

2. Einfache eindimensionale Probleme

Bevor wir die Ergebnisse aus Kapitel 1 in einen abstrakteren aber auch allgemeineren und vielseitig anwendbaren Formalismus einbetten wollen wir noch etwas Intuition entwickeln.

Wir betrachten dazu grundlegende Beispiele zur Lösung der Schrödinger-Gleichung in eindimensionalen Potentialen.

2.1 Vorüberlegungen

eindimensionale Schrödinger-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right)}_H \psi(x, t)$$

zeitunabhängiger Fall: $\psi(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} Et}$ $\rightarrow E \psi(x) = H \psi(x)$
 \rightarrow Eigenwertproblem

Bezeichne Menge der Eigenwerte $\{E\}$ als Spektrum.

Stetigkeitsbedingungen:

Falls $V(x)$ stetig ist oder höchstens endliche Unstetigkeiten aufweist dann folgt wegen ($f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$)

$$\psi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \psi(x)$$

dass $\psi''(x)$ höchstens endliche Unstetigkeiten hat

\Rightarrow

$\psi(x)$ und $\psi'(x)$ sind stetig

Parität:

Häufig haben wir es mit paritätssymmetrischen (Spiegel=

symmetrischen) Potentiauen zu tan: $V(x) = V(-x)$

→ es folgt dann auch: $H(x) = H(-x)$

Definiere Paritätsoperator:

$$P f(x) := f(-x)$$

Im spiegelsymmetrischen Fall ist

$$P H(x) \psi(x) = H(-x) \psi(-x) = H(x) \psi(-x) = H(x) P \psi(x)$$

$$\Rightarrow [H, P] = 0$$

Sei ψ Eigenfunktion von P zum Eigenwert $\alpha \rightarrow$

$$P \psi(x) = \psi(-x) = \alpha \psi(x) \rightarrow$$

$$P^2 \psi(x) = \psi(x) = \alpha^2 \psi(x) \Rightarrow \alpha = \pm 1$$

Wir bezeichnen:

$\alpha = +1$ „gerade“ Parität \iff symmetrische Wellenfunktion

$\alpha = -1$ „ungerade“ Parität \iff antisymmetrische Wellenfunktion

Betrachte nun Eigenfunktion von H mit $[H, P] = 0$: $H(x) \psi(x) = E \psi(x)$

$$\rightarrow 0 = (H(x) - E) \psi(x)$$

$$= P(H(x) - E) \psi(x)$$

$$= (H(x) - E) P \psi(x)$$

→ $P \psi(x) = \psi(-x)$ ist ebenso Eigenfunktion zum Eigenwert E .

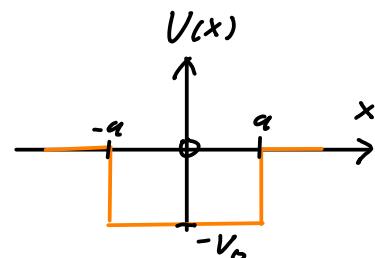
→ $\psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(x) \pm \psi(-x))$ ist simultan Eigenfunktion von H zum Eigenwert E und von P zum Eigenwert ± 1 .

Fazit: Wir können für spiegelsymmetrische Potentiale nach rein geraden und rein ungeraden Lösungen suchen.

2.2 Potenzialtopf

Betrachte nun Potential

$$V(x) = -V_0 \delta(a - |x|) \quad \text{mit} \quad \delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



→ vereinfachtes Modell für kurzreichweitige Potentiale z.B. in der Kernphysik oder an Störstellen in Festkörpern.

Betrachte hier gebundene Zustände $-V_0 \leq E \leq 0$.

→ die zitanabhängige Schrödinger-Gleichung wird zu

$$\psi'' = -\frac{2m}{\hbar^2} E \psi = q^2 \psi \quad \text{mit} \quad q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-2mE} \quad \text{für } |x| > a$$

$$\psi'' = -\frac{2m^2}{\hbar^2} (V_0 + E) \psi = -q^2 \psi \quad \text{mit} \quad q = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)} \quad \text{für } |x| \leq a$$

symmetrische Lösungen:

$$\psi(x) = \begin{cases} S_1 \cos qx & \text{für } |x| \leq a \\ S_2 e^{\mp qx} & \text{für } x \gtrless \pm a \end{cases}$$

antisymmetrische Lösungen:

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 \sin qx & \text{für } |x| \leq a \\ A_2 \pm e^{\mp qx} & \text{für } x \gtrless \pm a \end{cases}$$

Im Außenbereich: Klassisch verboten, da $V=0 > E$ ist.

Habt exponentiell fallende Lösungen gewählt, da nur diese normierbar sind.

Innenbereich: Klassisch erlaubt, da $V_0 < E$ ist.

→ oszillatorische Lösungen.

$S_{1,2}$ und $A_{1,2}$ sind Integrationskonstanten, die aus den Stetigkeitsbedingungen (Anschlussbedingungen) und der Normierung folgen. Zur Bestimmung des Spektrums benötigen wir für diese jedoch keine explizite Lösung.

Anschlußbedingungen für symmetrische Lösungen:

Betrachte $x=a$ ($x=-a$ folgt wegen Symmetrie)

$$\psi(x) \text{ stetig} \rightarrow S_1 \cos qa = S_2 e^{-xa}$$

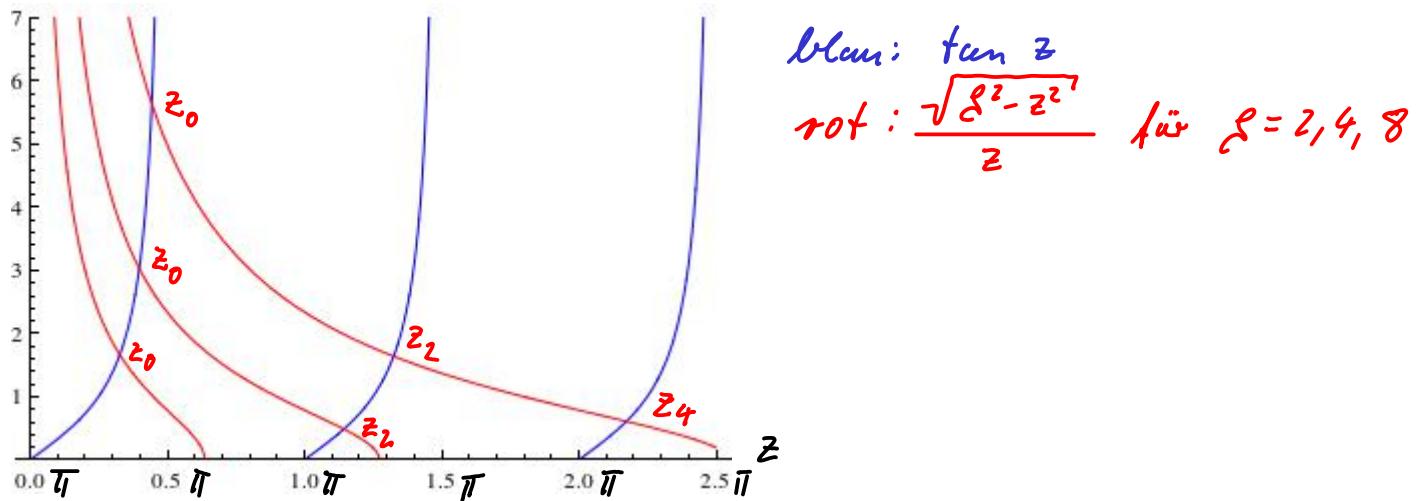
$$\psi'(x) \text{ stetig} \rightarrow q S_1 \sin qa = x S_2 e^{-xa}$$

$$\Rightarrow \tan qa = \frac{x}{q} = \sqrt{\frac{-E}{V_0 + E}} \quad \text{oder} \quad qa \tan qa = x a = \frac{a}{t_h} \sqrt{-2mE}$$

Definiere die dimensionslosen Parameter $\xi = \frac{a}{t_h} \sqrt{2mV_0}$ und $z = qa$
 $\rightarrow \xi^2 - z^2 = \frac{a^2}{t_h^2} (2mV_0) - \frac{a^2}{t_h^2} (2mE + 2mV_0) = -\frac{a^2}{t_h^2} 2mE$

$$\rightarrow z \tan z = \sqrt{\xi^2 - z^2}$$

Diese Gleichung läßt sich nicht im geschlossenen Form lösen. Es ist jedoch leicht, den Zusammenhang graphisch darzustellen:



→ Es gibt eine endliche Zahl von Lösungen z_n .

Diesen zugeordnet sind die diskreten Energieniveaus

$$E_n = -\frac{t_h^2}{2ma^2} (\xi^2 - z_n^2) = -V_0 \left(1 - \frac{z_n^2}{\xi^2}\right)$$

Die Quantenmechanik liefert also eine Erklärung für die Beobachtung diskreter Energieniveaus. Wie wir später sehen werden, gilt dies insbesondere auch für das Wasserstoffatom.

Anschlussbedingungen für antisymmetrische Lösungen:
wieder bei $x=a$:

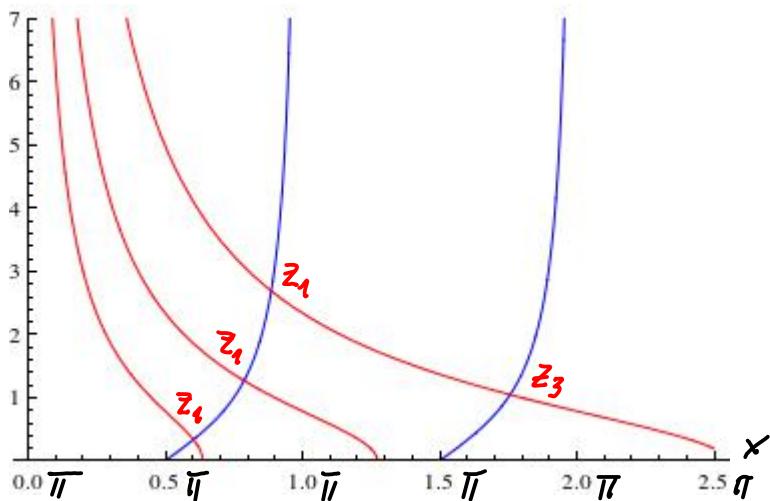
$$\psi(x) \text{ stetig} \rightarrow A_1 \sin q_a = A_2 e^{-\kappa a}$$

$$\psi'(x) \text{ stetig} \rightarrow -q A_1 \cos q_a = \kappa A_2 e^{-\kappa a}$$

$$\Rightarrow \cot q_a = -\frac{\kappa}{q} = -\sqrt{\frac{-E}{V_0 + E}} \quad \text{oder} \quad q_a \cot q_a = -\kappa a = -\frac{a}{t_b} \sqrt{-2mE}$$

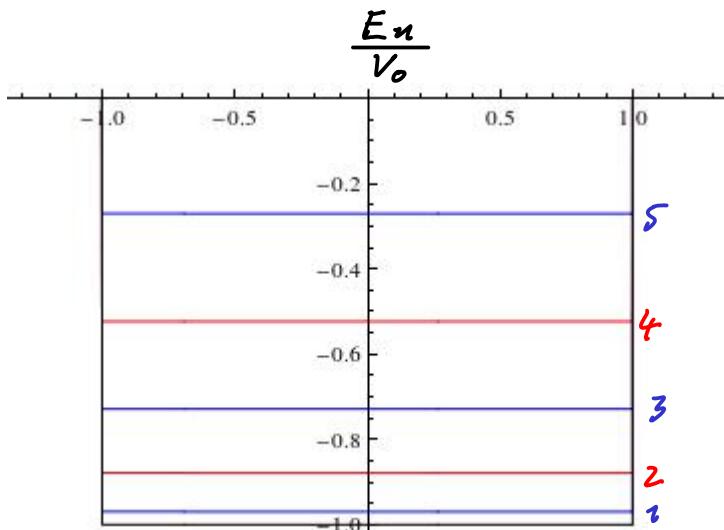
$$\rightarrow -z \cot q_a = \sqrt{\ell^2 - z^2}$$

graphisch:



blau: $-\cot z$
rot: $\frac{\sqrt{\ell^2 - z^2}}{z}$ für $\ell = 2, 4, 8$

Wiederum gilt $E_n = -V_0 \left(1 - \frac{z_n^2}{\ell^2}\right)$.

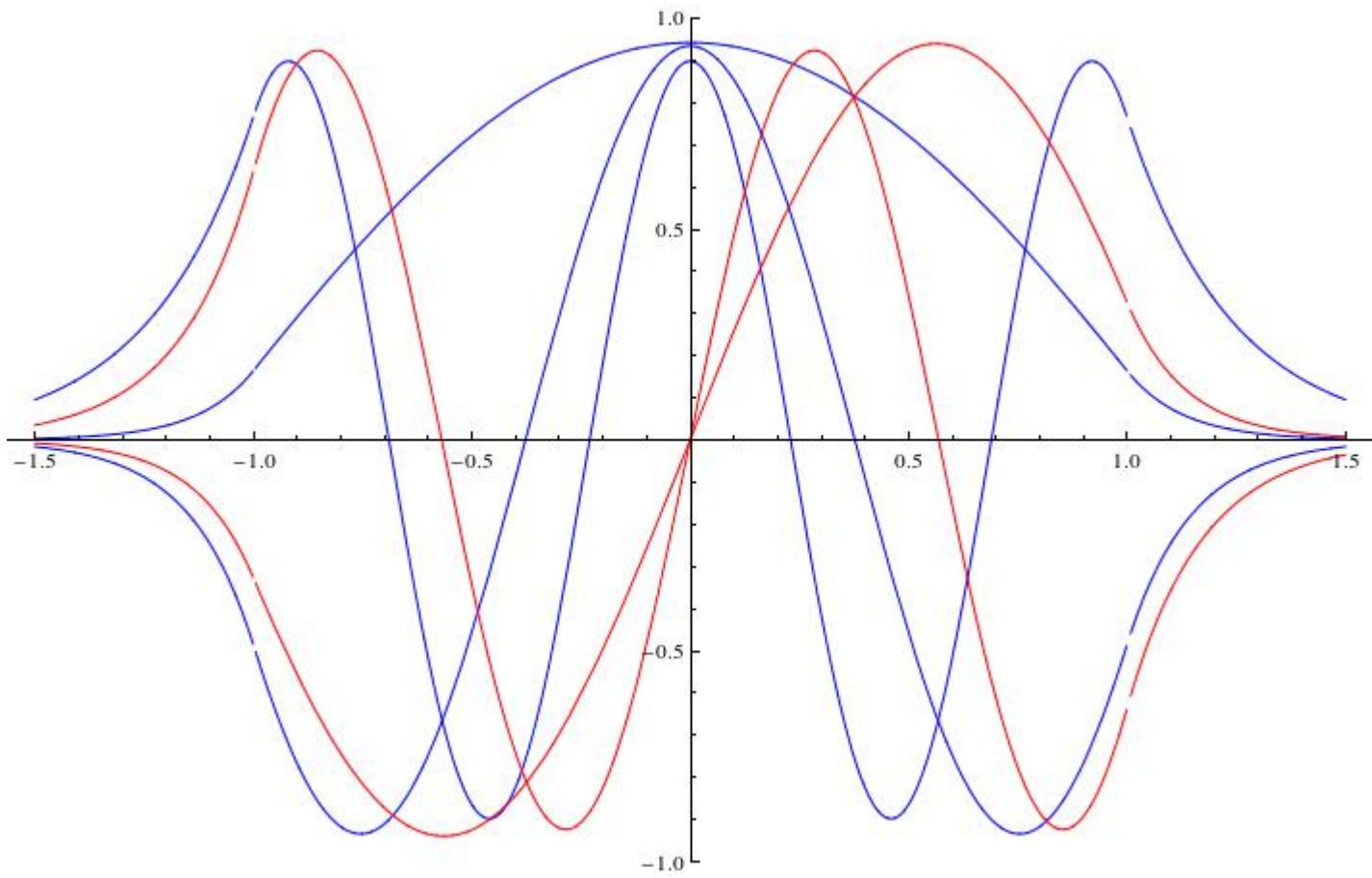


Zusammengefaßt erhalten wir
für $\ell=8$ folgende Eigenwerte:

blau: Eigenwerte zu
symmetrischen Lösungen

rot: Eigenwerte zu
antisymmetrischen Lösungen

Die Wellenfunktionen haben folgende Form:



Die Eigenfunktion zum n -ten Eigenwert hat also $n-1$ Knoten (Nullstellen).

Die Diskretisierung erwies sich also als Konsequenz der Normierbarkeit ($|\Psi(x)|^2 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$). Mit diesen Randbedingungen existieren für den Potentialetopf nur endlich viele Lösungen.

2.3 Allgemeine Folgerungen aus der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung

Potentialetopf mit Symmettieigenschaften und diskreten gebundenen Zuständen ist in der Tat exemplarisch.

→ Die obigen Ergebnisse lassen sich in qualitativer Weise verallgemeinern.

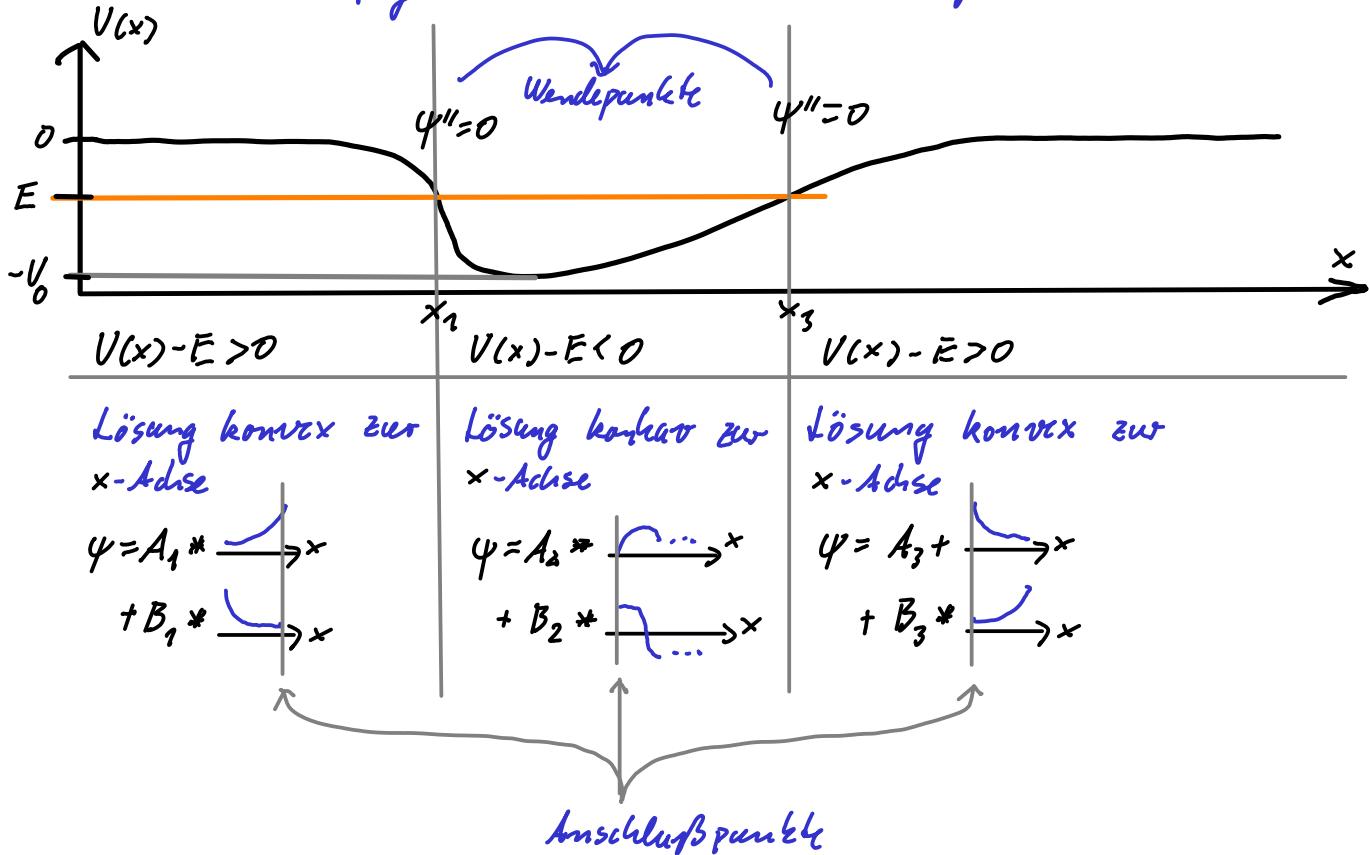
Notiere nochmals die eindimensionale, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \psi(x)$$

→ Zunächst unendlich viele Lösungen, welche für beliebiges E durch zwei Randbedingungen (an $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ für einen beliebigen Punkt x) eindeutig bestimmt sind.

Jedoch: für Randbedingungen $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ existieren Lösungen nur für bestimmte E .

Betrachte dazu folgende Situation: $E < 0$ (gebundener Zustand)



* Löse „von links nach rechts“ für verschiedene $E < 0$:

→ $B_1 = 0$ (wegen Normierbarkeit)

* Stetige Fortsetzung von $\psi(x_1)$ und $\psi'(x_1)$

$$\rightarrow A_2 = \alpha_2(E) A_1$$

$$B_2 = \beta_2(E) A_1$$

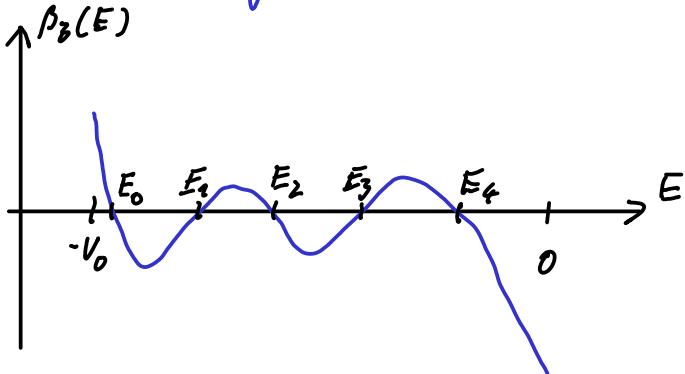
* Stetige Fortsetzung von $\psi(x)$ und $\psi'(x)$

$$\rightarrow A_3 = \alpha_3(E) A_1$$

$$B_3 = \beta_3(E) A_1$$

Für die Normierbarkeit fordern wir jedoch $\beta_3(E) = 0$

\rightarrow nur möglich für diskrete Werte von E :



* Anschaulich klar: Gehe von $E < E_0$ aus und erhöhe E : Lösung $\psi(x)$ zum Eigenwert E_0 hat keine Nullstellen (Knoten) (Grundzustand)

Weitere Erhöhung von $E \rightarrow$ Lösung $\psi(x)$ zu E_1 hat einen Knoten usw.

\rightarrow Knotensatz

Die zu E_n gehörige Wellenfunktion hat n Knoten.

Wir werden später noch sehen, daß das aufreten diskreter Energieniveaus für gebundene Zustände in drei Dimensionen in ähnlicher Weise verstanden werden kann.

Wronski-Determinante

Seien $\Psi_{a,b}(x)$ Lösungen der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung zu den Eigenwerten E_a und E_b :

$$\Psi''_{a,b}(x) + k_{a,b}^2 \Psi_{a,b}(x) = 0, \quad k_{a,b}^2 = \frac{2m}{t_1^2} (E_{a,b} - V(x))$$

Multiplizier Gleichung für ψ_a mit ψ_b & umgekehrt, bilde Differenz:

$$\begin{aligned}\psi_a''(x)\psi_b(x) - \psi_b''(x)\psi_a(x) &= (k_b^2 - k_a^2)\psi_a(x)\psi_b(x) \\ &= \frac{2m}{\hbar^2}(E_b - E_a)\psi_a(x)\psi_b(x)\end{aligned}$$

Integriere von x_0 bis $x_1 > x_0$ und führe partielle Integration aus:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} dx (\psi_a''(x)\psi_b(x) - \psi_b''(x)\psi_a(x)) &= \left[\psi_a'(x)\psi_b(x) - \psi_b'(x)\psi_a(x) \right]_{x_0}^{x_1} \\ &\quad - \int_{x_0}^{x_1} dx (\psi_a'(x)\psi_b'(x) - \psi_b'(x)\psi_a'(x))\end{aligned}$$

Definiere die Wronski-Determinante:

$$W(\psi_a, \psi_b; x) = \begin{vmatrix} \psi_a(x) & \psi_b(x) \\ \psi_a'(x) & \psi_b'(x) \end{vmatrix} = \psi_a(x)\psi_b'(x) - \psi_b(x)\psi_a'(x)$$

$$\xrightarrow{\longrightarrow} [W(\psi_a, \psi_b; x)]_{x_0}^{x_1} = \frac{2m}{\hbar^2}(E_a - E_b) \int_{x_0}^{x_1} dx \psi_a(x)\psi_b(x)$$

Nützlicher Spezialfall: $E = E_a = E_b$

$$\Rightarrow W(\psi_a, \psi_b; x) = \text{const.}$$

Weiterhin haben dann für $E - V(x=x_{r,s}) = 0$ beide Wellenfunktionen die gleichen Unbekanntpunkte $\psi_{a,b}''(x=x_{r,s}) = 0$. \rightarrow

$$\int_{x_{r,s}-\varepsilon}^{x_{r,s}+\varepsilon} dx (\psi_a''(x)\psi_b(x) - \psi_b''(x)\psi_a(x)) = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 2\varepsilon W(\psi_a, \psi_b; x_{r,s}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow W(\psi_a, \psi_b; x_{r,s}) = 0$$

$$\implies \frac{\psi'_b(x)}{\psi_b(x)} = \frac{\psi'_a(x)}{\psi_a(x)} \implies \frac{d}{dx} \log \frac{\psi_a(x)}{\psi_b(x)} = 0$$

$$\implies \psi_a(x) = c \psi_b(x) \text{ mit } c \in \mathbb{C}.$$

Sind $\psi_{a,b}$ normiert, dann ist $|c|=1$ und c eine irrelevant Phase.

→ Zu jedem Eigenwert E_n gehört genau ein Zustand.

Wir sagen: Die diskreten Eigenwerte der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung sind nicht entartet.

(Diese Aussage ist andererseits auch anschaulich durch Betrachtung der originen Funktion $\beta_3(E)$ klar.)

2.4 Unendlich tiefer Potentialtopf

Dieser Fall ist einfacher als der Topf endlicher Tiefe. Es ist jedoch möglich und von Interesse das Spektrum analytisch anzugeben.

- * Potential wie für endlichen Topf, jedoch $V_0 \rightarrow \infty$
- * Sprung von $V(\pm a)$ ist unendlich → keine Stetigkeit von $\psi'(x=\pm a)$
- * $\psi(x) \equiv 0$ für $|x| \geq a$

gerade Zustände

$$z \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad z \tan z = \sqrt{z^2 - \tilde{z}^2} \quad \psi \propto \cos q x$$

$$\implies z_0 = \frac{\pi}{2}, \quad z_2 = \frac{3}{2}\pi, \quad z_4 = \frac{5}{2}\pi, \dots \rightarrow z_n = \frac{n+1}{2}\pi$$

$$\text{mit } z = q a \implies \psi(x) = N \cos\left(\frac{2n+1}{2a}\pi x\right) = N \cos\left(\frac{n+1}{2a}\pi x\right), \quad n=0, 2, 4, \dots$$

$$\int_{-a}^a dx \cos^2\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} x\right) = a \implies N = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

ungerade Zustände

$$\zeta \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad -z \cot z = \sqrt{\zeta^2 - z^2} \quad \psi \propto \sin qx$$

$$\Rightarrow z_1 = \pi, \quad z_3 = 2\pi, \quad z_5 = 3\pi, \dots \rightarrow z_n = \frac{n+1}{2}\pi$$

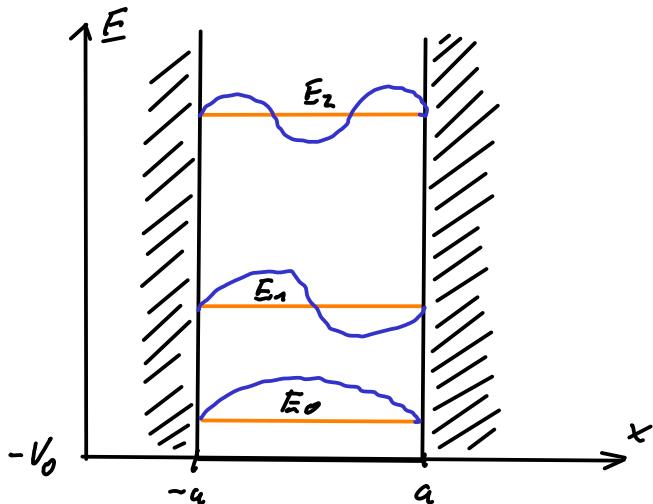
$$\text{mit } z=qn \Rightarrow \psi(x) = N \sin\left(\frac{z_n}{a}x\right) = N \sin\left(\frac{n+1}{2a}\pi x\right), \quad n=1, 3, 5, \dots$$

$$\int_{-a}^a dx \sin^2\left(\frac{(n+1)\pi}{2a}x\right) = a \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Energieniveaus (Spektrum): $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2} (V(x) - E) \psi(x)$

$E_n - (-V_0) = -V_0 \left(1 - \frac{z_n^2}{\zeta^2}\right) - (-V_0)$ (Abstand zum "Boden" des Potentials)

$$= -\frac{z_n^2}{\zeta^2} V_0 = \frac{z_n^2 \pi^2}{a^2 2m V_0} V_0 = \frac{\pi^2 z_n^2}{2a^2 m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8a^2 m} (n+1)^2$$

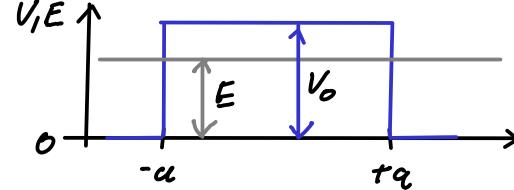


2.6 Potentialschwelle & Tunneleffekt

Als ein interessantes Beispiel für ungebrückte Zustände betrachten wir eine Potentialbarriere

$$V(x) = V_0 \mathbb{1}(x - a)$$

und Zustände mit $0 < E < V_0$.



* Klassisch: Teilchen, welches auf die Barriere stößt wird wird reflektiert und erfährt Impulssumilder.

* Quantenmechanisch: Neben Reflexion tritt Transmission (Tunneln) durch den klassisch verbotenen Bereich auf.

Wir können unmittelbar die Wellenfunktion in folgender Form angeben:

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & \text{für } x < -a \\ C e^{-kx} + D e^{kx} & \text{für } -a \leq x \leq a \\ F e^{ikx} + G e^{-ikx} & \text{für } x > a \end{cases}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

→ Bestimme die Koeffizienten mit den Stetigkeitsbedingungen.

Auschlußbedingung bei $x = -a$:

$$A e^{-ika} + B e^{ika} = C e^{xa} + D e^{-xa}$$

$$ik(A e^{-ika} - B e^{ika}) = -x(C e^{xa} - D e^{-xa})$$

Drücke dies mittels einer Matrix aus:

$$\begin{pmatrix} e^{-ika} & e^{ika} \\ e^{-ika} & -e^{ika} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{xa} & e^{-xa} \\ \frac{ix}{\hbar} e^{xa} & -\frac{ix}{\hbar} e^{-xa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix},$$

$$M(a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{ik}{k}\right) e^{ixa+ika} & \left(1 - \frac{ik}{k}\right) e^{-ixa+ika} \\ \left(1 - \frac{ik}{k}\right) e^{ixa-ika} & \left(1 + \frac{ik}{k}\right) e^{-ixa-ika} \end{pmatrix}$$

Damit folgt für die Anschlußbedingung bei $x=a$:

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = M(-a) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad (\text{Spiegelsymmetrie des Potentials})$$

Insgesamt:

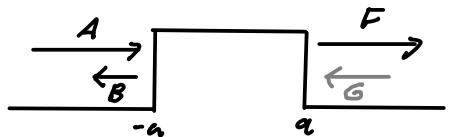
$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M(a) M^{-1}(-a) \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \varepsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}, \quad \eta = \frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa} \quad \text{und}$$

$$M(a) M^{-1}(-a) = \begin{pmatrix} \left(\cosh 2xa + \frac{i\varepsilon}{2} \sinh 2xa\right) e^{2ika} & \frac{i\eta}{2} \sinh 2xa \\ -\frac{i\eta}{2} \sinh 2xa & \left(\cosh 2xa - \frac{i\varepsilon}{2} \sinh 2xa\right) e^{-2ika} \end{pmatrix}$$

Die Matrixoperationen lassen sich mit einiger Rechnung ohne technische Schwierigkeiten nachvollziehen.

Wegen $p = \frac{t}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ sehen wir, daß die einzelnen Beiträge zur Wellenfunktion ein-/auslaufende Teilchen beschreiben:



* Nehme an, daß Teilchen nur von links einlaufen.

$$\rightarrow A \neq 0, G=0$$

* Teilchen werden an der Barriere gestreut, so daß sie in beide Richtungen auslaufen (Transmission & Reflexion).

→ bestimme B und F .

Aus der ersten Spalte von $M(a)M^{-1}(-a)$ erhalten wir dann:

$$A = F \left(\cosh 2x_a + \frac{i\varepsilon}{2} \sinh 2x_a \right) e^{2ika}$$

$$B = -F \frac{i\eta}{2} \sinh 2x_a$$

Definiere die Transmissionsamplitude:

$$S(E) = \frac{F}{A} = \frac{e^{-2ika}}{\cosh 2x_a + \frac{i\varepsilon}{2} \sinh 2x_a} = \cosh^2 2x_a + \frac{\varepsilon^2}{4} \sinh^2 2x_a = \cosh^2 2x_a - \sinh^2 2x_a + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \sinh^2 2x_a$$

und den Durchlässigkeitskoeffizienten:

$$|S(E)|^2 = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \sinh^2 2x_a}$$

Dieser gibt die Wahrscheinlichkeit für ein Teilchen an, die Barriere zu durchdringen.

Zur Begründung merken wir zunächst an, dass die freie Wellenfunktion $\psi = K e^{ikx}$ nicht normierbar ist, da $\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^* \psi$ nicht existiert.

→ Gilt auch, wenn wir eine der Grenzen durch $-a$ oder a ersetzen.

ledoch ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte (siehe Abschnitt 1.2.4)

$$j(x) = \operatorname{Re} \left[\psi^*(x) \frac{p}{m} \psi(x) \right] = \operatorname{Re} \left[\psi^*(x) \frac{t_i}{im} \partial_x \psi(x) \right] = |K|^2 \frac{t_i k}{m}$$

Mit $K = A, F$ folgt obige Interpretation.

Höhe und breite Barrieren: $x_a \gg 1$

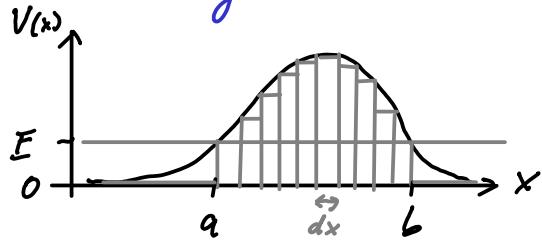
$$\rightarrow \sinh 2x_a \approx \frac{1}{2} e^{2x_a} \gg 1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |S(E)|^2 &\approx \left(1 + \frac{\epsilon^2}{4}\right)^{-1} 4 e^{-4x_0} = \frac{16(x_0)^2}{(x_0^2 + k^2)^2} e^{-4x_0} \\ &= \frac{16 E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-\frac{4E}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}} \\ &= \exp \left\{ -\frac{4E}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} + \log \frac{16 E(V_0 - E)}{V_0^2} \right\} \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung des Logarithmus im Exponenten folgt die oft verwendete Abschätzung

$$|S(E)|^2 \sim e^{-\frac{4E}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

Diese ist z.B. nützlich zur Behandlung kontinuierlicher Potentialberge:



Wir vernachlässigen die Bereiche mit $E > V(x)$ und zerlegen den Berg in N Abschnitte der Länge dx .

$$\begin{aligned} |S(E)|^2 &= \prod_{i=1}^N e^{-\frac{2dx}{\hbar} \sqrt{2m(V(x_i) - E)}} = e^{-2 \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{2m(V(x_i) - E)}}{\hbar} dx} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-2 \int_a^b dx \frac{\sqrt{2m(V(x) - E)}}{\hbar}} \end{aligned}$$

Als ein Beispiel können wir zu einem großen Verständnis der Lebensdauer von unter α -Zerfall instabilen Kernen gelangen.

* Für $r < R \approx 10^{-12} \text{ cm}$ sei das α -Teilchen durch Kernkräfte in einem näherungsweise konstanten, negativen Potential.

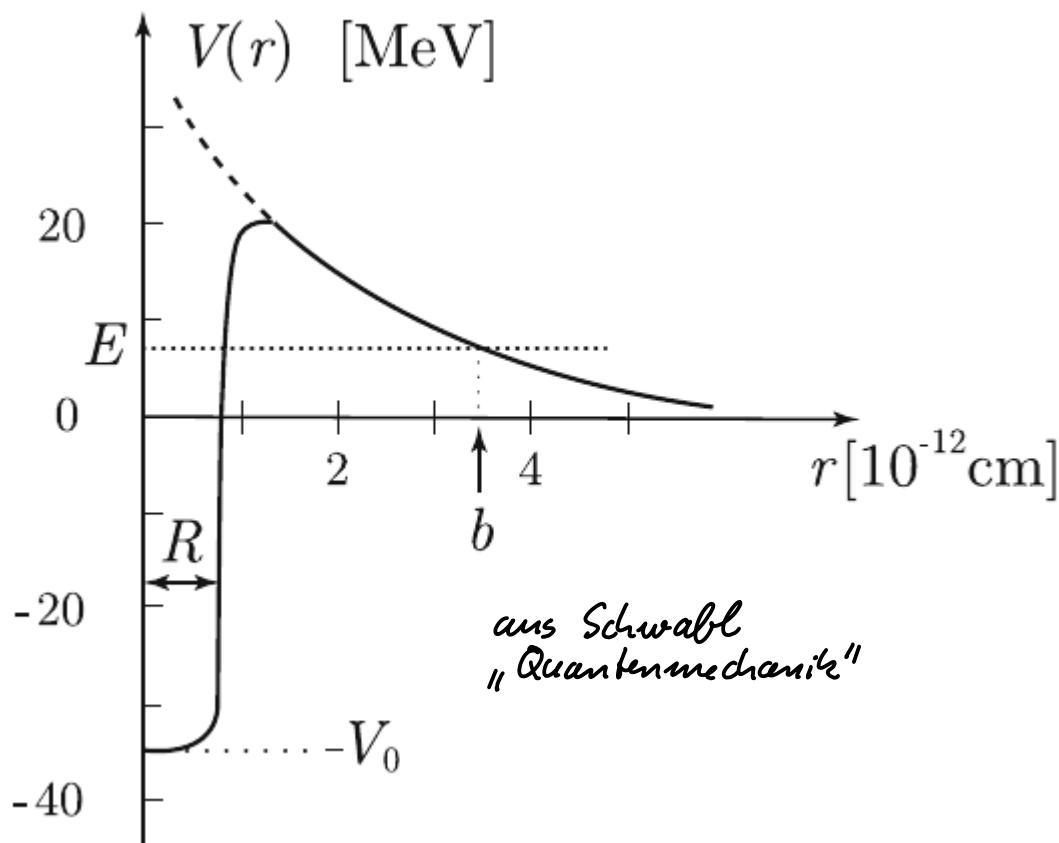
* $r > R$:

„Coulombbarriere“

$$V(r) \approx \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

Z_1 : Kernladungszahl

$Z_2 = 2$: α -Teilchen
+ Heliumkern



Wende obige Abschätzung in den Grenzen $a=R$, $b=\frac{Z_1 Z_2 e^2}{E}$ an:

$$2 \int_a^b dx \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V(x)-E)} = 2 \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_R^b dx \sqrt{\frac{6}{x}-1}$$

$$= 2 \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} b \left(\underbrace{\arccos \sqrt{\frac{R}{b}}}_{\rightarrow \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R}{b}}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right)$$

Wenn $b \gg R$ (d.h. $E \ll$ Coulomb-Barriere) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x + \mathcal{O}(x^3)$

$$\rightarrow 2 \frac{\sqrt{2m} Z_1 Z_2 e^2}{\sqrt{E} \hbar} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{R}{b}} \right)$$

$$|S|^2 = \exp \left\{ -\pi \frac{\sqrt{2m} Z_2 e^2}{\hbar} \left(\frac{Z_1}{\sqrt{E}} - \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{R Z_1}}{\sqrt{Z_2} e} \right) \right\}$$

Diese dimensionslose Größe hat noch nicht die Form einer Zerfallsrate (Dimension 1 durch Zeit).

→ Dazu gibt es eine zweckmäßige und genauere theoretische Behandlung.

Da wir durch das Vernachlässigen des logarithmischen Terms im Exponenten ohnehin nur die Größenordnung abschätzen, soll folgendes Argument hier genügen:

Sei $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ der Erwartungswert der Geschwindigkeit des α -Teildens, dann „stößt“ es die Wand alle $\frac{Z^R}{\sqrt{\langle v^2 \rangle}}$ Zeiteinheiten.

→ Lebensdauer

$$\tau = \frac{Z^R}{\sqrt{\langle v^2 \rangle}} \frac{1}{|S(E)|^2}$$

→ Halbwertszeit: $e^{-\frac{T}{\tau}} = \frac{1}{2} \Rightarrow T = \tau \log 2 = 0,693 \tau$

$$\log_{10} \frac{T}{1a} = \log_{10} \frac{R \log 2}{\sqrt{\langle v^2 \rangle} \tau_0} + \log_{10} e * \left\{ \pi \frac{\sqrt{2m'} Z_2 e^2}{t_0} \left(\frac{Z_1}{\sqrt{E'}} - \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{R Z_1'}}{\sqrt{Z_2'} e} \right) \right\}$$

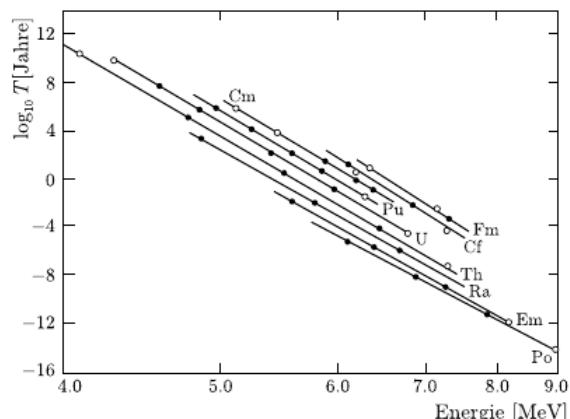
Wir haben dabei im ersten Logarithmus den Faktor 2 mit 1 ersetzt (für drei Dimensionen).

$$\begin{aligned} \text{Mit } \tau_0 &= 1,0546 * 10^{-27} \text{ erg s} & \sqrt{\langle v^2 \rangle'} &= 10^9 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \\ e &= 4,80324 * 10^{-10} \text{ esu} & R &= 2 * 10^{-13} Z_1^{\frac{1}{3}} \text{ cm} \\ m &= 4 * 1,67 * 10^{-24} \text{ g} & Z_2 &= Z \\ 1 \text{ MeV} &= 1,602 * 10^{-6} \text{ erg} \end{aligned}$$

$$\log_{10} \frac{T}{1a} \approx -2.9 + 1.7 \frac{Z_1}{\sqrt{\frac{E}{\text{MeV}}}} - 1.8 * Z_1^{\frac{1}{3}}$$

\downarrow
vernachlässigte
 Z_1 -Abhängigkeit

Lebensdauer verschiedener Isotope:



Experimentell sehen wir den Zusammenhang sowohl mit E als auch mit Z_1 gut bestätigt.