x)$ wirken:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x - x_0) t(x) = t(x_0). \tag{1}$$

Nehmen Sie im Folgenden an, dass $f(x)$ und $g(x)$ einfach differenzierbare Funktionen seien, von welchen $g(x)$ für $i = 1, ..., n$ bei x_i einfache Nullstellen mit der Eigenschaft $g'(x_i) \neq 0$ hat. Sei außerdem $a \neq 0$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

- $$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \tag{a}$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d\delta(x)}{dx} dx = -\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} \tag{b}$$

- $$x \frac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x) \tag{c}$$

- $$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \tag{d}$$

- $$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} \left(\delta(x - a) + \delta(x + a)\right) \tag{e}$$

Die Heaviside-Funktion, auch θ-Funktion genannt, ist definiert durch

$$\theta(x) \colon \mathbb{R} \to \{0, 1\},\ x \mapsto \begin{cases} 0: & x < 0 \\ 1: & x \geq 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Bestätigen Sie die folgende Beziehung:

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)\,. \tag{f}$$

Hinweis: Prüfen Sie die Identitäten, indem Sie die δ-Funktion auf eine Testfunktion wirken lassen und darüber integrieren, siehe Gleichung (1). Nehmen Sie insbesondere bei (f) an, dass die Testfunktionen im Unendlichen verschwinden.

Aufgabe 2:
Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation einer komplexwertigen Funktionen f einer reellen Variablen, von der wir annehmen, dass sie absolut integrierbar ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$) und stetig differenzierbar ist, ist gegeben durch:

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x); k] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,. \tag{3}$$

Die inverse Transformation ist dann:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tilde{f}(k)\,. \tag{4}$$

Seien f,g zwei Funktionen und α, $\beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x); k] = \alpha\mathcal{F}[f(x); k] + \beta\mathcal{F}[g(x); k]\,, \tag{a}$$
$$\mathcal{F}[f(x-a); k] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka}\mathcal{F}[f(x); k]\,, \tag{b}$$
$$\mathcal{F}[f(ax); k] = a^{-1}\mathcal{F}[f(x); k/a] \text{ für } a > 0\,, \tag{c}$$
$$\mathcal{F}[f(-x); k] = \mathcal{F}[f(x); -k]\,, \tag{d}$$
$$\mathcal{F}[(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)f(x); k] = \mathrm{i}k\mathcal{F}[f(x); k]\,, \tag{e}$$
$$\mathcal{F}[xf(x); k] = \mathrm{i}(\mathrm{d}/\mathrm{d}k)\mathcal{F}[f(x); k]\,. \tag{f}$$

Man kann die Fourier-Transformation auf natürliche Weise auf Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ erweitern. Wie ändern sich damit die Relationen (a)-(f)?

Die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f und g ist gegeben durch:

$$(f * g)(x) = \int f(x')g(x-x')\mathrm{d}x' \tag{5}$$

Beweisen Sie das Faltungstheorem:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]\,. \tag{g}$$
$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]\,. \tag{h}$$

Aufgabe 3:
De-Broglie-Wellenlängen

- Wie groß ist die De-Broglie-Wellenlänge des Mondes der Masse $m_M = 7,35 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$, der sich mit einer Geschwindigkeit von $1,02\,\mathrm{km/s}$ um die Erde bewegt.
- Welche De-Broglie-Wellenlänge besitzt ein Eichhörnchen der Masse $m_E = 300\,\mathrm{g}$, das sich mit einer Geschwindigkeit von $25\,\mathrm{km/h}$ fortbewegt.
- In der Bildröhre alter Fernsehapparate werden Elektronen mit einer Potentialdifferenz von $20\,\mathrm{kV}$ beschleunigt. Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge eines so beschleunigten Elektrons. Überlegen Sie sich zuvor jedoch, ob man in diesem Fall nichtrelativistisch rechnen darf.