7. Ankopplung ans elektromagnetische Feld

7.1 Hamiltonoperator

Bisher: Kopplung ans statische Coulomb-Potential

Nun gesucht: Schrödinger-Gleichung für Teilchen in allgemeinen elektromagnetischen Feldern.

Gehe dazu aus von der klassischen Hamilton-Funktion für Punktteilchen der Masse m und Ladung e:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\,\Phi$$

Dabei folgen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus den Eichpotentialen $\vec{A}$ und Φ:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Wir verifizieren die Hamiltonfunktion anhand der Newton'schen Bewegungsgleichungen, welche aus den Hamilton'schen Gleichungen folgen:

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{m}\left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right)\frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - e\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\dot{x}_j\frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - e\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Wir leiten die 1. Gleichung nochmals nach der Zeit ab und setzen die 2. Gleichung ein:

$$m\ddot{x}_i = \dot{p}_i - \frac{e}{c}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j - \frac{e}{c}\dot{A}_i$$

$$= \frac{e}{c}\sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right) - e\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{e}{c}\dot{A}_i$$

Wir bemerken, daß

$$(\dot{\vec{x}} \times \vec{B})_i = (\dot{\vec{x}} \times \vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \sum_{jkrs} \dot{x}_j \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{krs} \partial_r A_s$$

$$= \sum_{jrs} \dot{x}_j (\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr})\partial_r A_s = \sum_j (\dot{x}_j \partial_i A_j - \dot{x}_j \partial_j A_i)$$

$$\longrightarrow m\ddot{x}_i = \underbrace{\frac{e}{c}(\dot{\vec{x}} \times \vec{B})_i}_{\text{Lorentz-Term}} + \underbrace{e E_i}_{\text{Coulomb-Term}} \quad \underline{\text{Lorentzkraft}}$$

Die erste der Hamilton'schen Gleichungen ergibt, daß
$\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c}\vec{A}$
Wir bezeichnen $\vec{p}$ als <u>kanonischen Impuls</u> und $m\dot{\vec{x}}$ als kinetischen Impuls.

Quantisierung soll klassischen Grenzfall für $\hbar \to 0$ ergeben.
Mit dem Korrespondenzprinzip & dem Ehrenfest'sches Theorem (Kapitel 3.9) muß gelten:
$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} \longrightarrow [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$

Der kanonische Impuls ist also durch den Operator $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ zu ersetzen, dessen Erwartungswert nicht dem kinetischen Impuls entspricht.

Mit diesen Überlegungen hat die Schrödinger-Gleichung die Form:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\Phi\right]\psi$$

Wenn wir die Eichfreiheit nutzen und die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ wählen, dann erhalten wir

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = -\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m}-\frac{\hbar}{2im}\frac{e}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2$$

$$= -\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m}-\frac{\hbar e}{imc}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2$$

und damit insgesamt

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m}\psi+\frac{i\hbar e}{mc}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi+\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2\psi+e\Phi\psi$$

7.2 Bewegung im konstanten Magnetfeld

Für konstantes $\vec{B}$ schreiben wir

$$\vec{A}=-\frac{1}{2}[\vec{x}\times\vec{B}]$$

$$\Rightarrow [\vec{\nabla}\times\vec{A}]_i = -\frac{1}{2}\sum_{jkrs}\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\varepsilon_{krs}\,x_r B_s = -\frac{1}{2}\sum_{jks}\underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kjs}}\,B_s = B_i$$

$$\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kjs}=-2\delta_{is}$$

Außerdem: $\Phi=0$

Drücke die Terme in der Schrödinger-Gleichung in Coulomb-Eichung durch $\vec{B}$ aus:

Spatprodukt: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$

$$\frac{i\hbar e}{mc}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi = -\frac{1}{2}\frac{i\hbar e}{mc}(\vec{x}\times\vec{B})\cdot\vec{\nabla}\psi = \frac{i\hbar e}{2mc}(\vec{x}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{B}\psi$$

$$= -\frac{e}{2mc}\vec{L}\cdot\vec{B}\psi$$

$$\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2\psi = \frac{e^2}{8mc^2}(\vec{x}\times\vec{B})^2\psi = \frac{e^2}{8mc^2}\left(\vec{x}^2\vec{B}^2-(\vec{x}\cdot\vec{B})^2\right)\psi$$

wobei wir die Lagrange-Identität

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})$ benutzt haben

Wir nehmen nun noch o.B.d.A. an, daß $\vec{B} \parallel \vec{e}_z$ und schreiben $B = |\vec{B}| \equiv B_z$. Dann ist

$$\frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 \psi = \frac{e^2}{8mc^2} \left[(x^2+y^2+z^2) B^2 - z^2 B^2 \right] \psi = \frac{e^2}{8mc^2} (x^2+y^2) B^2 \psi$$

Wir behandeln nun den Fall schwacher Felder, d.h. wir vernachlässigen den Beitrag quadratisch in $\vec{A}$ bzw. $\vec{B}$.

Das <u>magnetische Moment</u> $\vec{\mu}$ ist klassisch über das Drehmoment $\vec{M}$ definiert, daß durch das $\vec{B}$-Feld induziert wird:

$|\vec{M}| = |\vec{\mu} \times \vec{B}| = \mu B \sin\vartheta$ mit $\mu = |\vec{\mu}|$ und ϑ dem Winkel zwischen $\vec{\mu}$ und $\vec{B}$.

Die Energie, ein zunächst senkrecht ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$) ausgerichtetes magnetisches Moment zu einem Winkel ϑ umzuorientieren, ist:

$$E = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} d\vartheta' \mu B \sin\vartheta' = -\mu B \left[\cos\vartheta'\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\vartheta} = -\mu B \cos\vartheta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Wir identifizieren also im Hamiltonoperator $\frac{e}{2mc} \vec{L} \cdot \vec{B}$ mit $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, wobei der Operator des Bahnmagnetischen Moments gegeben ist durch

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2mc} \vec{L} = \frac{e}{e_0} \mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar}$$

Dabei ist das <u>Bohrsche Magneton</u>

$$\mu_B = \frac{e_0 \hbar}{2mc} = 0{,}927 * 10^{-20} \frac{erg}{G}$$

Wir vergleichen bei dieser Gelegenheit mit einem Teilchen auf einer klassischen Bahn:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int d^3r\, \vec{r}\times\vec{j} = \frac{1}{2c}\int d^3r\, \vec{r}\times \underbrace{\vec{v}(t)\, e\, \delta^3(\vec{r}-\vec{x}(t))}_{=\vec{j}} = \frac{e}{2c}\,\vec{x}(t)\times\vec{v}(t)$$

Drehimpuls: $\vec{L} = m\,\vec{x}\times\vec{v}$

$$\longrightarrow \vec{\mu} = \frac{e\vec{L}}{2mc}$$

$\longrightarrow$ Das klassische Bahnmagnetische Moment und der quantenmechanische Operator entsprechen einander nach dem Korrespondenzprinzip.

Für schwache $\vec{B}$ Felder gilt also

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}\,\vec{L}\cdot\vec{B}\right]\psi = \left[-\frac{\hbar^2\vec{\nabla}^2}{2m} - \vec{\mu}\cdot\vec{B}\right]\psi$$

7.3 Normaler Zeeman-Effekt

Wir benutzen diese Überlegungen nun, um den Hamiltonoperator für ein Wasserstoffatom in einem schwachen, konstanten Magnetfeld in z-Richtung aufzustellen ($B = |\vec{B}|$):

$$H = H_0 - \frac{e}{2mc}BL_z, \qquad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{e_0^2}{r}$$

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 6 folgt

$$H\,\psi_{nlm_l}(r,\vartheta,\varphi) = \left[-\frac{m e_0^4}{2\hbar^2 n^2} - \frac{e\hbar}{2mc}m_l B\right]\psi_{nlm_l}(r,\vartheta,\varphi)$$

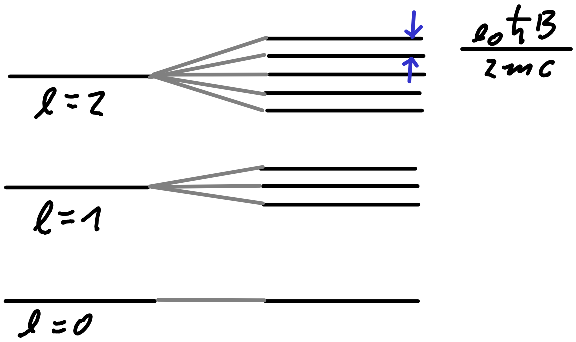
Zur besseren Unterscheidung von der Masse m haben wir hier den Eigenwert von L_z mit m_l benannt.
Die Eigenfunktionen mit externem Feld sind also identisch mit denen ohne Feld.
Die Eigenwerte sind

$$E_{n l m_l} = -\frac{m e_0^4}{2\hbar^2 n^2} + \hbar \omega_L m_l$$

mit der Larmor-Frequenz $\omega_L = -\frac{eB}{2mc} = \frac{e_0 B}{2mc}$.

Das Magnetfeld hebt also die Energieentartung der Zustände mit gleichen n, l aber verschiedenen m_l auf.

Dies läßt sich in folgendem Termschema skizzieren:



Diese Vorhersage ist auch der Grund für die Bezeichnung von m_l als „Magnetquantenzahl".

Es wird also das Auftreten von $2l+1$ benachbarten Linien vorhergesagt. Stattdessen beobachtet man

- in Atomen mit ungeradem Z Aufspaltung in eine gerade Anzahl an Linien $\longrightarrow$ Drehimpuls die Hälfte einer ganzen Zahl,
- daß die Linien nicht äquidistant sind.

Dieses reale Verhalten wird als anomaler Zeeman-Effekt bezeichnet. Theoretisch läßt sich dieser Erklären, indem man den Elektronen einen Eigendrehimpuls - genannt Spin s - von $s = \frac{1}{2}$ zuordnet [Goudsmith und Uhlenbeck (1925)]. Auch läßt sich damit das Stern-Gerlach Experiment (Kapitel 8) korrekt deuten.

7.4 Freie Bewegung im Magnetfeld

Wir betrachten wieder ein Magnetfeld in z-Richtung. Klassisch erzwingt dieses wegen der Lorentz-Kraft die Bewegung geladener Teilchen auf Kreisbahnen.

Wir wählen $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$, so daß $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x Bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$ (außerdem $\Phi = 0$).

$\longrightarrow$ Hamiltonoperator:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\Phi = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - \frac{e}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{e}{c}Bx\right)^2$$

Es gilt $[p_z, H] = 0$ und $[p_y, H] = 0$.

$\longrightarrow$ Separationsansatz:

$$\psi(\vec{x}) = \xi(x)\, e^{ik_y y + ik_z z}$$

$\longrightarrow$ Schrödingergleichung für $\xi(x)$

$$\left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\hbar k_y - \frac{e}{c}Bx\right)^2\right]\xi(x) = E\,\xi(x)$$

$\Longrightarrow$ mit Zyklotronfrequenz $\omega_c = \frac{eB}{mc}$

$$\left[\frac{p_x^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\left(x - \frac{\hbar k_y}{m\omega_c}\right)^2\right]\xi(x) = E\,\xi(x)$$

Auf der linken Seite: Hamiltonoperator für harmonischen Oszillator mit Verschiebung der Grundzustandsenergie Bewegung in z-Richtung) und des Koordinatenursprungs.

$\longrightarrow$ Energieeigenwerte: $E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$ (Landau-Niveaus)

$$\xi_n(x) = \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}\, x_0}} H_n(s) \quad \text{wobei} \quad s = \frac{x}{x_0} \quad \text{mit} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}.$$

7.5 Eichtransformationen

Klassische Bewegungsgleichung hängt nur von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ab, ist also eichinvariant.

Schrödingergleichung hängt dagegen von den Vektorpotentialen ab. $\longrightarrow$ Wie ändern sich die Lösungen unter Eichtransformationen $\Lambda(\vec{x},t)$?

Transformation der Eichpotentiale:

$$\vec{A} \longmapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$$

$$\Phi \longmapsto \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda$$

Wir behaupten, daß die Wellenfunktion folgendermaßen transformiert:

$$\psi(\vec{x},t) \longmapsto \psi'(\vec{x},t) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\vec{x},t)}\psi(\vec{x},t)$$

D.h. ψ ist nicht eichinvariant, jedoch eichkovariant.

Zum Beweis gehen wir aus von der Schrödinger-Gleichung:

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x},t)\right)^2 + e\,\Phi(\vec{x},t)\right]\psi(\vec{x},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t)$$

Multipliziere von links mit $e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}$ und tausche den Faktor nach rechts durch unter zweimaliger Verwendung der Identität

$$e^{f(y)}\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f(y)}{\partial y}\right)e^{f(y)}$$

$\longrightarrow$

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A} - \frac{\hbar}{i}\frac{ie}{\hbar c}\vec{\nabla}\Lambda\right)^2 + e\Phi\right]e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\psi = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie}{\hbar c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\psi$$

$\longrightarrow$

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}'\right)^2 + e\Phi'\right]\psi' = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'$$

Da $|\psi(\vec{x},t)|^2 = |\psi'(\vec{x},t)|^2$ ist, sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten unabhängig von der Wahl der Eichung.

7.6 Aharonov-Bohm Effekt

Betrachte zeitlich konstantes Magnetfeld, welches in einem bestimmten Gebiet verschwinden soll.

→ Wegen $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A}$ ist in diesem Gebiet rotationsfrei.

→ $\vec{A}$ kann als Gradient eines skalaren Feldes geschrieben werden:

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \Xi \quad \text{mit} \quad \Xi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}).$$

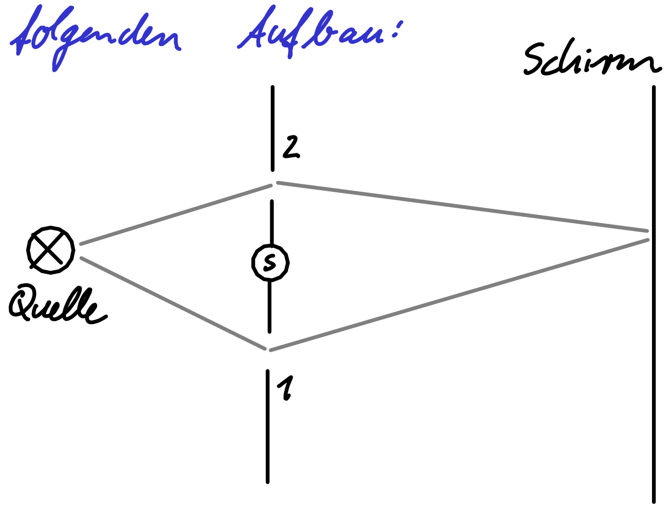
Wegen der Rotationsfreiheit von $\vec{A}$ ist dies Integral wegunabhängig, sofern der Weg die Spule nicht umschließt.

Es soll außerdem $\vec{E}(\vec{x}) \equiv 0$ sein, was wir mit der Wahl $\Phi(\vec{x},t) \equiv 0$ und $\dot{\vec{A}}(\vec{x},t) = 0$ erreichen.

Mit der Wahl $\Lambda = -\Xi$ ist $\vec{A}'(\vec{x},t) = 0$ im feldfreien Gebiet – das Vektorpotential wurde weggeeicht:

$$\psi' = \psi \, e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s})}$$

Das Aharonov-Bohm Interferenzexperiment hat nun den folgenden Aufbau:



Es ist das klassische Doppelspalt-experiment, bei welchem auf dem Schirm Interferenzmaxima und -Minima auftreten. Hinzu kommt eine Spule, die sich im Gebiet, in dem die Wellenfunktion

verschwindet (also z.B. zwischen den beiden Spalten), befindet.
Durch die Spule soll ein magnetischer Fluß

$$\Phi_B = \int d\vec{a} \cdot \vec{B} = \int d\vec{a}\; \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

fließen, welchen wir ein- und ausschalten können.

$\psi_{i,B}$: Wellenfunktion durch Spalt i mit Magnetfeld,

$\psi_{i,0}$: Wellenfunktion durch Spalt i ohne Magnetfeld.

Gemäß obiger Überlegungen gilt:

$$\psi_{iB}(\vec{x}) = \psi_{i0}(\vec{x}) \exp\left\{ \frac{ie}{\hbar c} \int_i d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}) \right\}$$

$i \to$ Weg durch Spalt i

Sind beide Spalte geöffnet, ergibt sich die Wellenfunktion als die Superposition

$$\psi_B(\vec{x}) = \psi_{1B}(\vec{x}) + \psi_{2B}(\vec{x})$$

$$= \left(\psi_{10}(\vec{x}) e^{\frac{ie}{\hbar c} \Phi_B} + \psi_{20}(\vec{x}) \right) e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_2 d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s})}$$

wobei wir benutzt haben

$$\int_1 d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}) - \int_2 d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}) = \oint d\vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{s}) = \int d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = \Phi_B$$

Mit einer Änderung des Flusses Φ_B ändert sich somit auch das Interferenzbild.

Etwas genauer können wir die von den Spalten ausgehenden Zylinderwellen betrachten:

$\psi_{i0}(\vec{x}) = \dfrac{e^{ikr_i}}{\sqrt{r_i}}$, $\quad r_i = |\vec{x} - \vec{x}_i|$, wobei $\vec{x}_i$ der Ort des Spalts i ist und $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ mit λ der Wellenlänge.

Interferenzmaxima treten dann auf für

$k r_1 + \dfrac{e}{\hbar c} \Phi_B - k r_2 = 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ oder entsprechend

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2\pi}\left(2\pi n - \frac{e}{\hbar c}\,\Phi_B\right).$$

Während die Phasen von ψ_{iB} eichabhängig sind, ist die relative Phase eichunabhängig, was daraus folgt daß das geschlossene Wegintegral über $\vec{\nabla}\Lambda(\vec{x})$ verschwindet, oder äquivalent daß der magnetische Fluß eichinvariant ist. Anders als in den Newton'schen Bewegungsgleichungen lassen sich in der Schrödingergleichung die Eichpotentiale also nicht vermeiden, und wir haben hier ein Beispiel für einen physikalischen Effekt von $\vec{A}$ selbst in Regionen, wo $\vec{E}=0$ und $\vec{B}=0$.

Wir erinnern noch kurz an die Bedeutung magnetischer Flüsse durch ringförmige Supraleiter. Für diese muß gelten, daß

$$\psi_{iB}(\vec{x}) = \psi_{i0}(\vec{x})\,\exp\left\{\frac{iq}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s}\cdot\vec{A}(\vec{s})\right\},$$

wobei $\vec{x}$ im supraleitenden Ring liegt, periodisch ist. Demnach muß gelten:

$$\frac{q}{\hbar c}\oint d\vec{s}\cdot\vec{A}(\vec{s}) = \frac{q}{\hbar c}\,\Phi = 2\pi n \quad \text{mit } n\in\mathbb{Z} \text{ oder}$$

$$\Phi = -n\,\Phi_0 \quad \text{mit } \Phi_0 = -\frac{2\pi\hbar c}{q}$$

Ein Cooper Paar im Supraleiter besteht aus zwei Elektronen, also ist das Flußquantum $\Phi_0 = \dfrac{\pi\hbar c}{|e|}$.

Die Flußquantisierung ist wesentlich für die Funktionsweise von SQUID (superconducting quantum interference device) Detektoren zur Präzisionsmessung von Magnetfeldänderungen.