4. Der harmonische Oszillator

Betrachte $V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2$.

Zum Vergleich mit der Quantenmechanik notieren wir die klassische Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} V(x) = -m\omega^2 x$$

$$\Longrightarrow \quad x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

Hamiltonfunktion: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$

$\longrightarrow$ Energie:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \\ &= \frac{m\omega^2}{2}\left[(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)^2 + (A\cos\omega t + B\sin\omega t)^2\right] \\ &= \frac{m\omega^2}{2}(A^2+B^2) \end{aligned}$$

Der harmonische Oszillator beschreibt in realen Systemen z.B.

* Schwingungszustände von Molekülen
* optische Phononen
* die elementaren freien Anregungen in der relativistischen Quantenmechanik ($\longrightarrow$ Quantenfeldtheorie) als Ausgangspunkt für störungstheoretische Rechnungen in wechselwirkenden Systemen.

Quantenmechanischer Hamiltonoperator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

$\longrightarrow$ Schrödingergleichung $H\varphi = E\varphi$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2\right]\varphi(x) = E\varphi(x)$$

Wir bestimmen die Lösungen zunächst „analytisch" nach den Rezepten aus Abschnitt 2.3. Basierend auf dem Kapitel zum Formalismus der Quantenmechanik präsentieren wir dazu als erstes Beispiel die abstraktere und elegantere „algebraische" Methode.

4.1 Analytische Methode

Definiere die dimensionslosen Variablen

$$\varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}, \qquad y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x = \frac{x}{x_0}$$

$$\longrightarrow \frac{d^2}{dy^2}\psi(y) + (\varepsilon - y^2)\,\psi(y) = 0$$

asymptotisches Verhalten für $|y| \longrightarrow \infty$:

$\psi(y) \sim e^{-\frac{y^2}{2}}$ (löst die Gleichung bis auf relative Korrekturen $\frac{1}{y^2}$)

$\longrightarrow$ Ansatz: $\psi(y) = h(y)\, e^{-\frac{y^2}{2}}$

$$\frac{d\psi}{dy} = \left(\frac{dh}{dy} - y h\right) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = \left(\frac{d^2h}{dy^2} - 2y\,\frac{dh}{dy} + y^2 h - h\right) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$\longrightarrow$

$$\frac{d^2h}{dy^2} - 2y\,\frac{dh}{dy} + (\varepsilon - 1)\,h = 0$$

Potenzreihenansatz für h:

$$h(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^m$$

Einsetzen in die Differentialgleichung für h liefert:

$$\sum_{m=2}^{\infty} a_m m(m-1) y^{m-2} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m m y^m + \sum_{m=0}^{\infty} (\varepsilon-1) a_m y^m = 0$$

$\longrightarrow$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} (m+1)(m+2) y^m - \sum_{m=0}^{\infty} (2m-\varepsilon+1) a_m y^m = 0$$

Da dies für beliebiges y gelten soll, ergibt der Koeffizientenvergleich:

$$(m+1)(m+2) a_{m+2} = (2m-\varepsilon+1) a_m$$

$\longrightarrow$

Für gegebenes a_0 erhalte $a_2, a_4, a_6, \dots$ (gerade Parität)
Für gegebenes a_1 erhalte $a_3, a_5, a_7, \dots$ (ungerade Parität)

Aus der Normierbarkeit der Wellenfunktion $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = 1$ folgt, daß die Potenzreihe für ein endliches $m = n$ abbrechen muß.
Andernfalls gilt für große m:

$$\frac{a_{m+2}}{a_m} \approx \frac{2}{m} \longrightarrow h(y) \approx \dots + a_m y^m + a_{m+2} y^{m+2} + a_{m+4} y^{m+4} + \dots$$

$$\approx \dots + a_m \left(y^m + \frac{2}{m} y^{m+2} + \frac{4}{m(m+2)} y^{m+4} + \dots \right)$$

Vergleiche mit:

$$e^{y^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(y^2)^\nu}{\nu!} = 1 + \dots + \frac{y^{2(\nu-1)}}{(\nu-1)!} + \frac{y^{2\nu}}{\nu!} + \frac{y^{2(\nu+1)}}{\nu!\,(\nu+1)} + \dots$$

$$\underset{\nu = \frac{m}{2}}{=} 1 + \dots + \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{1}{y^2} \left(y^m + \frac{2}{m} y^{m+2} + \dots \right)$$

$$\longrightarrow \quad h(y) \underset{|y|\to\infty}{\sim} \frac{1}{y^2} e^{y^2} \quad \Longrightarrow \quad \psi(y) \sim \frac{1}{y^2} e^{y^2} e^{-\frac{y^2}{2}} \longrightarrow \infty$$

Wir haben hier ein gerades m angenommen, aber ein entsprechendes Argument kann auch für den ungeraden Fall gegeben werden.

Damit die Reihe abbricht, muß es also ein ganzzahliges $n>0$ geben, so daß gilt:

$$2n - \varepsilon + 1 = 0 \iff \varepsilon = 2n+1 \iff \boxed{E \equiv E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Konstruiere $h(y)$ mit Hilfe der Rekursionsrelation & bezeichne die Polynome entsprechend des höchsten Koeffizienten a_n mit

$H_n(y) \longrightarrow$ Hermite-Polynome

$$(m+1)(m+2)\, a_{m+2} = (2m \underbrace{- \varepsilon + 1}_{-2n})\, a_m$$

z.B.

$n=0 \longrightarrow H_0(y) = 1$

$n=1 \longrightarrow H_1(y) = 2y$

$n=2 \rightarrow a_0 = -2 \Longrightarrow a_2 = \frac{0-2*2}{1*2} a_0 = 4 \Longrightarrow H_2(y) = 4y^2 - 2$

$n=3 \rightarrow a_1 = -12 \Longrightarrow a_3 = \frac{2*1-2*3}{2*3} a_1 = 8 \Longrightarrow H_3(y) = 8y^3 - 12y$

$H_4(y) = 16y^4 - 48y^2 + 12$

$H_5(y) = 32y^5 - 160y^3 + 120y$

$\ldots$

Offenbar sind die Hermite-Polynome eine Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2h}{dy^2} - 2y\frac{dh}{dy} + (\varepsilon - 1)h = 0 \longrightarrow \frac{d^2H_n(y)}{dy^2} - 2y\frac{dH_n(y)}{dy} + 2nH_n(y) = 0$$

mit $n = 0, 1, 2, \ldots$

Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\; e^{-y^2} H_n(y) H_m(y) = \sqrt{\pi}\, 2^n n!\, \delta_{nm}$$

Da $e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y)$ Eigenfunktion von H ist (hermitesch) hat dies die erwartete Form einer Orthogonalitätsrelation. Den expliziten Nachweis führen wir mit der algebraischen Methode.

Normierte Wellenfunktion zum Eigenwert E_n:

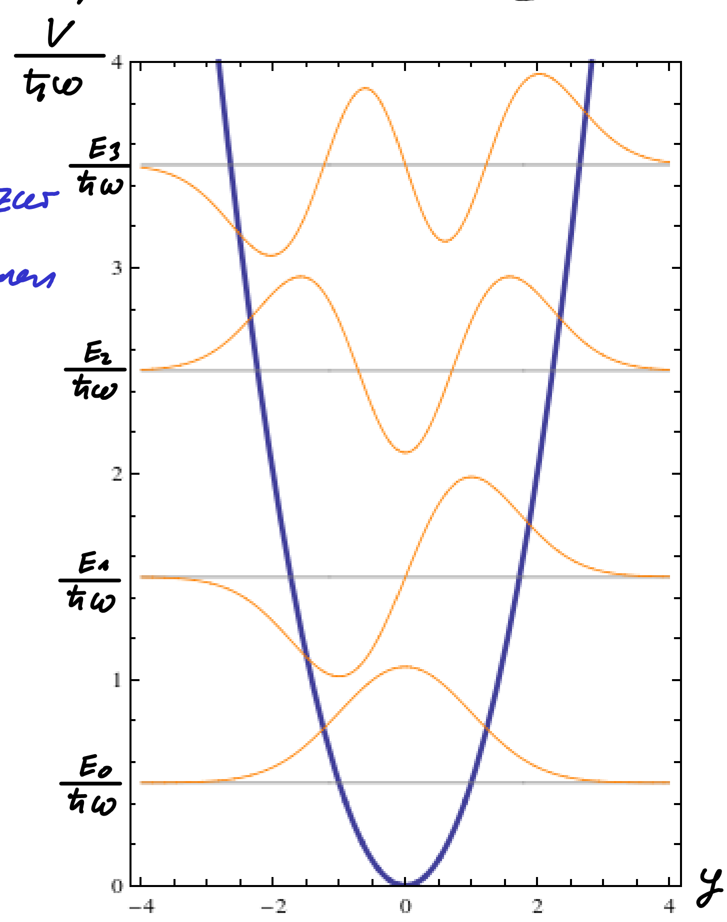
$$\psi_n(x) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}\, x_0}} H_n(y) \quad \text{wobei} \quad y = \frac{x}{x_0} \quad \text{mit} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Zur graphischen Darstellung schreiben wir noch:

$$V = \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \frac{\hbar\omega}{2} y^2$$

Bemerkungen:

* Im klassischen Fall ist $E = 0$ möglich $(A = B = 0)$ und die Energie kann kontinuierliche Werte annehmen
* Hier $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, d.h. $E \geq \frac{\hbar\omega}{2}$ und diskret.
* Wellenfunktion nicht verschwindend (und konkav zur y-Achse) im klassisch verbotenen Bereich $E_n < \frac{V}{\hbar\omega}$.



Weitere Eigenschaften der Lösungen lassen sich einfacher mit der algebraischen Methode herleiten.

4.2 Algebraische Methode

Definiere

$$a = \frac{\omega m x + ip}{\sqrt{2\omega m \hbar}} \xrightarrow[\text{Konjugation}]{\text{hermitesche}} a^+ = \frac{\omega m x - ip}{\sqrt{2\omega m \hbar}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\,(a + a^+), \quad p = -i\sqrt{\frac{\hbar \omega m}{2}}\,(a - a^+)$$

$$\longrightarrow \quad [a, a^+] = \frac{i}{\hbar}[p, x] = 1, \qquad [a,a] = [a^+, a^+] = 0$$

Mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \longrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + x_0 \frac{d}{dx}\right), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - x_0\frac{d}{dx}\right)$

Einsetzen in den Hamiltonoperator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \frac{\hbar\omega}{2}(a^+a + a a^+) = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}[a, a^+]\right)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{H = \hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)}$$

$\longrightarrow$ Gesucht: Eigenwerte des Besetzungszahloperators $\hat{n} = a^+ a$

Eigenwertgleichung: $n|n\rangle = \hat{n}\,|n\rangle$

Eigenwert ↩ ↪ Eigenzustand

Grundzustand:

Mit $n\langle n|n\rangle = \langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|a^+a|n\rangle = \langle an|an\rangle \geq 0 \Longrightarrow n \geq 0$

Insbesondere für $n = 0 \Longrightarrow \langle an|an\rangle = 0 \Longrightarrow a|n\rangle = 0$

(Beachte in der Notation, daß der Nullvektor gemeint ist. Dieser ist verschieden von $|n=0\rangle$!)

Ortswellenfunktion: $\varphi_n(\vec{x}) = \langle \vec{x}|n\rangle$

$$\longrightarrow \quad a|0\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{d}{dx} + \frac{x}{x_0^2}\right)\varphi_0(\vec{x}) = 0$$

$\longrightarrow$ normierte Lösung: $\varphi_0(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, x_0}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$

Angeregte Zustände:

Benutze: $[AB,C] = ABC - CAB = A[B,C] + ACB + [A,C]B - ACB$

$$= A[B,C] + [A,C]B$$

$\longrightarrow$

$$[a^+a, a^+] = a^+[a,a^+] + [a^+,a^+]a = a^+ \Longleftrightarrow [\hat{n}, a^+] = a^+$$

$$[a^+a, a] = a^+[a,a] + [a^+,a]a = -a \Longleftrightarrow [\hat{n}, a] = -a$$

$\longrightarrow \hat{n}\, a^+|n\rangle = (a^+\hat{n} + [\hat{n}, a^+])|n\rangle = (n+1)\, a^+|n\rangle$

$\rightarrow a^+|n\rangle$ ist Eigenfunktion von $\hat{n}$ zum Eigenwert $n+1$.

Normierung:

$$\langle a^+ n | a^+ n\rangle = \langle n | a a^+ | n\rangle = \langle n | a^+ a + [a,a^+] | n\rangle = (n+1)\langle n|n\rangle = n+1$$

$\longrightarrow$

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, a^+|n\rangle$$

Durch Iteration erhalten wir: $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$

$$\hat{n}\, a|n\rangle = (a\hat{n} + [\hat{n}, a])|n\rangle = a(n-1)|n\rangle$$

$\longrightarrow a|n\rangle$ ist Eigenfunktion von $\hat{n}$ zum Eigenwert $n-1$.

Normierung:

$$\langle a n | a n\rangle = \langle n | a^+ a | n\rangle = n\langle n|n\rangle = n$$

$\longrightarrow$

$$|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\, a|n\rangle$$

Behauptung: Mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ sind alle Eigenfunktionen gefunden

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen es gäbe Eigenwert $\nu = n + \alpha$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $0 < \alpha < 1$: $\hat{n}|\nu\rangle = (n+\alpha)|\nu\rangle$

$\Longrightarrow \hat{n}\; a^n|\nu\rangle = \alpha\; a^n|\nu\rangle$

$$\hat{n}\, a^{n+1}|v\rangle = \alpha(\alpha-1)\, a^{n+1}|v\rangle$$

im $\lightning$ zur Positivität der Eigenwerte.

Die Operatoren a^+, a werden auch Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren oder Leiteroperatoren genannt.

Energieeigenfunktionen:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!\sqrt{\pi}\, x_0}}\,(a^+)^n\, e^{-\frac{1}{2}y^2} \qquad y = \frac{x}{x_0} \qquad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{d}{dy}\right)$$

Vergleich mit obigem Resultat:

$$\psi_n(x) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}\, x_0}}\, H_n(y)$$

$\longrightarrow$

$$H_n(y) = e^{\frac{y^2}{2}}\left(\sqrt{2}\,a^+\right)^n e^{-\frac{y^2}{2}} = e^{\frac{y^2}{2}}\left(y - \frac{d}{dy}\right)^n e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$= e^{y^2}\underbrace{e^{-\frac{y^2}{2}}\left(y - \frac{d}{dy}\right)^n e^{\frac{y^2}{2}}}_{=(-1)^n \frac{d^n}{dy^n}} e^{-y^2} = (-1)^n e^{y^2}\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2}$$

Aufgrund der Normierung der Wellenfunktionen ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n(x)\psi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n 2^m\, n!\, m!\, \pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} H_n(y) H_m(y) = \delta_{nm}$$

$\longrightarrow$ Damit folgt unmittelbar obige Orthogonalitätsrelation für die Hermite-Polynome.

4.3 Diskussion

Schwankungsquadrate:

$$\langle x\rangle = \langle n|x|n\rangle = x_0 \langle n| \frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^+)|n\rangle = 0$$

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle = \langle n|x^2|n\rangle = \frac{x_0^2}{2}\langle n|a^2+a^{+2}+\underbrace{aa^+}_{=n+[a,a^+]=n+1}+a^+a|n\rangle = x_0^2(n+\tfrac{1}{2})$$

$$\langle p\rangle = 0$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2x_0^2}\langle n|aa^+ + a^+a|n\rangle = \frac{\hbar^2}{x_0^2}(n+\tfrac{1}{2})$$

$\longrightarrow$ $\Delta x\, \Delta p = \hbar(n+\frac{1}{2})$

$\longrightarrow$ Die Heisenbergsche Unschärferelation ist genau im Grundzustand $n=0$ saturiert.

Vergleich mit klassischem Oszillator:

$$\left.\begin{array}{l} x = A\cos\omega t \\ E = \frac{m\omega^2}{2}A^2 \end{array}\right\} \text{ wie oben mit } B=0$$

Klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeit durch Mittelung über eine Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

$$P(x)|dx| = 2\frac{|dt|}{T}$$

$$dx = -A\omega\sin\omega t\; dt = -A\omega\sqrt{1-\cos^2\omega t}\; dt = -A\omega\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\; dt$$

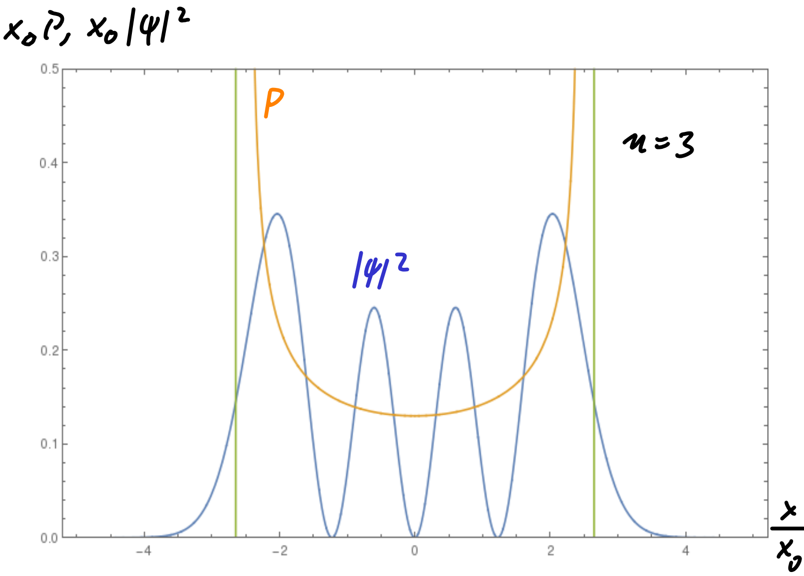
$\longrightarrow$

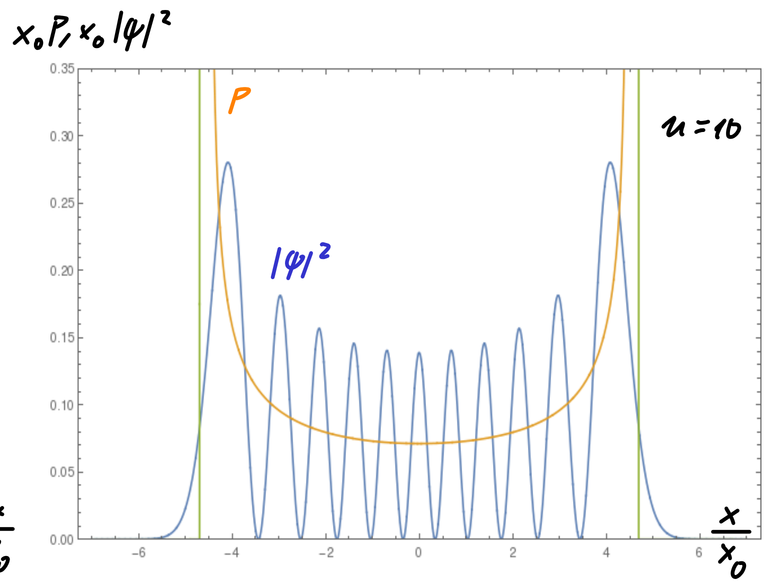
$$P(x) = \frac{1}{\pi A\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}} = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-\frac{m\omega^2x^2}{2E}}}$$

$$= \frac{1}{x_0\sqrt{2\frac{E}{\hbar\omega}}}\,\frac{1}{\pi\sqrt{1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2\frac{E}{\hbar\omega}}}}$$

$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ vgl. $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\frac{x^2}{x_0^2}$

$\longrightarrow$ klassisch verbotener Bereich für $\frac{x}{x_0} > \sqrt{2n+1}$





4.4 Kohärente Zustände

Inwiefern können wir den klassischen Grenzfall, d.h. die wohlbekannte Oszillationsbewegung erhalten? (Korrespondenzprinzip)

* Stationäre Zustände ungeeignet, da $\langle x\rangle = 0 = \text{const.}$ ist.

Jedoch ist $\langle x\rangle \neq 0$ für Eigenzustände des Vernichtungsoperators

$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$

Die $|n\rangle$ bilden vollständiges Orthonormalsystem $\longrightarrow$ entwickle in diesen: $\left(|n\rangle = \frac{a^{+n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle \right)$

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle 0|a^n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle$$

$\longrightarrow$

$$|\alpha\rangle = \mathcal{N}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = \mathcal{N}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha a^+)^n}{n!}|0\rangle$$ (kein Energieeigenzustand!)

$$= \mathcal{N} e^{\alpha a^+}|0\rangle$$

Normierung: $\langle\alpha|\alpha\rangle = \mathcal{N}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = \mathcal{N}^2 e^{|\alpha|^2} \longrightarrow \mathcal{N} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$

Zeitliche Entwicklung (vgl. Kapitel 3.6):

$$|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} |n\rangle$$

$$= e^{-i\frac{\omega t}{2}} |\alpha(t)\rangle \quad \text{mit} \quad \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t} = |\alpha| e^{-i\omega t + i\delta}$$

$\longrightarrow$ „kohärenter Zustand"

Ortsmittelwert:

$$\langle x\rangle = \langle\alpha, t|x|\alpha, t\rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle\alpha, t|a + a^+|\alpha, t\rangle$$

$$= \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\alpha(t) + \alpha^*(t)) \langle\alpha, t|\alpha, t\rangle = \sqrt{2}\, x_0 |\alpha| \cos(\omega t - \delta)$$

$\longrightarrow$ beschreibt Schwingung

Ortswellenfunktion und Aufenthaltswahrscheinlichkeit:

Wir benutzen eine Folgerung aus der Baker-Campbell-Hausdorff Formel:

Falls $[[A,B],A] = [[A,B],B] = 0 \Longrightarrow e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$

Wende dies an auf $a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - x_0 \frac{d}{dx}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} - \frac{i}{\hbar} x_0 p\right)$

$$\longrightarrow e^{\alpha(t) a^+} = e^{\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2}}\frac{x}{x_0} - \frac{i}{\hbar}\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2}} x_0 p} = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2}} x_0 p}\, e^{\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2}}\frac{x}{x_0}}\, e^{\frac{\alpha^2(t)}{4}}$$

p erzeugt eine Translation:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Delta x p} f(x) = e^{\Delta x \frac{d}{dx}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta x^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = f(x + \Delta x)$$

$\longrightarrow$

$$\psi_\alpha(x,t) = e^{-i\frac{\omega t}{2}}\, e^{-\frac{|\alpha(t)|^2}{2}}\, e^{\alpha(t) a^+}\, \psi_0(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}\, e^{-i\frac{\omega t}{2}}\, e^{-\frac{|\alpha(t)|^2}{2}}\, e^{\frac{\alpha^2(t)}{4}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2}} x_0 P}\, e^{\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2}}\frac{x}{x_0}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x_0^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}\, e^{-i\frac{\omega t}{2}}\, e^{-\frac{|\alpha(t)|^2}{2}}\, e^{-\frac{1}{4}\alpha^2(t)}\, e^{\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2}}\frac{x}{x_0}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(x - \frac{\alpha(t)}{\sqrt{2}} x_0\right)^2}{x_0^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}\, e^{-i\frac{\omega t}{2}}\, e^{\frac{\alpha^2(t) - |\alpha(t)|^2}{2}}\, e^{-\frac{1}{2x_0^2}\left(x - \sqrt{2}\,\alpha(t)\, x_0\right)^2}$$

$|\ldots|^2 \rightarrow -2\,\mathrm{Im}[a^2]$ $\qquad$ $+2\,\mathrm{Im}[a^2]$

$a^2 + a^{*2} = 2\,\mathrm{Re}[a^2] - 2\,\mathrm{Im}[a^2]$

$$|\psi_\alpha(x,t)|^2 = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{x_0^2}\left(x - \sqrt{2}\, x_0\, \mathrm{Re}[\alpha(t)]\right)^2}$$

$$= \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{x_0^2}\left(x - \sqrt{2}\, x_0\, |\alpha| \cos(\omega t - \delta)\right)^2}$$

$\longrightarrow$ Die Wellenfunktion hat die Gestalt eines Gaußschen Wellenpakets mit dem Mittelwert $\sqrt{2}\, x_0\, |\alpha| \cos(\omega t - \delta)$.

$\longrightarrow$ Das Korrespondenzprinzip bewährt sich.