

3. Formalismus der Quantenmechanik

Bisher:

- * Zustand wird durch Wellenfunktion charakterisiert
- * Operatoren wirken auf Zustände

Hier:

Identifizierte zugrundeliegende mathematische Struktur:

- Zustände als Vektoren in einem Hilbertraum
- Operatoren als lineare Abbildungen innerhalb dieses Raumes

Wir gehen hier von einem anwendungsbezogenen Standpunkt aus. Insbesondere werden wir nicht die Vollständigkeit des Hilbertraums der Quantenmechanik zeigen. Außerdem behandeln wir Zustände zu kontinuierlichen Spektren auf die für praktische Rechnungen und Probleme angebrachte Weise, während in der Funktionalanalysis oder mathematischen Physik dies im leicht geänderter Weise (Schwartz Raum) behandelt wird.

3.1 Hilbertraum

Ein Hilbertraum \mathcal{H} ist

- (1) ein reeller oder komplexer Vektorraum,
- (2) mit einem Skalarprodukt,
- (3) welches vollständig bezüglich der über das Skalarprodukt indizierten Norm ist.

Zu Punkt (1) erinnern wir an die Definition aus der linearen Algebra: Ein Vektorraum V ist eine Menge mit einer Vektoraddition $\oplus: V \times V \rightarrow V$ und einer Skalarmultiplikation $\odot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ mit Skalaren aus einem Körper \mathbb{K} .

(Für einen Hilbertraum gilt entweder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Vektorraumaxiome:

- * $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w \quad \forall u, v, w \in V$ (Assoziativität)
 - * $u \oplus v = v \oplus u \quad \forall u, v \in V$ (Kommutativität)
 - * $\exists 0 \in V$ so daß gilt: $v \oplus 0 = v \quad \forall v \in V$ (Nullvektor)
 - * zu jedem $v \in V$ existiert $(-v) \in V$ so daß gilt: $v \oplus (-v) = 0$ (inverse Vektor)
 - * $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v$ mit $\alpha \in \mathbb{K}$ & $u, v \in V$ (Distributivgesetz bzgl. Vektoraddition)
 - * $(\alpha + \beta) \odot v = \alpha \odot v \oplus \beta \odot v$ (Distributivgesetz bzgl. Addition von Skalaren)
 - * Für $1 \in \mathbb{K}$ gilt: $1 \odot v = v \quad \forall v \in V$
- Zur Unterscheidung von den Operationen $+$, \cdot in \mathbb{K} haben wir die Vektorraumoperationen umkreist. Da allerdings sich aus den Operanden stets ergibt, welche Operation gemeint ist, werden wir diese unterschiedliche Notation nicht mehr weiterverfolgen.

Nun zu Punkt (2) Skalarprodukt. Wir besprechen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (wodurch der Raum mit dem Skalarprodukt als unitärer Raum bezeichnet wird). $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt direkt als vereinfachter Fall.

- * Bezeichne die Elemente von \mathcal{H} nun als $|\alpha\rangle$ ("Dirac-Ket"), wobei α ein Index ist.
- * Bezeichne

$$|\alpha_1 + \alpha_2\rangle = |\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle \quad \text{für } |\alpha_{1,2}\rangle \in \mathcal{H}$$

$$|c\alpha\rangle = c \cdot |\alpha\rangle \equiv c|\alpha\rangle \quad \text{für } |\alpha\rangle \in \mathcal{H}, c \in \mathbb{C}$$

* Skalarprodukt: $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \longmapsto \langle\alpha|\beta\rangle \in \mathbb{C}$

Verlange folgende Eigenschaften:

* $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$ (* bedeutet komplexe Konjugation)

* $\langle\alpha|\beta_1 + \beta_2\rangle = \langle\alpha|\beta_1\rangle + \langle\alpha|\beta_2\rangle$

* $\langle\alpha|c\beta\rangle = c\langle\alpha|\beta\rangle = \langle c^*\alpha|\beta\rangle$ mit $c \in \mathbb{C}$

* $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ & $|\alpha\rangle \neq 0$ und $\langle\alpha|\alpha\rangle = 0 \iff |\alpha\rangle = |0\rangle$
wobei $|0\rangle$ der Nullvektor ist.

* Induzierte Norm: $\|\alpha\| = \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$

Beispiel 1

\mathbb{C}^m ist ein unitärer Raum. Sei $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, |\beta\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ dann ist

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i^* \beta_i$$

ein Skalarprodukt im obigen Sinne.

$$\|\alpha\| = \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i^* \alpha_i \right)^{\frac{1}{2}}$$

Beispiel 2

Fasse den Raum L^2 (quadratintegrale Funktionen) als einen kontinuierlichen Grenzfall von Beispiel 1 auf (d.h. Index $i \rightarrow$ Koordinate \vec{x}).

Es sei nun also $|\psi\rangle$ der Zustandsvektor zur Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$, $\psi(\vec{x}) \rightarrow |\psi\rangle$ und $\varphi(\vec{x}) \rightarrow |\varphi\rangle$.

* Definition des Skalarproduktes:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int d^3x \psi^*(\vec{x}) \varphi(\vec{x})$$

$$* \text{ Induzierte Norm: } \|\psi\| = \sqrt{\int d^3x |\psi(\vec{x})|^2} \equiv \|\psi\|_2$$

Die meisten der Eigenschaften als unitärer Vektorraum sind klar.

Wir prüfen noch nach: $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in L^2 \Rightarrow |\psi + \varphi\rangle \in L^2$

Benutze dazu die Dirac-Notation und beweise zunächst die Schwarzsche Ungleichung: $|\langle \varphi | \varphi \rangle| \leq \|\varphi\| \|\varphi\|$

„Parallelkomponente“ von $|\varphi\rangle$ zu $|\varphi\rangle$:

$$\frac{|\varphi\rangle \langle \varphi | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} = z |\varphi\rangle \quad \text{mit } z = \frac{\langle \varphi | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} \in \mathbb{C}$$

Orthogonal: $|\xi\rangle = (|\varphi\rangle - z|\varphi\rangle)$

$$\rightarrow \langle \varphi | \xi \rangle = 0 \quad \text{und} \quad |\varphi\rangle = z|\varphi\rangle + |\xi\rangle$$

Berechne nun:

$$\|\varphi\|^2 = \|z\varphi + \xi\|^2 = \langle z\varphi + \xi | z\varphi + \xi \rangle$$

$$= |z|^2 \langle \varphi | \varphi \rangle + \langle \xi | \xi \rangle + \underbrace{z^* \langle \varphi | \xi \rangle + z \langle \xi | \varphi \rangle}_{=0} \geq |z|^2 \langle \varphi | \varphi \rangle$$

$$\rightarrow \|\varphi\|^2 \geq \frac{|\langle \varphi | \varphi \rangle|^2}{\|\varphi\|^2} \quad \text{woraus die Behauptung folgt.}$$

Mittels der Dreiecksungleichung $\|\psi + \varphi\| \leq \|\psi\| + \|\varphi\|$ folgt die Normierbarkeit von $|\psi + \varphi\rangle$ und so $|\psi + \varphi\rangle \in L^2$.

Beweis der Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|\psi + \varphi\|^2 &= \|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2 + \underbrace{\langle \psi | \varphi \rangle + \langle \varphi | \psi \rangle}_{= 2 \operatorname{Re} [\langle \psi | \varphi \rangle]} \leq \|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2 + 2 |\langle \psi | \varphi \rangle| \\ &= 2 \operatorname{Re} [\langle \psi | \varphi \rangle] \end{aligned}$$

$$\leq \|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2 + 2 \|\psi\| \|\varphi\| \quad \text{und wir gelangen zur Behauptung.}$$

□ Schwarz

Zu (3) merken wir an: Vollständigkeit bedeutet, daß jede Cauchy Folge (Abstand der Folgenglieder wird kleiner und letztlich beliebig klein) bezgl. der Norm innerhalb von \mathcal{H} konvergiert.

Beispiel

$$\begin{array}{lll} x_1 = 3 & x_3 = 3,14 & x_5 = 3,1415 \dots \\ x_2 = 3,1 & x_4 = 3,141 & x_6 = 3,14159 \end{array}$$

Es gilt also $x_i \in \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen), jedoch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pi \notin \mathbb{Q} \text{ jedoch } \pi \in \mathbb{R}$$

Der Körper \mathbb{Q} ist im Gegensatz zu \mathbb{R} also nicht vollständig.
(Anmerkung: \mathbb{R} ist als Spezialfall von \mathbb{R}^n damit sowohl ein vollständiger Körper als auch ein Hilbertraum).

- * Nachweis der Vollständigkeit von L^2 ist technisch schwierig und bedarf des Konzepts des Lebesgue-Integrals zur Erfassung pathologischer Fälle.
→ Wir führen hier keinen Beweis.
- * Quadratintegrierbare Wellenfunktionen, welche Wahrscheinlichkeitsinterpretation zulassen, bilden also den Hilbertraum L^2 .
- * Schrödinger-Gleichung 1. Ordnung in t → Wellenfunktion charakterisiert den quantenmechanischen Zustand eines Partikels. Eine Eigenchaft ist Impuls (Spin).
- * Ordne Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ abstrakten Zustandsvektor $| \psi \rangle$ zu:
 $\psi(\vec{x}, t) \leftrightarrow | \psi \rangle$. Unterdrückte Zeitargument im Folgenden.

Wir werden schließlich fünf Postulate der Quantenmechanik identifizieren. Die Überlegungen hier führen zum I. Postulat:

Der quantenmechanische Zustand eines Systems wird durch einen Zustandsvektor in einem separablen Hilbertraum \mathcal{H} beschrieben.

Anmerkung: L^2 ist der Hilbertraum für die Ortswellenfunktion (∞ -dimensional).

Weitere Eigenschaften von Teilchen → weitere geeignete Hilberträume verschieden von L^2
(z.B. Spin)

→ Kombination mehrerer Eigenschaften oder mehrerer Teilchen mittels Tensorprodukt (wird noch eingeführt).

Ggf. interessieren wir uns nicht für die genaue Ortswellenfunktion.

Kann z.B. ein Teilchen (räumungsweise) nur zwei verschiedene Positionen annehmen, dann ist \mathbb{C}^2 ein geeigneter Hilbertraum.

|Teilchen in Position 1> $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, |Teilchen in Position 2> $\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Anmerkung zum Begriff „separabel“:

Def.: eine Untermenge $M \subset \mathbb{C}^n$ heißt dicht in \mathbb{H} , falls \mathbb{H} die Menge aller aus M gebildeten Grenzwerte ist.

Def.: Gibt es abzählbare Untermengen, die dicht sind, dann heißt \mathbb{H} separabel.

Wie bei der Vollständigkeit übergehen wir hier den Beweis der Separabilität von L^2 .

Basisssysteme

Weiterhin: Separabilität $\Rightarrow \exists \{|\alpha_i\rangle\}$ so daß für jedes $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$ gilt: $\hookrightarrow = \{|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, |\alpha_3\rangle, \dots\}$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\alpha_i\rangle \quad \text{mit} \quad c_i = \langle \alpha_i | \psi \rangle$$

Gilt weiterhin $\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ (Orthonormalitätsrelation)

dann ist $\{|\alpha_i\rangle\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem.
„Orthonormalbasis“)

Die Existenz der Entwicklung für beliebige $|\psi\rangle$ ist äquivalent zu

$$\sum_i |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i | = \mathbb{I} \quad (\text{Vollständigkeitsrelation}) \quad \text{mit } \mathbb{I} |\varphi\rangle = |\varphi\rangle, \text{ da}$$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\alpha_i\rangle = \sum_i |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i | \psi \rangle = \underline{\underline{|\psi\rangle}}.$$

3.2 Dualraum

- * Bisher ist $\langle \psi |$ nur im Skalarprodukt aufgetreten.
- * Eigenständige Definition nicht notwendig aber oft nützlich.

Betrachte lineare Funktionale $F_\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$
 $F_\varphi : |\psi\rangle \mapsto \langle \varphi | \psi \rangle$

wobei linear heißt:

$$F_\varphi(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) = c_1 F_\varphi(|\psi_1\rangle) + c_2 F_\varphi(|\psi_2\rangle)$$

mit $c_{1,2} \in \mathbb{C}$ und $|\psi_{1,2}\rangle \in \mathcal{H}$

Der Dualraum ist $\mathcal{H}^* = \{F_\varphi\}$. Dieser ist selbst ein Vektorraum, da

$$F_{\varphi_1 + \varphi_2}(|\psi\rangle) = F_{\varphi_1}(|\psi\rangle) + F_{\varphi_2}(|\psi\rangle)$$

$$F_{c\varphi}(|\psi\rangle) = c^* F_\varphi(|\psi\rangle)$$

selbst in \mathcal{H}^* sind.

Der Dirac-Bra ist dann $\langle \varphi | = F_\varphi$.

3.3 Kontinuierliche Basiszustände

Oberge Entwicklung von Zuständen in einer abzählbaren Basis funktioniert nicht für alle wichtigen Anwendungen.

Beispiel aus Abschnitt 1.2.6:

$$\psi(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \varphi(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}}$$

↓ ↓ →
 nicht Koeffizient Orthonormalsystem
 abzählbar

Problem: $e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \notin L^2$

Mathematische Physik: verwende an Stelle von L^2 den sogenannten Schwartz-Raum.

Anwendungsbezogene, pragmatische Lösung: Verlange in diesen Fällen keine Separabilität und erweitere Hilbertraum um nicht abzählbare Basis. Definiere dazu zunächst die

Ortsbasis:

Eigenfunktion zum Operator \vec{x} mit Eigenwert \vec{x}' :

$$\psi_{\vec{x}'}(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \iff \vec{x} \psi_{\vec{x}'}(\vec{x}) = \vec{x}' \psi_{\vec{x}'}(\vec{x})$$

Zuordnung von Eigenvektor: $\psi_{\vec{x}'} \rightarrow |\vec{x}'\rangle$

\Rightarrow Orthonormalität & Vollständigkeit:

$$\langle \vec{x}' | \vec{x}'' \rangle = \int d^3x \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'') = \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}'')$$

Ortswellenfunktion:

$$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle = \int d^3x \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) \psi(\vec{x}')$$

Noch einmal Vollständigkeitsrelation:

$$\int d^3x \langle \xi | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \xi \rangle = \int d^3x \xi^*(\vec{x}) \xi(\vec{x}) = \langle \xi | \xi \rangle$$

$$\Rightarrow \int d^3x | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | = 1$$

Zustand aus Wellenfunktion:

$$|\psi\rangle = \int d^3x | \vec{x} \rangle \psi(\vec{x}) = \int d^3x | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \psi \rangle$$

Fazit:

Dem abstrakten Zustand $|\psi\rangle$ kann eine Ortswellenfunktion $\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle$ zugeordnet werden und umgekehrt, $\psi(\vec{x}) \leftrightarrow |\psi\rangle$. Die Ortswellenfunktion kann als nicht abzählbare Menge von „Entwicklungscoeffizienten“ in der kontinuierlichen Basis $\{|\vec{x}\rangle\}$ aufgefasst werden.

Impulsbasis:

Definiere $|\vec{p}\rangle$ durch Ortswellenfunktion des Impulseigenzustands:
 $\langle \vec{x} | \vec{p}\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}}$

Orthonormalität:

$$\langle \vec{p}' | \vec{p}\rangle = \int d^3x \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \vec{p}' \rangle = \int d^3x e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{x}} = (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

Impulswellenfunktion aus Zustand $|\psi\rangle$:

$$\varphi(\vec{p}) = \int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \psi(\vec{x}) = \int d^3x \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \psi \rangle = \langle \vec{p} | \psi \rangle$$

\hookrightarrow Vollst. von $|\vec{x}\rangle$

Vollständigkeit:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \langle \xi | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \xi \rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \xi^*(\vec{x}) \int d^3x' e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}'} \xi(\vec{x}') \\ &= \int d^3x \int d^3x' \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \xi^*(\vec{x}) \xi(\vec{x}') = \int d^3x \xi^*(\vec{x}) \xi(\vec{x}) = \langle \xi | \xi \rangle \\ \Rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| &= 1 \end{aligned}$$

bezw. $\int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}}}_{=\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle} \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}'}}_{=\langle \vec{p} | \vec{x}' \rangle} = \langle \vec{x} | \vec{x}' \rangle = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$

Zustand $|\psi\rangle$ aus Impulswellenfunktion:

$$|\psi\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \varphi(\vec{p}) |\vec{p}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p} | \psi \rangle$$

Wir können also kontinuierliche, vollständige Orthonormal=systeme folgendermaßen spezifizieren:

$$|\beta\rangle = \int \frac{d\varepsilon}{\mathcal{N}} b(\varepsilon) |\varepsilon\rangle$$

mit $b(\varepsilon) = \langle \varepsilon | \beta \rangle$ und $\langle \varepsilon' | \varepsilon \rangle = \mathcal{N} \delta(\varepsilon - \varepsilon')$

Obrige Rechnung für $|\vec{p}\rangle$ ergibt sich dann als Verallgemeinerung auf drei Dimensionen.

Anmerkung: In Systemen mit gebundenen und ungebundenen Zuständen haben die vollst. Orthonormalsysteme sowohl abzählbare als auch kontinuierliche Anteile.

Die Definition der Basis wird von manchen Autoren so vorgenommen, daß stets $N=1$ ist. Wir halten es hier für nützlicher, aus die Freiheit zu nehmen, N von Fall zu Fall festzulegen.

Zusammenfassung

Ortswellenfunktion, Impulswellenfunktion und auch die Entwicklungskoeffizienten im abzählbaren Basen sind verschiedene Darstellungen eines abstrakten Zustands $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned} & \text{* Ortswellenfunktion: } \psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle \leftrightarrow |\psi\rangle = \int d^3x \psi(\vec{x}) |\vec{x}\rangle \quad \left. \begin{array}{l} \text{kontinu-} \\ \text{istische} \\ \text{Basis} \end{array} \right\} \\ & \text{* Impulswellenfunktion: } \varphi(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \psi \rangle \leftrightarrow |\psi\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \varphi(\vec{p}) |\vec{p}\rangle \quad \left. \begin{array}{l} \text{kontinu-} \\ \text{istische} \\ \text{Basis} \end{array} \right\} \\ & \text{* Entwicklungskoeffizienten: } c_n = \langle n | \psi \rangle \quad \left. \begin{array}{l} \text{abzählbare} \\ \text{Basis} \end{array} \right\} \\ & \qquad \leftrightarrow |\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \psi \rangle = |\psi\rangle \end{aligned}$$

3.4 Lineare Operatoren

Def.: Operator $A : D_A \rightarrow W_A$ mit $D_A, W_A \subseteq \mathcal{H}$
 $A : |\alpha\rangle \mapsto |\beta\rangle$ ↓
Defitions- Wertebereich

Def.: linearer Operator

$$A(c_1|\alpha_1\rangle + c_2|\alpha_2\rangle) = c_1 A|\alpha_1\rangle + c_2 A|\alpha_2\rangle \quad \forall |\alpha_{1,2}\rangle \in D_A, c_{1,2} \in \mathbb{C}$$

Die für die Quantenmechanik relevanten Operatoren sind linear.

Def.: Zu A adjungierter Operator A^+ hat die Eigenschaft:
 $\langle \psi | A \varphi \rangle = \langle A^+ \psi | \varphi \rangle$ für $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ beliebig.

Def.: Gilt $a_n |n\rangle = A |n\rangle$ dann ist $|n\rangle$ ein Eigenvektor (Eigenzustand) von A und a_n ist der zugehörige Eigenwert.

Bemerkungen

- * $\langle \psi | AB \varphi \rangle = \langle (AB)^+ \psi | \varphi \rangle = \langle A^+ \psi | B \varphi \rangle = \langle B^+ A^+ \psi | \varphi \rangle \implies (AB)^+ = B^+ A^+$
- * $\langle \psi | A \varphi \rangle = \langle A^+ \psi | \varphi \rangle = \langle \psi | A^+ \varphi \rangle^* = \langle (A^+)^t \psi | \varphi \rangle^* = \langle \psi | (A^+)^t \varphi \rangle$
 $\implies (A^+)^t = A$

Schreibweise: $\langle \psi | A | \varphi \rangle := \langle \psi | A \varphi \rangle = \langle A^+ \psi | \varphi \rangle$

Def.: A heißt hermitesch oder selbstadjungiert, wenn $A^+ = A$.

Beispiele:

Der Ortsoperator ist hermitesch, denn

$$\langle \psi | \vec{x} \varphi \rangle = \int d^3x \times \psi^*(\vec{x}) \vec{x} \varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} \psi | \varphi \rangle = \int d^3x \times \vec{x} \psi^*(\vec{x}) \varphi(\vec{x})$$

Der Impulsoperator ist hermitesch:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \vec{p} \varphi \rangle &= \int d^3x \times \psi^*(\vec{x}) \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) \\ &= \langle \vec{p} \psi | \varphi \rangle = \int d^3x \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi(\vec{x}) \right)^* \varphi(\vec{x}) = - \int d^3x \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi^*(\vec{x}) \right) \varphi(\vec{x}) \\ &= \int d^3x \times \psi^*(\vec{x}) \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}) \end{aligned}$$

P.I.

Mit obiger Bemerkung folgt sofort: Der Hamiltonoperator ist hermitesch.

In den folgenden allgemeinen Diskussionen verwenden wir abzählbare Basissysteme. Die Resultate lassen sich aber leicht auf kontinuierliche Basen übertragen.

Ein hermitischer Operator A hat folgende wichtige Eigenschaften:

(1) Die Erwartungswerte sind reell:

$$\langle \alpha | A | \beta \rangle = \langle A^\dagger \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | A^\dagger \alpha \rangle^* = \langle \beta | A | \alpha \rangle^*$$

Mit $|\beta\rangle = |\alpha\rangle$ folgt die Behauptung.

(2) Die Eigenwerte sind reell:

$$\alpha | \alpha \rangle = A | \alpha \rangle \implies \alpha \langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle \implies \alpha = \frac{\langle \alpha | A | \alpha \rangle}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$$

(3) Die Eigenzustände sind orthogonal:

$a_m | n \rangle = A | n \rangle$ und nehmen zunächst an, daß
 $a_n - a_m \neq 0$ für $n \neq m$ (keine Entartung)

$$\begin{aligned} \langle m | A | n \rangle &= a_m \langle m | n \rangle = \langle A m | n \rangle = \langle n | A | m \rangle^* \\ &= a_m^* \langle n | m \rangle^* = a_m \langle m | n \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a_n - a_m) \langle m | n \rangle = 0 \xrightarrow{a_n \neq a_m} \langle m | n \rangle = 0$$

Falls zu einem Eigenwert mehrere Eigenzustände existieren (d.h. $a_n = a_m$ für mehrere $n \neq m$), so bilden wir

$$\begin{aligned} \langle m | n \rangle &= c_{mn} \\ \langle n | m \rangle &= c_{mn}^* \end{aligned} \xrightarrow{\text{C ist hermitisch}} C \text{ ist hermitisch } (C^\dagger = (C^*)^T \downarrow \text{Transposition})$$

Aus der linearen Algebra ist bekannt: \exists unitäre Matrix U (d.h. $U^\dagger U = \mathbb{1}$) so daß $C_d = U^\dagger C U$ diagonal ist.

$$\sum_{\tau, s} U_{mr}^* \langle \tau | s \rangle U_{sn} = [U^\dagger C U]_{mn} = C_{dmn} \delta_{mn}$$

$$\text{Definiere nun } |m'\rangle = \sum_{\tau} |\tau\rangle U_{\tau m}$$

$$\langle m' | = \sum_{\tau} \langle \tau | U_{\tau m}^* = \sum_{\tau} U_{\tau m}^* \langle \tau |$$

Diese Eigenzustände (zu den gleichen entarteten Eigenwerten)

sind damit orthogonal:

$$\langle m' | n' \rangle = \sum_{rs} U_{mr}^* \langle r | s \rangle U_{sn} = \text{Column } S_{mn}$$

(4) Die Eigenzustände sind vollständig, d.h. wir können ein vollständiges Orthonormalsystem bilden. (Es gelten die obigen Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelationen in allen abzählbaren oder kontinuierlichen Varianten.)

Wir führen dieses wichtige Theorem ohne Beweis an und verweisen dazu auf die lineare Algebra.

Die Tatsache, daß hermitische Operatoren reelle Erwartungswerte haben, entspricht der Erfahrung, daß wir experimentell nur reelle Größen messen.

Sei A wieder hermitisch und drücke den Erwartungswert explizit durch die Eigenwerte an aus:

$$a_n |n\rangle = A |n\rangle, |\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, c_n = \langle n | \psi \rangle$$

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_{nm} c_n^* c_m \langle n | A | m \rangle = \sum_n |c_n|^2 a_n \langle n | n \rangle = \sum_n |c_n|^2 \langle n | A | n \rangle$$

Weiterhin ergibt sich für normierte Zustände ($\langle n | n \rangle = \delta_{nn}$)

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_n |c_n|^2 a_n$$

$$\sum_n \langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbb{1} | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_n |c_n|^2 = 1$$

→ Wir können $|c_n|^2$ als Wahrscheinlichkeit, das System im Zustand $|n\rangle$ zu finden bzw. bei Messung von $\langle A \rangle$ den Wert an zu finden, interpretieren. (Die Gesamt-wahrscheinlichkeit ist dabei konsistenterweise gleich eins.)

Diese Überlegungen führen zu drei weiteren Postulaten, nämlich

- II. Maßgrößen entsprechen hermitischen Operatoren A , III.
Erwartungswerte sind durch $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ gegeben und
IV. bei Messung von a_m geht das System in $|m\rangle$ über.
(IV. postuliert die Schrödinger-Gleichung).

Bemerkungen:

- * Punkt IV. postuliert den „Kollaps“ der Wellenfunktion durch einen Eingriff von außen (Messung). Diese Wechselwirkung wird nicht wellenmechanisch beschrieben und es stellt sich die bereits erwähnte Frage nach der Trennung zwischen Quantensystem und dem klassischen Beobachter („Demarcationsproblem“, vgl. 1.2.8).
Wir fassen den „Kollaps“ als eine mathematisch konsistente Weise auf, die experimentell gemessenen Wahrscheinlichkeiten theoretisch vorherzusagen. Auf die weitere Interpretation gehen wir zunächst nicht ein.
- * Praktisch wird $\langle A \rangle$ durch wiederholte Messungen durch Bildung des Mittelwerts bestimmt. Dabei ist das Quantensystem stets im gleichen Anfangszustand $|\psi\rangle$ zu präparieren.

3.5 Bemerkungen zu Operatoren

Dyadiisches Produkt

Für $|\alpha, \beta\rangle \in \mathcal{H}$ ist $D_{\alpha\beta} = |\alpha\rangle \langle \beta|$ ein linearer Operator, ebenso Summen aus dyadiischen Produkten.

Beispiel: Ist $|n\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem und X ein Operator, dann lässt dieser sich folgendermaßen darstellen:

$$X = X \mathbb{1} = \sum_n X |n\rangle \langle n| = \sum_n |X_n\rangle \langle n| \quad \text{mit} \quad |X_n\rangle := X |n\rangle$$

Inverser Operator

Ist $|\beta\rangle = A|\alpha\rangle$ dann ist A^{-1} mit $A^{-1}|\beta\rangle = |\alpha\rangle \quad \forall |\alpha\rangle \in D_A$ und $|\beta\rangle \in W_A$ der inverse Operator zu A .

$$\langle \beta | \beta \rangle = \langle \beta | A\alpha \rangle = \langle \beta | AA^{-1}|\beta \rangle \implies AA^{-1} = \underline{1}$$

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \alpha | A^{-1}\beta \rangle = \langle \alpha | A^{-1}A|\beta \rangle \implies A^{-1}A = \underline{1}$$

Unitäre Operatoren

Wie im der linearen Algebra ist die definierende Eigenschaft $U^+U = UU^+ = \underline{1} \iff U^+ = U^{-1}$

Verwendung in Basis transformationen:

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$$

$$A' = UAU^+$$

→

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \psi' | A' | \psi' \rangle = \langle \psi | U^+ U A U U^+ | \psi \rangle$$

→ Unitäre Transformationen lassen Observable invariant. Weiterhin erinnern wir daran, dass sich hermitische Operatoren mittels unitärer Transformation diagonalisieren lassen, was von großer praktischer Bedeutung ist.

Funktionen von Operatoren

Für eine Funktion mit Potenzreihenentwicklung:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

lässt sich (sofern Konvergenz gewährleistet ist) die Funktion eines Operators A bilden als:

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

Transformationen zwischen Basisystemen

Sei A hermitesch und $\{|n\rangle\}$ die Menge der normierten Eigenzustände mit $a_m |n\rangle = A |n\rangle$ und $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$.

Entsprechend sei $\{|n'\rangle\}$ ein Basisystem zu hermiteschem A' . Aufgrund der Vollständigkeit können wir entwickeln:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_{n'} d_{n'} |n'\rangle$$

und außerdem

$$|n'\rangle = \sum_m U_{n'm} |m\rangle$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass U unitär ist, was wir hier noch einmal explizit zeigen:

$$\langle \tau | n' \rangle = \sum_m U_{n'm} \underbrace{\langle \tau | m \rangle}_{= S_{\tau m}} = U_{n' \tau} \rightarrow U_{\tau n'}^+ = \langle n' | \tau \rangle$$

Damit:

$$\sum_{\tau} U_{n' \tau} U_{\tau n'}^+ = \sum_{\tau} \langle n' | \tau \rangle \langle \tau | n' \rangle = \langle n' | \underbrace{11}_{\text{Vollständigkeit}} | n' \rangle = 11_{n' n'}$$

Für die Entwicklungskoeffizienten gelten damit folgende Transformationen:

$$d_{n'} = \langle n' | \psi \rangle = \langle n' | \sum_{m'} c_{m'} |m'\rangle = \langle n' | \sum_{\tau} c_{\tau} | \tau \rangle = \sum_{\tau} c_{\tau} U_{\tau n'}^+$$

$$c_n = \langle n | \psi \rangle = \langle n | \sum_m c_m |m\rangle = \langle n | \sum_{s'} d_{s'} |s'\rangle = \sum_{s'} d_{s'} U_{s'n}$$

3.6 Zeitentwicklung

Wir gehen hier nochmals auf die Schrödinger-Gleichung (Postulat IV), nun im Rahmen des Dirac-Formalismus, ein:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle$$

Für zeitabhängige H ergibt sich die formale Lösung:

$$|\psi, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} |\psi, t_0\rangle \equiv U(t, t_0) |\psi, t_0\rangle$$

(Für zeitabhängige H muss insbesondere berücksichtigt werden, daß i. A. $[H(t), H(t')] \neq 0$ für $t \neq t'$).

Wir sehen (Potenzreihe des Exponentials), daß

$$U^+(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} = U^{-1}(t, t_0)$$

U ist also unitär, was so sein sollte aufgrund der Wahrscheinlichkeitserhaltung:

$$\langle \psi, t | \psi, t \rangle = \langle \psi, t_0 | U^+(t, t_0) U(t, t_0) |\psi, t_0 \rangle = \langle \psi, t_0 | \psi, t_0 \rangle$$

Heisenbergzustand:

$$|\psi\rangle_H = U^+(t, t_0) |\psi, t\rangle \equiv |\psi, t_0\rangle \longrightarrow \text{zeitabhängig}$$

Heisenbergoperator:

$$A_H(t) = U^+(t, t_0) A U(t, t_0) \longrightarrow \text{zeitabhängig}$$

Es folgt die Heisenberg-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} A_H(t) = \frac{d}{dt} e^{\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} A e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)} = \frac{i}{\hbar} [H, A_H(t)]$$

(für zeitunabhängiges A)

Die Erwartungswerte sind unabhängig vom gewählten Bild:

$$\langle A \rangle = \langle \psi, t | A | \psi, t \rangle = {}_H \langle \psi | A_H | \psi \rangle_H = \langle \psi, t | U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0) U^\dagger(t, t_0) | \psi, t \rangle$$

Fazit: Die Zeitentwicklung ist unitär. Es existiert neben (dem im dieser Vorlesung verwendeten) Schrödingerbild das äquivalente Heisenbergbild.

Sofern im Schrödingerbild für ein bestimmtes System die Operatoren zeitunabhängig sind, sind die Zustände zeitabhängig. Dies ist dann umgekehrt im Heisenbergbild: dort sind die Zustände zeitunabhängig und die Operatoren zeitabhängig.

Wir fassen nun unsere Überlegungen und Entwicklungen zusammen:

3.7 Postulate der Quantenmechanik

- I. Der quantenmechanische Zustand eines Systems wird durch einen Zustandsvektor in einem Hilbertraum \mathcal{H} beschrieben.
- II. Physikalische Messgrößen entsprechen hermitischen Operatoren A .
- III. Erwartungswerte von A sind gegeben durch $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ und beschreiben den Mittelwert vieler Messungen am jeweils gleich präparierten Zustand $|\psi\rangle$.
- IV. Die Zeitentwicklung des Zustands ist gegeben durch die Schrödingergleichung
 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle.$
- V. Wird bei einer Messung der Eigenwert a festgestellt ($a|n\rangle = A|n\rangle$), dann geht der Zustand in $|n\rangle$ über.

3.8 Unschärferelation

Als erste Anwendung des Formalismus verschaffen wir uns die allgemeine Fassung der Heisenbergschen Unschärferelation.

Gegeben: hermitische Operatoren $H_{1,2}$ und Zustand $|\psi\rangle$

Definiere: $\delta H_i = H_i - \langle H_i \rangle = H_i - \langle \psi | H_i | \psi \rangle$

Schwarzsche Ungleichung \longrightarrow

$$\langle \delta H_1 \psi | \delta H_1 \psi \rangle \langle \delta H_2 \psi | \delta H_2 \psi \rangle \geq |\langle \delta H_1 \psi | \delta H_2 \psi \rangle|^2$$

$$\rightarrow \langle \psi | \delta H_1^2 | \psi \rangle \langle \psi | \delta H_2^2 | \psi \rangle \geq |\langle \psi | \delta H_1 \delta H_2 | \psi \rangle|^2$$

$$\delta H_1 \delta H_2 = \frac{1}{2} \{ \delta H_1, \delta H_2 \} + \frac{1}{2} [\delta H_1, \delta H_2] \quad (\text{Antikommutator: } AB + BA = \{A, B\})$$

Bemerk:

$$\{\delta H_1, \delta H_2\}^t = \{\delta H_1, \delta H_2\}, \quad [\delta H_1, \delta H_2]^t = -[\delta H_2, \delta H_1]$$

\longrightarrow hermitisch

\longrightarrow antihermitsch

\longrightarrow

$$|\langle \psi | \delta H_1 \delta H_2 | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{4} \underbrace{\langle \psi | \{\delta H_1, \delta H_2\} | \psi \rangle}_\text{real}^2 + \frac{1}{4} \underbrace{|\langle \psi | [\delta H_1, \delta H_2] | \psi \rangle|}_\text{imaginär}^2$$

Mit $[\delta H_1, \delta H_2] = [H_1, H_2]$ folgt

$$|\langle \psi | \delta H_1 \delta H_2 | \psi \rangle|^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \psi | [H_1, H_2] | \psi \rangle|^2$$

Schwankungsquadrat: $(\Delta H_i)^2 = \langle \psi | (H_i - \langle H_i \rangle)^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \delta H_i^2 | \psi \rangle$

Kombination der beiden Ungleichungen ergibt die allgemeine Form der Heisenbergschen Unschärferelation

$$\Delta H_1 \Delta H_2 \geq \frac{1}{2} |\langle [H_1, H_2] \rangle|$$

Überprüfung des bekannten Spezialfalls (Orts-Impulsunscharfe):

$$H_1 = x_i, \quad H_2 = p_j, \quad [x_i, p_j] = i \hbar \delta_{ij}$$

\longrightarrow

$$\Delta x_i \Delta p_j \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij}$$

3.9 Korrespondenzprinzip und Ehrenfest'sches Theorem

- * Quanteneffekte sind Konsequenz der Existenz des Wirkungsquantums \hbar .
- * Ist die Wirkung eines Prozesses $\gg \hbar$ (oder umgedreht im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$), sollte die Newtonsche Mechanik als Grenzfall hervorgehen.
→ Quantenmechanik beansprucht, die fundamentale Theorie zu sein.

Fragestellung: Wie können wir klassischen Observablen ihre korrespondierenden (hermitischen) quantenmechanischen Operatoren zuordnen? → Korrespondenzprinzip

Ausgehend von $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{v}$ haben wir im Kapitel 7 bereits eine Korrespondenzregel verwendet:

klassisch:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

quantenmechanisch $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}) \right] |\psi, t\rangle$

Die zugrundeliegende Regel lautet also

- ersetze klassische Gleichung durch Gleichung mit Differentialoperatoren, welche auf Wellenfunktion wirken.
- ersetze klassische Funktion $A(q_i, p_i, t)$ durch Operator $A(q_i, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_i}, t)$

\downarrow \hookrightarrow kan. konjugierter Impuls
generalisierte Ortskoordinate

- ersetze $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

Daneben gibt es eine allgemeinere
Korrespondenzregel mit Poissonklammern

Bewegungsgleichung in generalisierten Koordinaten:

$$\frac{d}{dt} A(q_i, p_i, t) = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

mit der Poisson-Klammer:

$$\{f, g\} = \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right]$$

Fundamentale Poisson-Klammern sind:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

Aus der Bewegungsgleichung folgt:

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\} \quad \text{und} \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}$$

Es sollen nun A, B, C auf der einen Seite klassische Funktionen der generalisierten Koordinaten und Impulse sein, auf der anderen Seite quantenmechanische Operatoren.

Es gilt folgende Zuordnungsregel:

klassisch quantenmechanisch

$$\{A, B\} = C \iff \{A, B\}_{QM} = C$$

Die Vorschrift $\{A, B\}_{QM}$ kann nicht gleich der klassischen Poissonklammer sein. Stattdessen ergibt sich die Korrespondenz mit $\{A, B\}_{QM} = -\frac{i}{\hbar} [A, B]$, also

$$\{A, B\} = C \iff [A, B] = i\hbar C$$

Überprüfe die Regel anhand der fundamentalen Poisson-Klammern:

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij} \iff [x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

Bemerkung: In der Tat könnte man von der klassischen Lagrangefunktion ausgehen und aufgrund der Poisson-Klammer den Kommutator fordern. Mit der bekannten Form \vec{x}^i für den Ortsoperator führt dies automatisch zu $\vec{p}^i = \frac{i\hbar}{\imath} \vec{\nabla}^i$. Dieses Verfahren nennt man kanonische Quantisierung. In verallgemeinerter Form ist es in der Quantenfeldtheorie von grundlegender Bedeutung.

Zur genaueren Charakterisierung der aus der Korrespondenz folgenden Bewegungsgleichungen dient das Ehrenfestsche Theorem:

Benutze dazu die Schrödinger-Gleichung und deren hermitische Konjugation:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle \quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi, t | = \langle \psi, t | H$$

Mit $\langle A \rangle = \langle \psi, t | A | \psi, t \rangle$ folgt

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi, t | \right) A | \psi, t \rangle + \langle \psi, t | \left(\frac{\partial}{\partial t} A \right) | \psi, t \rangle + \langle \psi, t | A \frac{\partial}{\partial t} | \psi, t \rangle$$

und wir erhalten das Ehrenfestsche Theorem

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle \text{ (vgl. obige klass. Gleichung für } A)$$

Beispiel: Anwendung auf \vec{x}^i und \vec{p}^i

Benutze aus 1.2.7 die Kommutatoren

$$[H, x_i] = -\frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} x_i + x_i \frac{\hbar^2 \vec{\nabla}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{m} \nabla_i = -i \frac{\hbar}{m} p_i$$

$$[H, p_i] = V(\vec{x}) \frac{\hbar}{i} \nabla_i - \frac{\hbar}{i} \nabla_i V(\vec{x}) = i \hbar \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i}$$

Damit folgt:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{x} \rangle = \frac{1}{m} \langle \vec{p} \rangle \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle = -\langle \vec{\nabla} V(\vec{x}) \rangle$$

$$\rightarrow \text{in Kombination: } m \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{x} \rangle = -\underbrace{\langle \vec{\nabla} V(\vec{x}) \rangle}_{\text{Kraft}},$$

Die klassischen Gleichungen gelten also für die Mittelwerte.

Allerdings: $\langle \vec{x} \rangle$ und $\langle \vec{p} \rangle$ folgen nicht den klassischen Trajektorien, da i.A. $-\vec{\nabla} V(\vec{x}) \neq -\langle \vec{\nabla} V(\vec{x}) \rangle$

Die klassische Näherung ist umso besser gültig, je genauer das Wellenpaket lokalisiert ist – vergleiche dazu die Abschätzungen in Abschnitt 1.2.5.