Technische Universität München (TUM)

Fakultät für Physik

Zentralübung zur Theoretischen Physik I (Mechanik) [PH0005] Mitschrift

Erstellt von: Aylin Gelle
Yonathan Ascanio Hecker

Stand: Sommersemester 2017

Dozent: Herr Prof. Dr. Norbert Kaiser

Achtung: Dies ist eine im Sommersemester 2017 angefertigte Mitschrift und weder als Ersatz noch als verbindliches Skript für die Zentralübung gedacht, sondern lediglich als Leitfaden. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Fehlerfreiheit.

Inhaltsverzeichnis

1 Fallschirmspringer

Ein Körper der Masse m falle vertikal im homogenen Schwerefeld $\vec{F}_g = m \cdot g \cdot \hat{e}_z$. Es wirke zusätzlich eine newtonsche Reibungskraft $\vec{F}_R = -k \cdot |\vec{v}| \cdot \vec{v}$ proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Stellen Sie die eindimensionale Bewegungsgleichung auf und bestimmen Sie deren Lösung zu den Anfangbedingungen $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$.

$$m\ddot{z} = m \cdot g - k \cdot \dot{z}^2 \qquad v = \dot{z}$$

oder

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g - k \cdot v^2 \qquad \text{setze} \quad k = m \cdot \mu$$

somit

$$\boxed{\dot{v} = g - \mu v^2} \qquad g, \mu > 0$$

Die Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten variablen v und t lautet

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f(v) \cdot g(t)$$

Die Trennung der Variablen liefert

$$\frac{\mathrm{d}v}{f(v)} = \mathrm{d}t \cdot g(t) \qquad \Big| \int \dots$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}v}{f(v)} = \int \mathrm{d}t\, g(t)}$$

Eine Stammfunktion von $f(v)$ = Stammfunktion von $g(t) + c$. Auflösen nach $v = v(t, c)$ liefert

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{g - \mu v^2} \qquad \Rightarrow \int \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}v}{g - \mu v^2}$$

Wir brauchen also eine Stammfunktion von $f(v) = \frac{1}{g - \mu v^2}$. Verwendet man die Partialbruchzerlegung, erhält man

$$\frac{1}{g - \mu v^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{g}{\mu}} + v} + \frac{\beta}{\sqrt{\frac{g}{\mu}} - v} = \frac{\alpha\left(\sqrt{\frac{g}{\mu}} - v\right) + \beta\left(\sqrt{\frac{g}{\mu}} + v\right)}{\frac{g}{\mu} - v^2}$$

Der Zähler sei $\frac{1}{\mu}$. Somit erhält man

$$\alpha = \beta = 2\alpha\sqrt{\frac{g}{\mu}} = \frac{1}{\mu} \qquad , \alpha = \beta = \frac{1}{2\sqrt{g\mu}}$$

Nun können wir elementar integrieren:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}v}{g-\mu v^2} &= \int \mathrm{d}v \frac{1}{2\sqrt{g\mu}} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{g}{\mu}}+v} + \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{\mu}}-v} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{g\mu}} \left(\ln\left(\sqrt{\frac{g}{\mu}}+v\right) - \ln\left(\sqrt{\frac{g}{\mu}}-v\right)\right) + c \\
&= \frac{1}{2\sqrt{g\mu}} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{\mu}}+v}{\sqrt{\frac{g}{\mu}}-v} \right) + c = t
\end{aligned}$$

Setzt man die Anfangsbedingung $v(0) = 0$ ein, erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{g\mu}} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{\mu}}}{\sqrt{\frac{g}{\mu}}} \right) + c = 0 \\
&\Rightarrow c = 0
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g\mu}} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{g}{\mu}}+v}{\sqrt{\frac{g}{\mu}}-v} \right).$$

Zur weiteren Lösung müssen wir den Zusammenhang zwischen t und v umkehren.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow e^{2\sqrt{g\mu}\,t} = \frac{2\sqrt{\frac{g}{\mu}}}{\sqrt{\frac{g}{\mu}}-v} - 1 \\
&\Rightarrow \sqrt{\frac{g}{\mu}} - v = \frac{2\sqrt{\frac{g}{\mu}}}{e^{2\sqrt{g\mu}\,t}+1} \\
&\Rightarrow v = \sqrt{\frac{g}{\mu}} - \frac{2\sqrt{\frac{g}{\mu}}}{e^{2\sqrt{g\mu}\,t}+1} = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \frac{e^{2\sqrt{g\mu}\,t}-1}{e^{2\sqrt{g\mu}\,t}+1} \\
&v(t) = \frac{e^{\sqrt{g\mu}\,t}+e^{-\sqrt{g\mu}\,t}}{e^{\sqrt{g\mu}\,t}+e^{-\sqrt{g\mu}\,t}} \cdot \sqrt{\frac{g}{\mu}} = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \cdot \tanh\left(\sqrt{g\mu}\,t\right)
\end{aligned}$$

Schließlich wollen wir $v(t) = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \cdot \tanh\left(\sqrt{g\mu}\, t\right)$ nach der Zeit t integrieren.

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \sqrt{\frac{g}{\mu}} \int \mathrm{d}t \, \frac{\sinh\left(\sqrt{g\mu}\, t\right)}{\cosh\left(\sqrt{g\mu}\, t\right)} = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{g\mu}\, t\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{g\mu}} \\
z(t) &= \frac{1}{\mu} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{g\mu}\, t\right)\right)
\end{aligned}
$$

Somit ist die Anfangsbedingung $z(0) = 0$ erfüllt.

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \frac{1}{\mu} \ln\left(\frac{1}{2} e^{\sqrt{g\mu}\, t}\left(1 + e^{-2\sqrt{g\mu}\, t}\right)\right) = \frac{1}{\mu}\left(\sqrt{g\mu}\, t - \ln(2) + e^{-2\sqrt{g\mu}\, t} + \ldots\right) \\
z(t) &= \sqrt{\frac{g}{\mu}}\, t - \frac{\ln(2)}{\mu} + O\left(e^{-2\sqrt{g\mu}\, t}\right)
\end{aligned}
$$

Das heißt v_{Ende} ist konstant für $t \to \infty$.

2 Inhomogene lineare DGL 1. Ordnung

Gegeben sei die inhomogene, lineare DGL 1. Ordnung

$$\dot{v} = \gamma(t) v + f(t)$$

Man bestimme deren allgemeine Lösung.
Wir betrachten zuerst die zugehörige homogene DGL:

$$
\begin{aligned}
\dot{v}_h &= \gamma(t) v_h, \\
\frac{\mathrm{d}v_h}{v_h} &= \gamma(t)\mathrm{d}t, \\
\ln|v_h| &= \Gamma(t) + \text{const. mit } \Gamma(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \gamma(t'),
\end{aligned}
$$

somit

$$\boxed{v_h(t) = \text{const } \cdot e^{\Gamma(t)}}$$

Die inhomogene DGL wird gelöst durch den Ansatz "Variation der Konstanten" mit $u(t)$ einer noch unbestimmten Funktion

$$
\begin{aligned}
v(t) &= u(t) e^{\Gamma(t)}, \\
\dot{v}(t) &= \dot{u}(t) e^{\Gamma(t)} + u(t)\gamma(t) e^{\Gamma(t)} \\
&= \gamma(t) u(t) e^{\Gamma(t)} + f(t) \qquad \text{(DGL)}
\end{aligned}
$$

ergibt

$$\dot{u}(t) = e^{-\Gamma(t)} f(t)$$
$$u(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' f(t') e^{-\Gamma(t')} + u_0$$

Insgesamt lautet die allgemeine Lösung von $\dot{v}(t) = \gamma(t)v + f(t)$:

$$v(t) = e^{\Gamma(t)} \left[u_0 + \int_0^t \mathrm{d}t' f(t') e^{-\Gamma(t')} \right]$$

Sie enthält genau eine Integrationskonstante $u_0 = v(0)$, denn $\Gamma(0) = 0$

Beispiel $\quad \dot{v} = tv + t^3$

$$\Gamma(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' t' = \frac{t^2}{2}$$
$$\int \mathrm{d}t\, t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Substitution: $t = \sqrt{2\tau}, \mathrm{d}t = \frac{d\tau\sqrt{2}}{2\sqrt{\tau}}$

$$\int \mathrm{d}\tau \frac{(2\tau)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\tau}} e^{-\tau} = \int \mathrm{d}\tau 2\tau \cdot e^{-\tau} = -2\tau e^{-\tau} + \int \mathrm{d}\tau e^{-\tau} 2 = -2(\tau + 1)e^{-\tau}$$

wobei wir die partielle Integration benutzt haben.
Man ersetze $\tau = \frac{t^2}{2}$ und die allgemeine Lösung von $\dot{v} = tv + t^3$ lautet:

$$v(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \left[u_0 - 2\left(\frac{t^2}{2} + 1\right) e^{-\frac{t^2}{2}} \right] = u_0 e^{\frac{t^2}{2}} - t^2 - 2$$

wobei in diesem Fall $v(0) = u_0 - 2$ ist.

3 Wassertropfen in dampfgefüllter Atmosphäre

Ein kugelförmiger Wassertropfen (Radius $R(t)$ und konstante Dichte ρ) fällt vertikal in der mit Dampf gefüllten Atmosphäre unter dem Einfluss der Schwerkraft. Durch Kondensation wächst das Volumen des Tropfens proportional zu seiner Oberfläche und zur Geschwindigkeit $v(t)$.
Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $R(t)$ und $v(t)$ auf und lösen Sie diese zu den Anfangsbedingungen $R(0) = 0$ und $v(0) = 0$ mit Hilfe von Potenzansätzen.

Wachstum des Volumens:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{4\pi}{3}R(t)^3\right) = \alpha 4\pi R^2 v = 4\pi R^2 \dot{R}$$

$$\boxed{\dot{R} = \alpha v}$$

α ist eine dimensionslose Proportionalitätskonstante.
Newton'sche Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m(t)v(t)\right] = m(t)g, \\
&m(t) = \frac{4\pi}{3}\rho R^3(t), \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{4\pi}{3}\rho R^3 v\right] = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 g,
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R^3 v\right] = gR^3}$$

Potenzansätze: $R(t) = at^\mu$, $v(t) = bt^\nu$ mit Parametern a, b und Exponenten μ, ν.
Einsetzen in die DGLn ergibt:

$$\begin{aligned}
&a\mu t^{\mu-1} = \alpha b t^\nu \\
&\Rightarrow \mu = \nu + 1\,, \quad a\mu = \alpha b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^3 b t^{3\mu+\nu}\right) = g a^3 t^{3\mu} = a^3 b(3\mu+\nu)t^{3\mu+\nu-1} \\
&\Rightarrow \nu = 1\,, \quad g = b(3\mu+\nu) \quad \text{weiterhin}\, \mu = 2\,, \quad b = \frac{g}{7}\,, \quad a = \frac{\alpha g}{14}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten als Lösung:

$$\boxed{v(t) = \frac{gt}{7}\,, \quad R(t) = \frac{\alpha g t^2}{14}}$$

Der Tropfen fällt mit konstanter Beschleunigung $g/7$.
Die entkoppelte DGL für $R(t)$ ist nicht linear:

$$\begin{aligned}
&R^3\dot{v} + 3R^2\dot{R}v = gR^3\,, \quad v = \frac{\dot{R}}{\alpha}\,, \quad \dot{v} = \frac{\ddot{R}}{\alpha}, \\
&\ddot{R} + \frac{3\dot{R}^2}{R} = \alpha g.
\end{aligned}$$

Diese wird gelöst von $R(t) = \frac{\alpha g}{14}t^2$, wie man leicht nachweist:

$$\frac{2}{14} + \frac{3\cdot 14}{7^2} = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1.$$

4 Geladenes Teilchen in gekreuzten Feldern

Ein Teilchen der Masse m und Ladung $q > 0$ bewege sich in gekreuzten, homogenen $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feldern. Es erfährt die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right).$$

Wählen Sie $\vec{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$ mit $E, B > 0$.
Bestimmen sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ zu den Anfangsbedingungen
$\vec{r}(0) = 0, \vec{v}(0) = \dot{\vec{r}}(0) = 0$
Die vektorielle Bewegungsgleichung $m\dot{\vec{v}} = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ hat in Komponenten geschrieben die Form:

$$\begin{pmatrix} \dot{v_x} \\ \dot{v_y} \\ \dot{v_z} \end{pmatrix} = \frac{q}{m}\left[\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}\right] = \frac{q}{m}\begin{pmatrix} E + v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{v}_x = \frac{q}{m}(E + v_y B), \quad \dot{v}_y = -\frac{q}{m}v_x B}$$

$$\ddot{v}_x = \frac{q}{m}\dot{v}_y B = -\frac{q^2}{m^2}B^2 v_x = -\omega^2 v_x$$

Wir entkoppeln indem wir die erste Gleichung nach t differenzieren und $\dot{v}_y$ durch die zweite Gleichung ersetzen.

Mit der Larmorfrequenz $\omega = \frac{qB}{m} > 0$
Lösung der Schwingungsgleichung:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), \text{Anfangsbedingung } v_x(0) = 0 = a \\ \dot{v}_x(0) &= b\omega = \frac{qE}{m} \text{ da } v_y(0) = 0, \\ b &= \frac{qEm}{mqB} = \frac{E}{B}, \end{aligned}$$

somit

$$\boxed{v_x(t) = \frac{E}{B}\sin(\omega t)}$$

$v_y(t)$ ergibt sich aus

$$v_y = \frac{1}{B}\left(\frac{m}{q}\dot{v}_x - E\right),$$

also

$$\boxed{v_y(t) = \frac{E}{B}\left[\cos(\omega t) - 1\right]}$$

Prüfe: $\dot{v}_y = -\frac{\omega E}{B}\sin(\omega t) = -\frac{qE}{m}\sin(\omega t) = -v_x\frac{qB}{m}$.
Die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ folgt durch Integration von $\vec{v}(t)$ bezüglich der Zeit.

$$\begin{aligned}
z(t) &= 0, \\
x(t) &= \int_0^t \mathrm{d}t' \frac{E}{B}\sin(\omega t') = \frac{E}{B\omega}[1 - \cos(\omega t)] \\
y(t) &= \int_0^t \mathrm{d}t' \frac{E}{B}[\cos(\omega t') - 1] = \frac{E}{B\omega}\left[\sin(\omega t) - \omega t\right]
\end{aligned}$$

Stellen Sie die Bedingung auf, dass sich das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt:

$$\begin{aligned}
m\dot{\vec{v}} &= q\left(E + \vec{v}\times\vec{B}\right) = \vec{0} \\
\vec{E} = \vec{B}\times\vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Bv_y \\ Bv_x \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_x = 0\ , \quad v_y &= -\frac{E}{B} \\
\vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E}{B} \\ v_{z0} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit v_{z0} konstant.

5 Raketengleichung

Eine Rakete erhält ihren Antrieb, indem sie ihren Treibstoff verbrennt und die Verbrennungsgase mit hoher Geschwindigkeit nach hinten ausstößt.

a) Berechnen Sie die Beschleunigung der Rakete im schwerefreien Raum aus dem für das Gesamtsystem (Treibstoff und Rakete) gültigen Impulserhaltungssatz.

Massenerhaltung:

$$M(t) + m(t) = M_0$$

Impuls der Rakete:

$$P(t) = M(t)v(t)$$

Impuls des Treibstoffs:

$$p(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \dot{m}(t') \left[v(t') - u(t')\right]$$

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} P(t) + p(t) &= \text{const.} = 0, & \dot{P}(t) + \dot{p}(t) = 0 \\ \dot{M}v + M\dot{v} + \dot{m}(v-u) &= 0, & \text{benutze} \quad \dot{m} = -\dot{M} \\ \dot{M}v + M\dot{v} + \dot{M}(u-v) &= 0\,. \end{aligned}$$

Beschleunigung der Rakete:

$$\boxed{\dot{v} = -\frac{\dot{M}u}{M} > 0} \qquad u(t) = \text{Ausstoßgeschwindigkeit der Gase}$$

b) Mit welcher Geschwindigkeit $u(t)$ müssen die Antriebsgase (der Dichte ρ) durch ein zylindrisches Rohr (vom Radius r) strömen, damit die Rakete stets die Beschleunigung g erfährt?

$$\begin{aligned} \text{Masse} &= \text{Dichte} \cdot \text{Volumen} \\ \dot{m} &= \rho\dot{V} = u\rho\pi r^2 = -\dot{M}\,, \\ u &= -\frac{\dot{M}}{\rho\pi r^2}\,. \end{aligned}$$

Nun folgt für die Beschleunigung

$$\begin{aligned} \dot{v} = g &= \frac{\dot{M}^2}{\pi\rho r^2 M} \quad \text{DGL mit getrennten Variablen} \\ \dot{M} &= -r\sqrt{\pi\rho g\, M}, \qquad \frac{\dot{M}}{\sqrt{M}} = -r\sqrt{\pi\rho g} \quad \Big| \int \mathrm{d}t \\ 2\sqrt{M(t)} - 2\sqrt{M_0} &= -t\,r\sqrt{\pi\rho g} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{M(t)} = \sqrt{M_0} - \frac{rt}{2}\sqrt{\pi\rho g}}$$

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\rho\pi r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M_0 - rt\sqrt{\pi\rho g\, M_0} + \frac{r^2t^2}{4}\pi\rho g\right) \\ &= \frac{1}{\rho\pi r^2}\left(r\sqrt{\pi\rho g M_0} - \frac{r^2 t}{2}\pi\rho g\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{M_0 g}{\pi\rho}} - \frac{g\,t}{2}}$$

c) Welche Schubkraft F in Vielfachen von $M(t)\,g$ wirkt auf die Rakete?

$$\begin{aligned} F &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t) = \dot{M}v + M\dot{v} = \dot{M}g\,t + M\,g, \\ F &= M\,g\left(1 + \frac{\dot{M}}{M}t\right) = M\,g\left(1 - \frac{t\,r\sqrt{\pi\rho g}}{\sqrt{M(t)}}\right) \\ &= M\,g\left(1 - \frac{t\,r\sqrt{\pi\rho g}}{\sqrt{M_0} - \frac{r\,t}{2}\sqrt{\pi\rho g}}\right) = M\,g\frac{2\sqrt{M_0} - 3r\,t\sqrt{\pi\rho g}}{2\sqrt{M_0} - r\,t\sqrt{\pi\rho g}} < M\,g\,. \end{aligned}$$

d) Welche Endgeschwindigkeit erreicht die Rakete, wenn der Treibstff 91% der Rakete ausmacht?

$$\begin{aligned} M(t_\mathrm{E}) &= 0{,}09M_0, \quad \sqrt{0{,}09M_0} = \sqrt{M_0} - \frac{rt_\mathrm{E}}{2}\sqrt{\pi\rho g} = 0{,}3\sqrt{M_0}\,, \\ t_\mathrm{E} &= \frac{7\sqrt{M_0}}{5r\sqrt{\pi\rho g}}, \quad v_\mathrm{E} = t_\mathrm{E}\,g = \frac{7\sqrt{M_0 g}}{5r\sqrt{\pi\rho}}\,. \end{aligned}$$

6 Pölschl-Teller-Potential

Bestimmen Sie die Periode T der Bewegung eines Massenpunkts m im sogenannten Pöschl-Teller-Potential

$$U(x) = -\frac{U_0}{\cosh^2\frac{x}{a}} \qquad \text{mit } U_0, a > 0$$

Beachte: $U(x) = U(-x)$ ist eine gerade Funktion: Die Energie bei gebundener Bewegung muss negativ sein. Wir bezeichnen sie mit $-E, E > 0$.
Setze $E = \lambda U_0$ mit $0 < \lambda < 1$.

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2m}\int_{-x_1}^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-E - U(x)}} \\ &= \sqrt{8m}\int_0^{x_1}\mathrm{d}x\left[U_0\cosh^{-2}\left(\frac{x}{a}\right) - U_0\lambda\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{\cosh\frac{x}{a}}{\cosh\frac{x}{a}} \\ T &= \sqrt{\frac{8m}{U_0\lambda}}\int_0^{x_1}\mathrm{d}x\cosh\frac{x}{a}\left[\lambda^{-1} - \cosh^2\frac{x}{a}\right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Substituiere: $z = \sinh\frac{x}{a}$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}$

$$T = \sqrt{\frac{8m}{U_0\lambda}}a\int_0^{z_1}\mathrm{d}z\left[\lambda^{-1} - 1 - z^2\right]^{-\frac{1}{2}} .$$

$$-U_0\cosh^{-2}\frac{x_1}{a} = -E = -U_0\lambda\,,$$

$$\frac{1}{\lambda} = \cosh^2\frac{x_1}{a} = 1 + \sinh^2\frac{x_1}{a} = 1 + z_1^2\,.$$

Somit

$$T = \sqrt{\frac{8m}{U_0\lambda}}a\int_0^{z_1}\mathrm{d}z\left[z_1^2 - z^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Substituiere: $z = z_1\sin\theta$, $\mathrm{d}z = z_1\cos\theta\mathrm{d}\theta$

$$T = \sqrt{\frac{8m}{E}}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta z_1\cos\theta\left(z_1\cos\theta\right)^{-1} = \sqrt{\frac{8m}{E}}a\,\frac{\pi}{2}$$

Die Schwingdauer

$$\boxed{T(E) = \pi a\sqrt{\frac{2m}{E}}}$$

hängt von der Energie und damit von Maximalauslenkung (Amplitude) ab.
Für kleine Ausschläge $x_1 \ll a$ erhält man

$$U(x) = -\frac{U_0}{\left(1 + \frac{x^2}{2a^2} + \ldots\right)^2} = -U_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \ldots\right) \qquad \text{quadratische Näherung}$$

Anmerkung:

$$\cosh\xi = \frac{1}{2}\left(e^{\xi} + e^{-\xi}\right) = 1 + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{24} + \ldots$$

Mit der Federkonstante $D = \frac{2U_0}{a^2}$ ergibt sich die Periode für harmonische Schwingungen

$$T_{\text{ho}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \pi a\sqrt{\frac{2m}{U_0}} = T(U_0)\,.$$

7 Teilchen im Potenzpotential

Bestimmen Sie die Periodendauer $T(E)$ für die Bewegung eines Teilchens im "Potenzpotential"

$$U(x) = U_0\left|\frac{x}{a}\right|^n$$

mit $U_0, a > 0$.

Der rechte Umkehrpunkt $x_1 > 0$ ist bestimmt durch

$$U_0 \left(\frac{x_1}{a}\right)^n = E, \quad x_1 = a\left(\frac{E}{U_0}\right)^{\frac{1}{n}} .$$

Es folgt für die Schwingungsdauer

$$T_n(E) = \sqrt{8m}\int_0^{x_1} \mathrm{d}x \left[E - U_0\left(\frac{x}{a}\right)^n\right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2m}{E}}a\left(\frac{E}{U_0}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^n}} .$$

wobei $x = x_1 y$ substituiert wurde. Es gilt:

$$T_n(E) = \sqrt{\frac{2m}{E}}a\left(\frac{E}{U_0}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot A_n$$

mit A_n einer numerischen Konstante

n	1	2	3	4	∞
A_n	4	π	2,804	2,622	2

- $n = 1$ Dreieckspotential: $T_1 \propto \sqrt{E}$
- $n = 2$ harmonischer Oszillator: T_2 unabhängig von E
- $n = 4$ quartisches Potential: $T_4 \propto E^{-\frac{1}{4}}$
- $n = \infty$ Kastenpotential: $T_\infty \propto E^{-\frac{1}{2}}$ analog zum Pöschl-Teller-Potential

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}v^2 \quad \text{nur kinetische Energie im Kasten } -a < x < a \\ T_\infty &= \frac{4a}{v} = 2a\sqrt{\frac{2m}{E}} \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit $\lim_{n\to\infty} T_n(E)$. Dabei ist $4a$ die Laufstrecke im Kasten.

8 Abhängigkeit von Energie und Schwingungsperiode bei Oszillatoren

Zeigen Sie, dass <u>nur</u> beim harmonischen Oszillator die Schwingungsperiode unabhängig von der Energie ist und monoton wachsend mit $U(0) = 0$. $U(x)$ sei gerade. Die Maximalauslenkung a ist bestimmt durch $U(a) = E$.

$$T(a) = \sqrt{8m}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{U(a) - U(x)}}$$

Die Bedingung $\frac{\mathrm{d}T(a)}{\mathrm{d}a} = 0$ liefert eine singuläre (unbrauchbare) Integraldarstellung.

Substitution der Variablen

$$\begin{aligned} s &= U(x), \quad \mathrm{d}s = U'(x)\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}s}{U'(U^{-1}(s))} \\ t &= U(a) = E > 0 \\ \widetilde{T}(t) &= T\left(U^{-1}(t)\right) = \sqrt{8m}\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{t-s}}\frac{1}{U'(U^{-1}(s))} \end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang zwischen der Schwingungsdauer $T(a)$ und dem Potential $U(x)$ entspricht einer Abelschen Integraltransformation:

$$g(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}} = A[f](t)$$

Die zugehörige Umkehrfunktion lautet:

$$\boxed{f(s) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{g(0)}{\sqrt{s}} + \int_0^s \mathrm{d}u \frac{g'(u)}{\sqrt{s-u}}\right]}$$

Beweis durch Einsetzen in die Abel-Transformation:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^t \mathrm{d}s \left\{ \frac{g(0)}{\sqrt{s(s-t)}} + \int_0^s \mathrm{d}u \frac{g'(u)}{\sqrt{(t-s)(s-u)}} \right\}$$

Substituiere im ersten Integral: $s = u + (t-u)\sin^2\theta$, $\mathrm{d}s = 2t\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$ mit $t-u > 0$

$$\int_0^t \mathrm{d}s[s(t-s)]^{-1/2} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \frac{2t\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{t}\sin\theta\sqrt{t}\cos\theta} = \pi$$

Für das Doppelintegral (über ein Dreieck) kehren wir die Reihenfolge der Integrationen um:

$$\int_0^t \mathrm{d}s \int_0^s \mathrm{d}u \ldots = \int_0^t \mathrm{d}u \int_u^t \mathrm{d}s \ldots$$

$$\int_u^t \mathrm{d}s[(t-s)(s-u)]^{-1/2} \qquad \text{subst.} \quad s = u + (t-u)\sin^2\theta \quad \text{mit} \quad t-u > 0$$

$$\mathrm{d}s = 2(t-u)\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, 2(t-u)\sin\theta\cos\theta[(t-u)\sin^2\theta(t-u)(1-\sin^2\theta)]^{-1/2} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, 2 = \pi$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\pi}{\pi}\left[g(0) + \int_0^t \mathrm{d}u\, g'(u)\right] = g(0) + g(t) - g(0) = g(t)$$

Periode $g(t) = T$ ist Abeltransformierte von $\frac{\sqrt{8m}}{U'(U^{-1}(s))} = f(s)$
$g(t) = g(0)$ ist konstant.

$$\Rightarrow f(s) = \frac{T}{\pi\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{8m}}{U'(U^{-1}(s))}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{U}} = c\,\mathrm{d}x \quad \text{integriert} \quad 2\sqrt{U} = c\,x \quad \text{mit} \quad c = \frac{\pi}{T}\sqrt{8m}$$

$$U(x) = \frac{c^2}{4}x^2 = 2m\frac{\pi^2}{T^2}x^2 = \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(harmonisches Oszillatorpotential)}$$

Bemerkung: Es gilt die äquivalente Formel für die Inversion der Abeltransformation

$$\boxed{f(s) = \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^s \mathrm{d}u \frac{g(u)}{\sqrt{s-u}}}$$

Direktes Ableiten nach s geht nicht, denn $\frac{g(s)}{\sqrt{s-s}} = \infty$ Wir benutzen die partielle Integration:

$$\frac{1}{\sqrt{s-u}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(-2\sqrt{s-u})$$

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{-2\sqrt{s-u}\,g(u)\Big|_{u=0}^{u=s} + \int_0^s \mathrm{d}u\, 2\sqrt{s-u}\,g'(u)\right\} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{2\sqrt{s}g(0) + \int_0^s \mathrm{d}u\, 2\sqrt{s-u}\,g'(u)\right\} \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{g(0)}{\sqrt{s}} + \int_0^s \mathrm{d}u \frac{g'(u)}{\sqrt{s-u}}\right\} \end{aligned}$$

9 Rotation eines Kraftfelds

Zeigen Sie, dass das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{x^2+y^2}(-y, x, 0)$$

wirbelfrei ist.
Berechnen Sie das Wegintegral $\oint \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}$ über eine Kreislinie vom Radius R und ein Quadrat der Kantenlänge a beide in der $xy-$Ebene mit Mittelpunkt $\vec{0}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{F} &= K \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= K\vec{e}_z \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \right\} \\
&= K\vec{e}_z (x^2+y)^{-2} \left\{ 1\left(x^2+y^2\right) - x\cdot 2x + 1\left(x^2+y\right) - y\cdot 2y \right\} = \vec{0}
\end{aligned}
$$

Die Kreislinie vom Radius R wird parametrisiert durch:

$$
\vec{r}(\tau) = R(\cos\tau, \sin\tau, 0), \qquad 0 < \tau < 2\pi, \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\tau R(-\sin\tau, \cos\tau, 0)
$$

$$
W_0 = \oint\limits_{\text{Kreis}} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\tau R \begin{pmatrix} -\sin\tau \\ \cos\tau \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{K}{R^2} \begin{pmatrix} -\sin\tau \\ \cos\tau \\ 0 \end{pmatrix} R = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\tau K = 2\pi K
$$

unabhängig vom Radius R.
Das Wegintegral über das Quadrat setzt sich aus vier Beiträgen zusammen:

$$
W_1 = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y F_y(a,y) = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \frac{Ka}{a^2+y^2}
$$

subst: $y = a\tan\phi\,, \quad \frac{-\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}\,, \quad \mathrm{d}y = a\mathrm{d}\phi\frac{1}{\cos^2\phi}$

$$
\begin{aligned}
W_1 &= Ka \int_{\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{d}\phi \frac{a}{a^2} = \frac{\pi}{2}K \\
W_2 &= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x' \left(-F_x(-x',a)\right) = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x' \frac{Ka}{a^2+x'^2} = \frac{\pi}{2}K \\
W_3 &= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y' \left(-F_y(-a,-y')\right) = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y' \frac{Ka}{y'^2+a^2} = \frac{\pi}{2}K \\
W_4 &= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, F_x(x,-a) = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \frac{Ka}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}K \\
W_\square &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 2\pi K = W_0
\end{aligned}
$$

Ein zu $\vec{F}$ gehöriges Potential bestimmt man folgendermaßen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}U(x,y) &= -F_x = \frac{Ky}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow U(x,y) = K\arctan\frac{x}{y} + f(y) = K\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{y}{x}\right) + f(y) \\
\frac{\partial}{\partial y}U(x,y) &= -F_y = -\frac{Kx}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow U(x,y) = -K\arctan\frac{y}{x} + g(x)
\end{aligned}
$$

Die Funktionen $f(y)$ und $g(x)$ können höchstens Konstanten sein.

mögliches Potential $U(x,y) = -K \arctan \frac{y}{x}$
In ebenen Polarkoordinaten $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ ergibt der Ausdruck

$$U(\rho,\phi) = -K\phi\,, \quad 0 < \phi < 2\pi$$

Fazit: $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines zweifach differenzierbaren Potentials, wenn das betrachtete Raumgebiet einfach zusammenhängend ist. Das heißt: Jeder geschlossene Weg in dem Gebiet kann stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden.

10 Gebundene Keplerbewegung

Bestimmen Sie für die gebundene Keplerbewegung $r(t)$ und $\phi(t)$.

Energie - und Drehimpulserhaltung liefern nach quadratischer Ergänzung

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}\dot{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\Gamma}{r} &= E < 0, \\
\dot{r}^2 &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{2E}{m}r^2 + \frac{2\Gamma}{m}r - \frac{L^2}{m^2}\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{-2E}{m}\left[\frac{2EL^2+\Gamma^2 m}{4E^2 m} - \left(r + \frac{\Gamma}{2E}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Wir erkennen $a = -\frac{\Gamma}{2E} > 0$ als große Halbachse und für die anderen Parameter gilt:

$$1-\epsilon^2 = -\frac{2EL^2}{\Gamma^2 m}\,, \qquad a^2\epsilon^2 = \frac{\Gamma^2}{4E^2}\left(1 + \frac{2EL^2}{\Gamma^2 m}\right) = \frac{\Gamma^2 m + 2EL^2}{4E^2 m}$$

Daraus folgt dann die einfachere Beziehung, die wir integrieren können:

$$\begin{aligned}
\dot{r}^2 &= -\frac{2E}{mr^2}\left[a^2\epsilon^2 - (r-a)^2\right], \qquad \Big|^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}r\int \\
\pm t &= \sqrt{\frac{m}{-2E}}\int \mathrm{d}r \frac{r}{\sqrt{a^2\epsilon^2 - (r-a)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{m}{-2E}}\left\{a \arcsin\left(\frac{r-a}{a\epsilon}\right) - \sqrt{a^2\epsilon^2 - (r-a)^2}\right\} + \text{const.}
\end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang kann nicht elementar umgekehrt werden. Deshalb substituieren wir lieber:

$$r = a(1-\epsilon\cos\xi)\,, \quad \mathrm{d}r = a\epsilon\sin\xi\mathrm{d}\xi$$

und finden:

$$\pm t = \sqrt{\frac{m}{-2E}} \int \mathrm{d}\xi \frac{a\epsilon \sin\xi}{a\epsilon\sin\xi} a(1-\epsilon\cos\xi) = \sqrt{\frac{ma^3}{\Gamma}}(\xi - \epsilon\sin\xi)$$

wobei $t(\xi = 0) = 0$ gesetzt wurde. Also erhalten wir die Parametrisierung für den Radius r als Funktion der Zeit t:

$$\boxed{r(\xi) = a\,(1-\epsilon\cos\xi)\ , \quad t(\xi) = \sqrt{\frac{ma^3}{\Gamma}}\,(\xi - \epsilon\sin\xi)}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad & t(0) = 0 \\ & r(0) = a(1-\epsilon) = r_{\min} \end{aligned}$$

Beachte: t wächst monoton mit ξ, da $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\xi} \propto 1 - \epsilon\cos\xi > 0\,, \quad$ da $\epsilon < 1$

Nun zum Winkel:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L}{mr^2} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\xi}\right)^{-1} \\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{L}{m} r^{-2} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\xi} \\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{La\sqrt{\frac{m\,a}{\Gamma}}(1-\epsilon\cos\xi)}{ma^2(1-\epsilon\cos\xi)^2} \\ \phi(\xi) &= \frac{2L}{\sqrt{1-\epsilon^2}\sqrt{ma\Gamma}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \tan\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

Der Nenner des Vorfaktors ist:

$$(1-\epsilon^2)ma\Gamma = \frac{-2EL^2m\Gamma^2}{\Gamma^2 m(-2E)} = L^2$$

$$\boxed{\phi(\xi) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}\tan\frac{\xi}{2}\right)}$$

Dies ergibt nach Elimination von ξ die bekannte Form der Ellipse:

$$\begin{aligned} 1-\epsilon\cos\xi = 1-\epsilon\left(2\cos^2\frac{\xi}{2} - 1\right) = 1 - \epsilon\left(\frac{2}{1+\tan^2\frac{\xi}{2}} - 1\right) &= 1-\epsilon\left(\frac{2}{1+\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}} - 1\right) \\ &= \frac{1-\epsilon^2}{1+\epsilon\cos\phi} \end{aligned}$$

$$r(\phi) = \frac{a(1-\epsilon)^2}{1+\epsilon\cos\phi} \qquad \text{mit}\, a(1-\epsilon^2) = p = \frac{L^2}{m\Gamma}$$

Für ungebundene Bewegungen mit $E > 0\,(\Gamma > 0)$ erhält man nach entsprechenden Umformungen:

$$\pm t = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \mathrm{d}r \frac{r}{\sqrt{(r+a) - a^2\epsilon^2}}, \qquad a = \frac{\Gamma}{2E} > 0$$

In diesem Fall ist die Substitution $r = a(\epsilon\cosh\xi - 1)$ günstig, wobei $\epsilon > 1$ ist

$$\pm\, t = \sqrt{\frac{ma^3}{\Gamma}} \int \mathrm{d}\xi \frac{a\epsilon\sinh\xi}{a\epsilon\sinh\xi}\,(\epsilon\cosh\xi - 1)$$

$$\boxed{t(\xi) = \sqrt{\frac{ma^3}{\Gamma}}\,(\epsilon\sinh\xi - \xi)\ , \quad r(\xi) = a(\epsilon\cosh\xi - 1)}$$

$$\boxed{\phi(\xi) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\epsilon}{\epsilon-1}}\tanh\frac{\xi}{2}\right)}$$

Bestimmen Sie für die Bewegung zu $E = 0$ im attraktiven $\frac{1}{r}$-Potential $r(t)$ und $\phi(t)$. Wie verhält sich die Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ für große Zeiten $|t| \to \infty$?

Für $E = 0$ ist die Bahnkurve eine Parabel, gegeben durch: $r(\phi) = \frac{p}{1+\cos\phi}$

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = \frac{\Gamma}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\ , \quad \dot{r}^2 = \frac{2m\Gamma r - L^2}{m^2 r^2}$$

$$\pm\, t = \int \mathrm{d}r \frac{mr}{\sqrt{2\Gamma mr - L^2}} = \frac{L^2 + \Gamma mr}{3\Gamma^2 m}\sqrt{2\Gamma mr - L^2}$$

$t = 0$ entspricht

$$r_{\text{min}} = \frac{L^2}{2\Gamma m} = \frac{p}{2}$$

Beim Auflösen nach $r(t)$ ergibt sich:

$$(3\Gamma^2 mt)^2 = (L^2 + \Gamma mr)^2(2\Gamma mr - L^2)\,,$$

was eine kubische Gleichung für r ist.

Einschub: Wie löst man eine kubische Gleichung?

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

- Beseitige den x^2-Term durch eine Verschiebung: $x = y - \frac{a_2}{3}$

$$y^3 + py + q = 0\,, \quad p = a_1 - \frac{a_2^2}{3}\,, \quad q = a_0 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{2}{27}a_2^3$$

- Ansatz: $y = u + v$

$$u^3 + v^3 + \underbrace{3u^2v + 3uv^2 + p(u+v)} + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + \underbrace{(3uv + p)}_{\text{verlange=0}}(u+v) + q = 0 \quad \Rightarrow v = -\frac{p}{3u}$$

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0 \qquad \Big| \cdot u^3\,,\ \text{quadratische Gleichung für } u^3$$

$$\left(u^3\right)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad \boxed{u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$u^3v^3 = (uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}\,, \qquad u^3v^3 = \frac{q^2}{4} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = -\frac{p^3}{27}$$

und daher ist die zweite Lösung der quadratischen Gleichung

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Die Lösungsformel von Cardano (1545) für kubische Gleichungen lautet

$$\boxed{y = \zeta_3 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \zeta_3^{-1} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$$

mit $\zeta_3 = 1\,, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ den drei dritten Einheitswurzeln.

In unserem Fall lautet die positive reelle Lösung

$$r(t) = \frac{p}{2}\left[-1 + \left(1 + \zeta + \sqrt{2\zeta + \zeta^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \zeta - \sqrt{2\zeta + \zeta^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

mit den Abkürzungen $\zeta = \frac{18\Gamma t^2}{mp^3}$ und $p = \frac{L^2}{m\Gamma}$

Das Verhalten von $r(t)$ für große $|t|$ ist

$$r(t) = \left(\frac{9\Gamma t^2}{2m}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{p}{2} + \mathcal{O}\left(t^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$v_\mathrm{r} = \dot{r} \propto |t|^{-\frac{1}{3}}\,, \quad v_\phi = r\dot{\phi} = \frac{L}{mr} \propto |t|^{-\frac{2}{3}}$$

$$|\vec{v}| \propto |t|^{-\frac{1}{3}} \qquad \text{geht gegen Null für } |t| \to \infty$$

Alternativ lässt sich die folgende Parametrisierung vornehmen:

$$
\begin{aligned}
r(\xi) &= \frac{p}{2}(1+\xi^2) \\
\pm\, t &= \int \mathrm{d}\xi \frac{p\xi m p(1+\xi^2)}{2L\xi} \\
&\boxed{t(\xi) = \frac{mp^2}{2L}\left(\xi + \frac{\xi^3}{3}\right), \quad r(\xi) = \frac{p}{2}(1+\xi^2)} \\
\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{L}{mr^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\xi} = \frac{4Lmp^2(1+\xi^2)}{mp^2(1+\xi^2)^2 2L} = \frac{2}{1+\xi^2} \\
&\boxed{\phi(\xi) = 2\arctan\xi}, \quad r = \frac{p}{2}\left(1+\tan^2\frac{\phi}{2}\right) = \frac{p}{2\cos^2\frac{\phi}{2}} = \frac{p}{1+\cos\phi}
\end{aligned}
$$

Dies ist wieder die Parabelgleichung.

Warum beschreibt eigentlich $r = \frac{p}{1+\cos\phi}$ eine Parabel?
Wir übersetzen die Polarkoordinaten in kartesische:

$$
x = r\sin\phi \qquad y = -r\cos\phi
$$

(ϕ wird hier von der negativen y-Achse aus gemessen)

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{p\cos\phi}{1+\cos\phi} \stackrel{?}{=} \alpha x^2 - \frac{p}{2} \\
\alpha &= \frac{p(1-\cos\phi)}{2(1+\cos\phi)}\frac{(1+\cos\phi)^2}{p^2\sin^2\phi} = \frac{1}{2p} \\
&\boxed{y = \frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2}}
\end{aligned}
$$

Das beschreibt in der Tat eine Parabel (in Scheitelpunktdarstellung).

11 Repulsives Streupotential

Zeigen Sie: Für ein repulsives Streupotential endlicher Reichweite

$$
U(r) = \begin{cases} U_{\text{in}}(r) > 0 & \text{für } r < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}
$$

ist der totale Streuquerschnitt energieunabhängig und gleich $\sigma_{\text{tot}} = \pi R^2$.

Streuwinkel θ als Funktion des Stoßparameters b:
$b \geqslant R$ ergibt $\theta = 0$, die Teilchen spüren bei diesen Abständen kein Potential mehr.

$b = 0$ ergibt $\theta = \pi$, die Teilchen werden bei jeder Energie E zurückgestoßen ($U(r)$ soll für $r \to 0$ unbeschränkt sein)

Der differentielle Wirkungsquerschnitt berechnet sich als

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}(b)}{\mathrm{d}\vartheta}\right| = -\frac{b(\theta)b'(\theta)}{\sin\theta}$$

woraus sich der totale Wirkungsquerschnitt ergibt mit

$$\sigma_{\text{tot}} = 2\pi\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = 2\pi\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \left[-b(\theta)b'(\theta)\right] = 2\pi \frac{-b^2(\theta)}{2}\bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = -\pi\left(b^2(\pi) - b^2(0)\right) = \pi R^2$$

12 Streuung im zentralsymmetrischen Stufenpotential

Teilchen der Masse m und Geschwingigkeit v werden in einem zentralsymmetrischen Stufenpotential der Form

$$U(r) = U_0\,\Theta(R - r)$$

gestreut.

Die Stufenfunktion $\Theta(x)$ ist folgendermaßen definiert:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie den zugehörigen differentiellen Wirkungsquerschnitt unter Verwendung der dimensionslosen Größe $n = \sqrt{1 - U_0/E}$.

Wir betrachten zuerst das effektive Potential

$$U_{\text{eff}}(r) = E\frac{b^2}{r^2} + U(r) \qquad \text{mit} \quad U(r) = U_0\Theta(R - r)$$

und erkennen:
$b > R$: keine Streuung,
$U_0 < 0$ (attraktives Stufenpotential) $b < R$: stets Streuung
$U_0 > 0$ (repulsives Stufenpotential) $b < R$: Teilchen wird reflektiert bei $r = R$, wenn $E < \frac{Eb^2}{R^2} + U_0$, $1 - \frac{b^2}{R^2} < \frac{U_0}{E} = 1 - n^2$, somit $b > nR$,
$b < nR$: Das Teilchen dringt in den Potentialbereich und es gibt Streuung.

Wir behandeln zuerst den repulsiven Fall $U_0 > 0$.
Beim Eintritt in den Bereich $r \leqslant R$ erfährt das Teilchen einen Kraftstoß in radialer

Richtung $\vec{e}_r$ und ändert seine Geschwindigkeit zu $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{u}$ mit $\Delta\vec{u}$ in radialer Richtung.
Die Energieerhaltung liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}v^2 &= E = \frac{m}{2}v'^2 + U_0 \\
n = \frac{v'}{v} &= \frac{\sqrt{v^2 - 2U_0/m}}{v} = \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}
\end{aligned}$$

Mit dem Sinussatz im Dreieck erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{v}{v'} &= \frac{1}{n} = \frac{\sin\left(\pi - \alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\alpha}, \\
\frac{b}{nR} &= \frac{b}{R}\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{R^2}}\sin\frac{\theta}{2}, \\
b^2\left(\frac{1}{n} - \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 &= (R^2 - b^2)\sin^2\frac{\theta}{2}, \\
b^2\left[1 - 2n\cos\frac{\theta}{2} + n^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right] &= n^2R^2\sin^2\frac{\theta}{2},
\end{aligned}$$

somit das Zwischenergebnis

$$\boxed{b^2 = n^2R^2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1}}$$

$b = 0$ ergibt $\theta = 0$, $\cos\frac{\theta}{2} = 1$

$$\begin{aligned}
b_{\text{max}} &= nR \quad \text{entspricht} \quad \cos\frac{\theta_{\text{max}}}{2} = n < 1, \text{ denn} \\
b_{\text{max}}^2 &= n^2R^2\frac{1 - n^2}{1 + n^2 - 2n^2} = n^2R^2
\end{aligned}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt folgt als

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\frac{\mathrm{d}b^2(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{n^2R^2}{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2}n\sin\frac{\theta}{2}}{\left(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2} \\
&= \frac{n^2R^2}{4\cos\frac{\theta}{2}}\frac{(1 + n^2)\cos\frac{\theta}{2} - n - n\cos^2\frac{\theta}{2}}{\left(1 + n - 2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{n^2R^2}{4\cos\frac{\theta}{2}}\frac{\left(n\cos\frac{\theta}{2} - 1\right)\left(n - \cos\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}}$$

Im attraktiven Fall $U_0 < 0$ geht der Kraftstoß in die entgegengesetzte Richtung (zum Zentrum hin)

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha = \frac{b}{R},\\
&n = \sqrt{1 - U_0/E} > 1,\\
&\frac{v}{v'} = \frac{1}{n} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\alpha},\\
&\frac{b}{n} = b\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{R^2 - b^2}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \text{Bedingung} \quad \cos\frac{\theta}{2} > \frac{1}{n},\\
&b^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\cos\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = R^2\sin^2\frac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

Dies ist der gleiche Zusammenhang wie bei $U_0 > 0$

$$\boxed{b^2 = n^2R^2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1 + n^2 - 2n\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1}}$$

und damit gilt derselbe Ausdruck für $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$.

Der Streuwinkel liegt im Bereich $0 < \theta < 2\,\arccos\frac{1}{n}$.
Der zugehörige totale Streuquerschnitt wird nun berechnet

$$\sigma_{\text{tot}} = 2\pi\int_0^{\theta_{\max}} \mathrm{d}\theta\sin\theta\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \qquad \text{subst.} \quad z = \cos\frac{\theta}{2}\,,\ \mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

attraktiver Fall $n > 1$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{tot}} &= 2\pi n^2R^2\int_{1/n}^{1}\mathrm{d}z\frac{(nz-1)(n-z)}{(1+n^2-2nz)^2} = \frac{\pi}{2}R^2\frac{1+n^4-2nz\left(1+n^2\right)+2n^2z^2}{1+n^2-2nz}\Bigg|_{z=1/n}^{z=1}\\
&= \frac{\pi}{2}R^2\left(n^2+1-(n^2-1)\right) = \pi R^2
\end{aligned}$$

repulsiver Fall $n < 1$

$$\sigma_{\text{tot}}^{(1)} = 2\pi R^2n^2\int_n^1\mathrm{d}z\frac{(1-nz)(z-n)}{1+n^2-2nz} = \frac{\pi}{2}R^2\left(n^2+1-\left(1-n^2\right)\right) = \pi R^2n^2$$

Nur Teilchen mit $b < nR$ dringen in den Bereich $r < R$ ein und werden vom Potential in den Winkelbereich $0 < \theta < 2\arccos n$ gestreut.
Zusätzlich werden Teilchen mit $nR < b < R$ elastisch an der Kugel vom Radius R reflektiert.

Es gilt die Beziehung

$$\begin{aligned}
&b = R\cos\frac{\theta}{2} \qquad \text{mit } 0 < \theta < 2\arccos n\,,\\
&\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{R^2}{4}\,,
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{tot}}^{(1)} + 2\pi \int_n^1 \mathrm{d}z\, zR^2 = \pi R^2 n^2 + \pi R^2 \left(1 - n^2\right) = \pi R^2 .$$

13 Einfangquerschnitt für Teilchen in Zentrum eines Potentialfeldes

Bestimmen Sie den Einfangquerschnitt dafür, dass ein Teilchen der Energie $E = \frac{m}{2} v^2$ in das Zentrum des Potentialfeldes $U(r) = -\frac{\Gamma}{r^2}$ (mit $\Gamma > 0$) fällt.

Das effektive Potential lautet

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(r) &= \frac{Eb^2}{r^2} - \frac{\Gamma}{r^2} = \left(Eb^2 - \Gamma\right) \frac{1}{r^2} \\ Eb^2 - \Gamma &> 0\,, \quad \text{Teilchen wird gestreut} \\ Eb^2 - \Gamma &< 0\,, \quad \text{Teilchen fällt ins Zentrum} \\ b_{\max}^2 &= \frac{\Gamma}{E} \end{aligned}$$

Der Einfangquerschnitt ist definiert als $\pi b_{\max}^2$ und ergibt sich zu

$$\boxed{\sigma_{\text{ein}} = \frac{\pi \Gamma}{E}}$$

$$L^2 = (mbv)^2 = 2mEb^2$$

Es kommt also zu einem Einfang, falls $b^2 < b_{\max}^2$, das heißt $L < \sqrt{2m\Gamma}$ ist. Wenn der Drehimpuls den Wert $\sqrt{2m\Gamma}$ unterschreitet, stürzt das Teilchen in das Zentrum.

Bestimmen Sie den Einfangquerschnitt für singuläre attraktive Potentiale der Form

$$\begin{aligned} U(r) &= -\frac{G_n}{r^n}\,, \qquad n > 2\,, G_n > 0 \\ U_{\text{eff}}(r) &= \frac{Eb^2}{r^2} - \frac{G_n}{r^n} \end{aligned}$$

- für $E < U_0$: Streuung
- für $E > U_0$: Einfang

wobei U_0 das Maximum des effektiven Potentials ist.

Bestimme die Höhe U_0 des Maximums:

$$\frac{\mathrm{d}U_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = -\frac{2Eb^2}{r^3} + \frac{nG_n}{r^{n+1}} = 0 \quad \text{bei } r = r_0$$

$$r_0^{n-2} = \frac{nG_n}{2Eb^2}\,, \quad U_0 = Eb^2\left(\frac{2Eb^2}{nG_n}\right)^{\frac{2}{n-2}} - G_n\left(\frac{2Eb^2}{nG_n}\right)^{\frac{n}{n-2}}$$

$$U_0 = \left(\frac{2Eb^2}{nG_n}\right)^{\frac{n}{n-2}}\left(\frac{Eb^2 nG_n}{2Eb^2} - G_n\right)$$

$$U_0 = \left(\frac{n}{2} - 1\right) G_n \left(\frac{2Eb^2}{nG_n}\right)^{\frac{n}{n-2}} > 0$$

Teilchen mit $E > U_0$ werden eingefangen

$$E^{n-2} > \left(\frac{n}{2} - 1\right)^{n-2} G_n^{n-2}\left(\frac{2Eb^2}{nG_n}\right)^n$$

$$b^{2n} < \frac{n^n G_n^n 2^{n-2}}{2^n E^2 (n-2)^{n-2} G_n^{n-2}} = \frac{n^n G_n^2}{4E^2(n-2)^{n-2}}$$

mit $\sigma_{\text{ein}} = \pi b_{\max}^2$ folgt

$$\boxed{\sigma_{\text{ein}} = \pi n (n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{G_n}{2E}\right)^{\frac{2}{n}}}$$

14 Teilchen im harmonischen Oszillatorpotential

Ein Teilchen der Energie $E = \frac{m}{2}v^2$ werde am abgeschnittenen, harmonischen Oszillatorpotential

$$U(r) = \frac{m}{2}\omega^2(r - R^2)\theta(R - r)$$

gestreut. Berechnen Sie den zugehörigen differentiellen Wirkungsquerschnitt.

Wegen $\vec{L} = L\vec{e_z} = \text{const.}$ findet sie Bewegung in der xy-Ebene statt. Die wirkende Kraft im Potentialgebiet $r < R$ ist

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{m}{2}\omega^2\vec{\nabla}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = -m\omega^2\vec{r}$$

Die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = -\omega^2 x\,, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y$$

haben die allgemeine Lösung

$$x(t)\,,y(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$$

Die Anfangsbedingungen für die Oszillatorbewegung im Bereich $r < R$ lauten

$$x(0) = -\sqrt{R^2-b^2}\,,\quad y(0) = b\,,\quad \dot{x}(0) = v\,,\quad \dot{y}(0) = 0.$$

Damit lautet die Lösung der Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} x(t) &= -\sqrt{R^2-b^2}\cos(\omega t) + \frac{v}{\omega}\sin(\omega t), \\ y(t) &= b\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Nach einer Zeit τ erreicht das Teilchen wieder den Rand der Kreisscheibe $x^2+y^2 = R^2$ und verlässt diese mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{\dot{x}(\tau)^2+\dot{y}(\tau)^2}\,,$
(wegen $E = \text{const.}$) Für den Streuwinkel gilt dabei

$$\sin\theta = \frac{|\dot{y}(\tau)|}{v} = \frac{b\omega}{v}\,|\sin(\omega\tau)|$$

Zur Bestimmung von τ aus $x(\tau)^2+y(\tau)^2 = R^2$ setzen wir

$$\begin{aligned} & c = \cos(\omega\tau)\text{ und } s = \sin(\omega\tau)\,,\quad c^2 = 1-s^2 \\ & R^2 = b^2c^2 + (R^2-b^2)c^2 + \frac{v^2}{\omega^2}s^2 - 2\frac{v}{\omega}\sqrt{R^2-b^2}sc\,, \\ & \left(\frac{v^2}{\omega^2} - R^2\right)s^2 = 2\frac{v}{\omega}\sqrt{R^2-b^2}sc\,, \qquad (s = 0\text{ trivial}) \\ & \left(\frac{v^2}{\omega^2} - R^2\right)^2 s^2 = 4\frac{v^2}{\omega^2}(R^2-b^2)(1-s^2)\,, \qquad \Big|\text{setze ein } |s| = \frac{v}{b\omega}\sin\theta \\ & b^4 - b^2R^2\left(1+\eta\sin^2\theta\right) + \frac{R^4}{4}(1+\eta)^2\sin^2\theta = 0. \qquad \text{mit } \eta = \left(\frac{v}{\omega R}\right)^2 \end{aligned}$$

Es ergeben sich die zwei positiven Lösungen

$$\boxed{b_\pm^2 = \frac{R^2}{2}\left[1+\eta\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1-\eta^2\sin^2\theta}\right]}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}b_+^2}{\mathrm{d}\theta} &= -\frac{R^2\sin\theta}{2\sqrt{1-\eta^2\sin^2\theta}}\left[\sqrt{1-\eta^2\sin^2\theta} - \eta\cos\theta\right]^2 < 0 \\ \frac{\mathrm{d}b_-^2}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{R^2\sin\theta}{2\sqrt{1-\eta^2\sin^2\theta}}\left[\sqrt{1-\eta^2\sin^2\theta} + \eta\cos\theta\right]^2 > 0 \end{aligned}$$

$b_+^2 = R^2$ bei $\theta = 0$ und b_+^2 nimmt mit wachsendem θ ab.
$b_-^2 = R^2$ bei $\theta = \pi$ und b_-^2 ist kleiner R^2 für $0 < \theta < \pi$.

Teilchen mit Stoßparameter b_+ und b_- werden um den gleichen Winkel θ gestreut.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{2\sin\theta}\left(\left|\frac{\mathrm{d}b_+^2}{\mathrm{d}\theta}\right| + \left|\frac{\mathrm{d}b_-^2}{\mathrm{d}\theta}\right|\right) = \frac{1}{2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(b_-^2 - b_+^2\right) \\ &= -\frac{R^2}{2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\cos\theta\sqrt{1-\eta^2\sin\theta}\right]\end{aligned}$$

Das Ergebnis für den differenziellen Wirkungsquerschnitt lautet also

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{R^2(1+\eta^2\cos 2\theta)}{2\sqrt{1-\eta^2\sin^2\theta}}} \qquad \text{mit} \quad \eta = \frac{2E}{m\omega^2R^2}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Für $\eta > 1$ ist der Streuwinkel eingeschränkt: $0 < \theta < \arcsin\frac{1}{\eta}$, $E > \frac{m}{2}(\omega R)^2$ bedeutet hohe Energie. Bei $\eta > 1$ gibt es zwei Formen des Graphen für $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\omega}$: eine mit Minimum, eine ohne. Die Position des Minimums wird bestimmt durch

$$\cos 2\theta = 2 - \frac{3}{\eta^2} < 1 \quad \Rightarrow \eta < \sqrt{3}$$

Für die Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts substituieren wir $z = \cos\theta$. Für $\eta < 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{tot}} &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\sin\theta\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \pi R^2\int_0^1\mathrm{d}z\frac{1+\eta^2(2z^2-1)}{\sqrt{1-\eta^2(1-z^2)}} \\ &= \pi R^2 z\sqrt{1+\eta^2(z^2-1)}\,\Big|_0^1 = \pi R^2\end{aligned}$$

Für $\eta > 1$ entsprechend

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{tot}} &= \pi R^2\int_{\sqrt{1-\eta^{-2}}}^1\mathrm{d}z\frac{1+\eta^2(2z^2-1)}{\sqrt{1-\eta^2(1-z^2)}} \\ &= \pi R^2 z\sqrt{1+\eta^2(z^2-1)}\,\Big|_{\sqrt{1-\eta^{-2}}}^1 = \pi R^2(1-\ldots\sqrt{1-1}) = \pi R^2\end{aligned}$$

Ergänzung Im Bereich $r < R$ bewegt sich das Teilchen auf einer Ellipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{\omega^2}{v^2}\left(x + \sqrt{R^2-b^2}\frac{y}{b}\right)^2 = 1 = (x,y)\mathcal{M}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

mit $\mathcal{M}$ einer reell-symmetrischen 2×2 Matrix. Es gilt die Beziehung

$$(\text{Eigenwerte von } \mathcal{M})^{-\frac{1}{2}} = \text{Halbachsen der Ellipse}$$

Die große/kleine Halbachse sind gegeben durch:

$$a_\pm = \frac{1}{2\omega}\left(\sqrt{v^2+2bv\omega+R^2\omega^2} \pm \sqrt{v^2-2bv\omega+R^2\omega^2}\right)$$

$a_\pm$ nehmen mit v zu

$$\begin{aligned} a_+\Big|_{v=0} &= R\,, \quad a_+\Big|_{v\to\infty} = \frac{v}{\omega} \\ a_-\Big|_{v=0} &= 0\,, \quad a_-\Big|_{v\to\infty} = b < R \end{aligned}$$

$$\boxed{a_+ > R\,, \quad a_- < b}$$

Der Streuwinkel ist $\theta = |\pi - 2\phi_0|$ mit dem Drehwinkel $\phi_0 = \frac{\pi}{2} + \gamma$. Aus $\theta = 2\gamma$ folgt

$$\sin\theta = 2\sin\gamma\cos\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1+\tan^2\gamma}$$

$\tan\gamma = \frac{x-\text{Komponente}}{y-\text{Komponente}}$ des Eigenvektors $\vec{e}_+$ zum großen Eigenwert von $\mathcal{M}$

$$\tan\gamma = \frac{\omega^2(2b^2-R^2) - v^2 + \sqrt{(v^2+R^2\omega^2)^2-(2bv\omega)^2}}{2b\omega\sqrt{R^2-b^2}}$$

liefert den einfacheren Ausdruck

$$\boxed{\sin\theta = \frac{2b\omega^2\sqrt{R^2-b^2}}{\sqrt{(v^2+R^2\omega^2)^2-(2bv\omega)^2}}} \quad \text{mit } \eta = \left(\frac{v}{R\omega}\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}b} = 0 \quad \Rightarrow \frac{b^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\eta}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}(1+\eta) \quad \text{was kleiner 1 sein muss.}$$

Für $\eta > 1$ liefert die erste Lösung $\sin\theta_{\max} = \frac{1}{\eta}$ und

Für $\eta < 1$ erhält man von der zweiten Lösung $\sin\theta_{\max} = 1$

Man sieht, dass zwei Stoßparameter $b_\pm$ zum selben Streuwinkel führen.

$$b_\pm = \frac{R^2}{2}\left[1+\eta\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1-\eta^2\sin^2\theta}\right]$$

15 Streuung mit großem Stoßparameter

Bei Streuung mit großem Stoßparameter b wirkt das Potential $U(r)$ nur schwach und der Streuwinkel θ ist entsprechend klein.

Zeigen Sie, dass der folgende Zusammenhang gilt

$$\theta = -\frac{b}{E}\int_b^\infty \mathrm{d}r \frac{U'(r)}{\sqrt{r^2-b^2}}.$$

Die xz-Ebene sei die Streuebene und die Ablenkung soll in x-Richtung erfolgen.

$$\sin\theta = \frac{v_x}{v} \simeq \theta, \quad \text{da } \theta \text{ klein ist}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = F_x = -\frac{x}{r}U'(r), \quad x \simeq b, \quad \mathrm{d}t \simeq \frac{\mathrm{d}z}{v} \quad \text{die Bahn ist nahezu geradlinig}$$

$$v_x = -\frac{b}{mv}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z \frac{U'(r)}{r}\,, \quad r^2 = b^2 + z^2\,, \quad \mathrm{d}z = \frac{r\mathrm{d}r}{z} = \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-b^2}}$$

Wenn z von $-\infty$ nach ∞ läuft, geht der Abstand r zweimal von b nach ∞. Somit ergibt sich

$$\theta = \frac{v_x}{v} = -\frac{2b}{mv^2}\int_b^\infty \mathrm{d}r \frac{U'(r)}{\sqrt{r^2-b^2}}$$

Das Ergebnis für die Kleinwinkelstreuung lautet somit:

$$\boxed{\theta(b) = -\frac{b}{E}\int_b^\infty \mathrm{d}r \frac{U(r)}{\sqrt{r^2-b^2}}} \qquad \text{substituiere: } s = \frac{1}{r^2}\,,\ t = \frac{1}{b^2}$$

$\Rightarrow$ entspricht einer Abeltransformation

Wie geht $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ für kleine Winkel bei der Streuung im Potential $U(r) = K/r^n$ mit $K > 0$?

$$\theta = \frac{Kbn}{E}\int_b^\infty \mathrm{d}r \frac{1}{r^{n+1}\sqrt{r^2-b^2}}$$

substituiere: $r = \frac{b}{\cos\psi}$, $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$, $\quad \mathrm{d}r = \frac{\sin\psi \mathrm{d}\psi}{\cos^2\psi}$

$$\theta = \frac{Kbn}{Eb^{n+1}} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\psi \sin\psi (\cos\psi)^{-2+n+1} \frac{\cos\psi}{\sin\psi}$$

also $\boxed{\theta = \frac{KI_n}{Eb^n}}$ $\qquad$ mit $I_n = n \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\psi (\cos\psi)^n = \begin{cases} \text{rational} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \pi \cdot \text{rational} & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$

$b = \left(\frac{KI_n}{E\theta}\right)^{1/n}$ $\quad$ liefert für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{2\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b^2}{\mathrm{d}\theta}\right| , \; \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \simeq \theta^{-1-2/n-1} E^{-2n}$$

$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \text{const.} \cdot E^{-2/n} \theta^{-2(1+1/n)}}$ $\quad \sigma_{\text{tot}} \simeq \int_0^{\dots} \mathrm{d}\theta \, \theta^{-1-2/n}$ divergiert für noch so großes n.

$n = 1$, Coulombpotential Rutherfordformel: $\theta^{-4} E^{-2}$, $\frac{1}{r^2}$ Potential: $E^{-1}\theta^{-3}$

16 Kombinierte Federn

Ein Massenpunkt m ist durch zwei sequentiell gekoppelte Federn der Federkonstanten D_1 und D_2 mit einer festen Wand verbunden. Es gebe nur eine Bewegung in der horizontalen Richtung.

Formulieren Sie die Lagrangefunktion des Systems und lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

x_1 ist die Auslenkung der Feder 1 und x_2 die Auslenkung des Massenpunkts.

kinetische Energie: $T = \frac{m}{2}\dot{x}_2^2$

potentielle Energie: $U = \frac{D_1}{2}x_1^2 + \frac{D_2}{2}(x_2 - x_1)^2$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{D_2}{2}(x_2 - x_1)^2 - \frac{D_1}{2}x_1^2$$

Lagrangegleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 , \quad D_1 x_1 + D_2(x_1 - x_2) = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 , \quad m\ddot{x}_2 + D_2(x_2 - x_1) = 0$$

x_1 ist fest an x_2 gekoppelt: $x_1 = \frac{D_2}{D_1+D_1} x_2$.

eingesetzt in die Bewegungsgleichung für x_2:

$$m\ddot{x}_2 + D_2 x_2 \left(1 - \frac{D_2}{D_1 + D_2}\right) = 0\,, \quad m\ddot{x}_2 + \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} x_2 = 0$$

Die effektive (reduzierte) Federkonstante ist

$$D = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} < D_{1,2}$$

Wir erkennen (erhalten) einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{D_1 D_2}{m(D_1 + D_2)}}$$

mit der Schwingungslösung

$$x_2(t) = x_2(0)\cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_2(0)}{\omega}\sin(\omega t) = \frac{D_1 + D_2}{D_2} x_1(t)$$

Bei Serienschaltung von n Federn

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}_n^2$$
$$U = \frac{D_1}{2}x_1^2 + \frac{D_2}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{D_3}{2}(x_3 - x_2)^2 + \ldots + \frac{D_n}{2}(x_n - x_{n-1})^2$$

Führe neue generalisierte Koordinaten ein:

$$y_1 = x_1\,, \quad y_2 = x_2 - x_1\,, \ldots, \quad y_n = x_n - x_{n-1}.$$

Dann ist

$$x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

Die Lagrangefunktion lautet nun

$$L = \frac{m}{2}(\dot{y}_1 + \ldots + \dot{y}_n)^2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{D_j}{2} y_j^2$$

Bewegungsgleichungen

$$m(\ddot{y}_1 + \ldots + \ddot{y}_n) + \underbrace{D_j y_j}_{\text{gleich für jedes } j} = 0 \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

also folgt

$$y_j = \frac{z}{D_j}$$

und die Bewegungsgleichung für z lautet

$$m\left(\frac{1}{D_1} + \ldots + \frac{1}{D_n}\right)\ddot{z} + z = 0$$

dies ist eine Oszillatorgleichung

$$\frac{m}{D}\ddot{z} + z = 0$$

Man erhält für die effektive Federkonstante bei Serienschaltung

$$\boxed{\frac{1}{D} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{D_j}}$$

17 Jacobi-Identität bei Poissonklammern

Weisen Sie die Gültigkeit der Jacobi-Identität für die Poissonklammer bei einem System mit f Freiheitsgraden nach.

$$\{U, \{V, W\}\} + \{V, \{W, U\}\} + \{W, \{U, V\}\} = 0$$

Betrachte die ersten beide Terme $\{U, \{V, W\}\} - \{V, \{U, W\}$.

Die Poissonklammer $\{V, W\}$ kann als Wirkung eines linearen Differentialoperators D_V auf W angesehen werden: $\{V, W\} = D_V W$.

$$D_V = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial V}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\right)$$

Man kann ihn noch allgemeiner schreiben

$$D_V = \sum_{j=1}^{2f} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\text{, wobei} \quad x_j = p_j, \quad x_{j+f} = q_j \ \text{ für } 1 \leqslant j \leqslant f$$

Term 1 + Term 2 = $D_U D_V W - D_V D_U W$

$$= \sum_{j,k=1}^{2f}\left[a_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(b_j \frac{\partial W}{\partial x_j}\right) - b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_k \frac{\partial W}{\partial x_k}\right)\right]$$

Dieser Ausdruck enthält keine zweiten Ableitungen von W, denn

$$\sum_{j,k=1}^{2f} a_k b_j \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 W}{\partial x_j \partial x_k} \right) = 0.$$

Also treten nur erste Ableitungen von W nach Impulsen und Koordinaten auf

$$\{U, \{V, W\}\} - \{V, \{U, W\}\} = \sum_{i=1}^{f} \left(C_i \frac{\partial W}{\partial p_i} + D_i \frac{\partial W}{\partial q_i} \right)$$

Zur Bestimmung von C_j, D_j setzen wir $W = p_j$ oder q_j

$$C_j = \{U, \{V, p_j\}\} - \{V, \{U, p_j\}\} = \left\{ U, \frac{\partial V}{\partial q_j} \right\} + \left\{ \frac{\partial U}{\partial q_j}, V \right\} = \frac{\partial}{\partial q_j} \{U, V\}$$

$$D_j = \{U, \{V, q_j\}\} - \{V, \{U, q_j\}\} = - \left\{ U, \frac{\partial V}{\partial p_j} \right\} - \left\{ \frac{\partial U}{\partial p_j}, V \right\} = - \frac{\partial}{\partial q_j} \{U, V\}$$

Somit gilt insgesamt

$$\{U, \{V, W\}\} + \{V, \{W, U\}\} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial \{U, V\}}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial p_i} - \frac{\partial \{U, V\}}{\partial p_i} \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) = \{\{U, V\}, W\} = -\{W, \{U, V\}\}$$

und die Gültigkeit der Jacobi-Identität ist gezeigt.

18 Rotation eines unsymmetrischen Kreisels um körperfeste Achse

Ein unsymmetrischer Kreisel mit Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ rotiere um die körperfeste $\vec{e}_3$-Achse mit dem Winkel $\phi(t)$. Zusätzlich rotiere die $\vec{e}_3$-Achse mit dem Winkel $\theta(t)$ um eine raumfeste $\vec{e}_z$-Achse, mit der sie den konstanten Winkel α einschließt. Bestimmen Sie die kinetische Energie T_{rot} des starren Körpers.

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \left[\Theta_1 \omega_1^2(t) + \Theta_2 \omega_2^2(t) + \Theta_3 \omega_3^2(t) \right]$$

wobei die ω_i die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ bezüglich der Hauptträgheitsachsen $\vec{e}_{1,2,3}(t)$ sind. In unserem Fall gilt:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\, \vec{e}_3(t) + \dot{\theta}\, \vec{e}_z$$

wobei $\vec{e_z}$ die folgende Zerlegung hat

$$\vec{e}_z = \cos\alpha\,\vec{e}_3 + \sin\alpha\,(\cos\phi\,\vec{e}_1 - \sin\phi\,\vec{e}_2)\,.$$

Damit ergeben sich für die körperfesten Komponenten

$$\omega_1 = \sin\alpha\,\cos\phi\,\dot{\theta}\,,\quad \omega_2 = -\sin\alpha\,\sin\phi\,\dot{\theta}\,,\quad \omega_3 = \dot{\phi} + \cos\alpha\,\dot{\theta}$$

welche zum Ausdruck

$$T_{\text{rot}} = \frac{\Theta_1}{2}\sin^2\alpha\,\cos^2\phi(t)\,\dot{\theta}^2 + \frac{\Theta_2}{2}\sin^2\alpha\,\sin^2\phi(t)\,\dot{\theta}^2 + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot{\phi} + \dot{\theta}\cos\alpha\right)^2$$

für die kinetische Energie führen.

19 Trägheitsmoment eines gleichseitigen Dreiecks

Berechnen Sie für eine Platte von der Form eines gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge a und Masse m) das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes. Die Drehachse steht senkrecht auf der Platte.

Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ist:

$$A = \frac{a}{2}h = \frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

In Polarkoordinaten liegt ein Drittel der Fläche im Winkelbereich $-\frac{\pi}{3} < \phi < \frac{\pi}{3}$. Mit dem Schwerpunkt im Ursprung des Koordinatensystems gilt für die vertikale Seite $x = \frac{h}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} = r\cos\phi$. Die Fläche A berechnet man in Polarkoordinaten wie folgt:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{h}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} = r\cos\phi,\\
A &= 3\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \mathrm{d}\phi \int_0^{a\sqrt{3}/6\cos\phi} \mathrm{d}r\, r = 3\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\mathrm{d}\phi\,\frac{a^2}{24\cos^2\phi}\\
&= \frac{a^2}{8}\tan\phi\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{a^2}{8}\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment berechnet man analog

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{3m}{A}\int_{\pi/3}^{\pi/3}\mathrm{d}\phi\int_0^{a\sqrt{3}/6\cos\phi}\mathrm{d}r\,r^3 = \frac{4\sqrt{3}ma^4}{4a^2\cdot 144}\int_{\pi/3}^{\pi/3}\mathrm{d}\phi\frac{1}{\cos^4\phi}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{144}ma^2\int_{\pi/3}^{\pi/3}\mathrm{d}\phi\frac{1}{\cos^2\phi}\left(1+\tan^2\phi\right) = \frac{\sqrt{3}ma^2}{144}\left(\tan\phi+\frac{\tan^3\phi}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{144}ma^2(\sqrt{3}+\sqrt{3})\cdot 2\end{aligned}$$

$$\boxed{\Theta = \frac{ma^2}{12}}$$

Berechnen Sie den Trägheitstensor Θ_{ij} bezüglich des Schwerpunkts S eines homogenen starren Körpers der Masse m von der Gestalt eines regulären Tetraeders mit der Kantenlänge a.

Zunächst wollen wir uns klarmachen, dass hier ein Kugelkreisel vorliegt mit

$$\Theta_{ij} = \delta_{ij}\Theta_T$$

Betrachte <u>das Trägheitsellipsoid</u>

Es sei Θ_{ij} der Trägheistensor eines starren Körpers. Die Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^{3}\Theta_{ij}x_ix_j = 1$$

beschreibt eine Ellipsoidfläche. Das Trägheitsmoment bei Rotation um die Achse $\vec{n} = \frac{\vec{\omega}}{|\omega|}$ ist

$$\Theta_{\vec{n}} = \frac{2T_{\mathrm{rot}}}{\vec{\omega}^2} = \sum_{i,j=1}^{3}\Theta_{ij}n_in_j \qquad \Bigg|\frac{1}{\sqrt{\Theta_{\vec{n}}}\sqrt{\Theta_{\vec{n}}}}$$

<u>Erkenntnis</u>: Der Punkt $\vec{x} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{\Theta_{\vec{n}}}}$ liegt auf dem Trägheitsellipsoid und er hat von dessen Ursprung den Abstand

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \frac{|\vec{n}|}{\sqrt{\Theta_{\vec{n}}}} = \frac{1}{\sqrt{\Theta_{\vec{n}}}}$$

Aus Symmetriegründen muss das Trägheitsellipsoid mit derselben Rotationssymmetrie wie beim regulären Tetraeder eine **Kugel** sein. $\Rightarrow$ Kugelkreisel $\Theta_{ij} = \delta_{ij}\Theta_T$.
Wir berechnen zuerst die Raumhöhe h und das Volumen V des regulären Tetraeders:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 , \quad h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$
$$V = A\frac{h}{3} = a^3\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 34} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

Eine Cavalerizerlegung des Tetraeders in reguläre Dreiecksscheiben liefert dasselbe Ergebnis

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \mathrm{d}z \,\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{za}{h}\right)^2 \qquad \text{subst.: } z = hz' \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{6}a}{3}a^2 \underbrace{\int_0^1 \mathrm{d}z'\, z'^2}_{=1/3} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \end{aligned}$$

Wir brauchen das Flächenträgheitsmoment des gleichseitigen Dreiecks

$$\frac{\Theta_{\text{Scheibe}}}{\rho_{\text{Scheibe}}} = \frac{ma^2a^2\sqrt{3}}{12\cdot 4m} = \frac{\sqrt{3}}{48}a^4$$

Nun liefert die Aufintegration der Beiträge von Dreiecksscheiben

$$\begin{aligned} \Theta_T &= \frac{m}{V}\int_0^h \mathrm{d}z\,\frac{\sqrt{3}}{48}\left(\frac{za}{h}\right)^4 \qquad \text{subst.: } z = hz' \\ &= \frac{12ma\sqrt{6}\sqrt{3}a^4}{\sqrt{2}a^3\cdot 3\cdot 48}\underbrace{\int_0^1 \mathrm{d}z'\, z'^4}_{=1/5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Theta_T = \frac{ma^2}{20}}$$

Zum Vergleich: Bei einem Würfel gilt $\Theta_W = \frac{ma^2}{6}$ und bei einem regulären Oktaeder $\Theta_O = \frac{ma^2}{10}$.

20 Homogene Vollkugel mit zylindrischem Loch

Berechnen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Schwerpunkts für eine homogene Vollkugel vom Radius R, aus dem ein zylinderisches Loch vom Radius $r < R$ konzentrisch durch den Kugelmittelpunkt herausgebohrt wurde. Die Masse dieses homogenen starren Körpers ist m.
In Zylinderkoordinaten $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$ hat man die Bereiche

$$0 < \phi < 2\pi\,, \quad r < \rho < \sqrt{R^2 - z^2}\,, \quad -\sqrt{R^2 - r^2} < z < \sqrt{R^2 - r^2}$$

Das Volumen berechnet sich damit zu

$$V = \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} \mathrm{d}z \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} \mathrm{d}\rho\, \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} \mathrm{d}z\, \frac{1}{2}(R^2 - z^2 - r^2)$$
$$= 2\pi \left[(R^2 - r^2)\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right], \quad V = \frac{4\pi}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}$$

Die Trägheitsmomente bezüglich des Ursprungs lauten

$$\Theta_{zz} = \frac{3m}{4\pi(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2 \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} \mathrm{d}z\, \left[(R^2 - z^2)^2 - r^4 \right]$$
$$= \frac{3m}{4}(R^2 - r^2)^{-\frac{3}{2}} \left[(R^4 - r^4)\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{2}{3}R^2(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}(R^2 - r^2)^{\frac{5}{2}} \right]$$
$$= \frac{3m}{4} \left[R^2 + r^2 - \frac{2}{3}R^2 + \frac{1}{5}(R^2 - r^2) \right]$$
$$\boxed{\Theta_{zz} = \frac{m}{5}\left(2R^2 + 3r^2\right)}$$

$$\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \frac{3m}{4\pi(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2 \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} \mathrm{d}z \int_r^{\sqrt{R^2-r^2}} \mathrm{d}\rho\, \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \left(z^2 + \rho^2 \sin^2\phi\right)$$
$$= \frac{3m}{2}(R^2 - r^2)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} \mathrm{d}z \left\{ 2z^2 \frac{1}{2}(R^2 - z^2 - r^2) + \frac{1}{4}\left[(R^2 - z^2)^2 - r^2 \right] \right\}$$
$$= \frac{3m}{8} \left[R^2 + r^2 + \frac{2}{3}(R^2 - 2r^2) - \frac{3}{5}(R^2 - r^2) \right]$$

wobei der Ausdruck in den geschwiften Klammern $\frac{1}{4}\left[R^4 - r^4 + 2z^2(R^2 - 2r^2) - 3z^4 \right]$ ist.

$$\boxed{\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \frac{m}{10}\left(4R^2 + r^2\right)}$$

$$\Theta_{xy} = \Theta_{xz} = \Theta_{yz} = 0\,, \quad \text{wegen} \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\ (\cos\phi\,\sin\phi, \cos\phi, \sin\phi) = (0,0,0)$$

Dieser starre Körper stellt einen symmetrischen Kreisel mit den Hauptträggheitsmomenten $\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{m}{10}(4R^2 + r^2)$ und $\Theta_3 = \frac{m}{5}(2R^2 + 3r^2)$ dar, wobei $\Theta_{1,2} < \Theta_3$.

21 Kleine Schwingungen eines starren Körpers an masseloser Stange

Ein starrer Körper (Masse M und Trägheitsmoment Θ bezüglich des Schwerpunkts S für Rotationen um die y-Achse) ist am Punkt A mit einer masselosen Stange der

Länge l verbunden. Der Abstand zwischen A und S sei s.
Das andere Ende der Stange ist im Ursprung befestigt und das System ist dem homogenen Schwerefeld $\vec{g} = g\vec{e}_z$ ausgesetzt.

Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen für kleine Schwingungen in der xz-Ebene.

Position der Schwerpunkts

$$x_\mathrm{S} = l\sin\phi_1 + s\sin\phi_2\,, \qquad z_\mathrm{S} = l\cos\phi_1 + s\cos\phi_2$$

potentielle Energie

$$U_\mathrm{pot} = -Mgz_S = -Mg(l\cos\phi_1 + s\cos\phi_2)$$

in quadratischer Näherung

$$\cos\phi = 1 - \frac{\phi^2}{2} + \dots$$
$$U_\mathrm{pot} = \text{const.} + \frac{1}{2}(\phi_1, \phi_2)\begin{pmatrix} Mgl & 0 \\ 0 & Mgs \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Die 2×2 Matrix nennen wir V_{ij}. Kinetische Energie:

$$T_\mathrm{kin} = \frac{M}{2}\left(\dot{x}_\mathrm{S}^2 + \dot{z}_\mathrm{S}^2\right) + \frac{\Theta}{2}\dot{\phi}_2^2 = \frac{M}{2}\Big(l^2\dot{\phi}_1^2 + s^2\dot{\phi}_2^2 + 2ls\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_1 - \phi_2)\Big) + \frac{\Theta}{2}\dot{\phi}_2^2$$

für kleine Auslenkungen

$$T_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}_1\,, \dot{\phi}_2\right)\begin{pmatrix} Ml^2 & Mls \\ Mls & Ms^2 + \Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix}$$

Und die 2×2 Matrix nennen wir T_{ij}. Bestimmung der Eigenfrequenzen:

$$\det(V - \omega^2 T) = \begin{vmatrix} Mgl - Ml^2\omega^2 & -Mls\omega^2 \\ -Mls\omega^2 & Mgs - (Ms^2 + \Theta)\omega^2 \end{vmatrix}$$
$$= Ml\{\Theta l\omega^4 - [Ms(l+s) + \Theta]\, g\omega^2 + Msg^2\} = 0$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung lauten

$$\omega_\pm^2 = \frac{g}{2l\Theta}\left[Ms(l+s) + \Theta \pm \sqrt{[Ms(l+s) + \Theta]^2 - 4Mls\Theta}\right],$$

und beide sind offensichtlich positiv.
Spezialfall: $s = 0$. Der Körper ist am Schwerpunkt S mit der Stange verbunden

$$\omega_\pm^2 = \frac{g}{2l\Theta}(\Theta \pm \Theta)\,, \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}\,, \quad \omega_- = 0$$

$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ist die übliche Frequenz eines Pendels

$\omega_- = 0$ entspricht der freien Rotation des starren Körpers um dessen Schwerpunkt.

22 Freie Rotation eines unsymmetrischen Kreisels

Man bestimme die freie Rotation eines unsymmetrischen Kreisel mit Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3$ für den Fall $L^2 = 2E\Theta_2$
Allgemein gilt nur die Ungleichung $2E\Theta_1 < L^2 < 2E\Theta_3$

Erhaltungsgrößen: kinetische Energie und Drehimpulsquadrat

$$\begin{aligned} 2T_{\text{rot}} &= 2E = \Theta_1\omega_1^2 + \Theta_2\omega_2^2 + \Theta_3\omega_3^2 \\ L^2 &= \Theta_1^2\omega_1^2 + \Theta_2^2\omega_2^2 + \Theta_3^2\omega_3^2 \end{aligned}$$

Bilde die Kombinationen

$$\begin{aligned} L^2 - 2E\Theta_2 &= 0 = \Theta_1(\Theta_1 - \Theta_2)\omega_1^2 + \Theta_3(\Theta_3 - \Theta_2)\omega_3^2 \\ 0 < 2E\Theta_3 - L^2 &= 2E(\Theta_3 - \Theta_2) = \Theta_1(\Theta_3 - \Theta_1)\omega_1^2 + \Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2^2 \end{aligned}$$

Man erhält die Relationen

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \pm\left[\frac{(\Theta_3 - \Theta_2)(2E - \Theta_2\omega_2^2)}{\Theta_1(\Theta_3 - \Theta_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ \omega_3 &= \pm\omega_1\sqrt{\frac{\Theta_1(\Theta_2 - \Theta_1)}{\Theta_3(\Theta_3 - \Theta_2)}} \qquad \text{direkt proportional} \end{aligned}$$

Die 2. Eulergleichung besagt

$$\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = (\Theta_3 - \Theta_1)\frac{\omega_1\omega_3}{\Theta_2} = \pm\sqrt{\frac{(\Theta_2 - \Theta_1)(\Theta_3 - \Theta_2)}{\Theta_1\Theta_3}}\,\frac{2E - \Theta_2\omega_2^2}{\Theta_2}$$

Wir können sie in die einfachere Form

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = 1 - x^2}$$

bringen durch Umskalierungen:

$$\tau = \pm t\sqrt{\frac{(\Theta_2 - \Theta_1)(\Theta_3 - \Theta_2)}{\Theta_1\Theta_3}}\,\frac{L}{\Theta_2}\,, \quad x = \omega_2\frac{\Theta_2}{L} \quad (L^2 = 2E\Theta_2)$$

wobei x und τ dimensionslos sind.
Nun können wir elementar die Differentialgleichung 1. Ordnung integrieren

$$\frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \mathrm{d}\tau\,, \quad \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x} = \tau\,, \quad \boxed{x = \tanh\tau}$$

Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System KS lauten

$$\boxed{\omega_2(t) = \frac{L}{\Theta_2}\tanh(\gamma t)}, \quad \gamma = \pm\frac{L}{\Theta_2}\sqrt{\frac{(\Theta_2-\Theta_1)(\Theta_3-\Theta_2)}{\Theta_1\Theta_3}}$$

$$\omega_1(t) = \pm\sqrt{\frac{\Theta_2(\Theta_3-\Theta_2)}{\Theta_1(\Theta_3-\Theta_1)}}\sqrt{\frac{2E}{\Theta_2}-\frac{L^2}{\Theta_2^2}\tanh^2(\gamma t)}$$

wobei $2E/\Theta_2 = (L/\Theta_2)^2$

und mit der Identität $1-\tanh^2(\gamma t) = \frac{\cosh^2(\gamma t)-\sinh^2(\gamma t)}{\cosh^2(\gamma t)} = \frac{1}{\cosh^2(\gamma t)}$ erhält man

$$\boxed{\omega_1(t) = \pm\sqrt{\frac{\Theta_2(\Theta_3-\Theta_2)}{\Theta_1(\Theta_3-\Theta_1)}}\frac{L}{\Theta_2\cosh(\gamma t)}, \quad \omega_3(t) = \pm\sqrt{\frac{\Theta_2(\Theta_2-\Theta_1)}{\Theta_3(\Theta_3-\Theta_1)}}\frac{L}{\Theta_2\cosh(\gamma t)}}$$

Zur Beschreibung der (absoluten) Bewegung des unsymmetrischen Kreisels im Inertialsystem IS benötigen wir die zeitabhängigen Eulerwinkel $\theta(t), \phi(t), \psi(t)$.
Wir wählen $\vec{L} = L\vec{e}_z$ und führen die zyklische Permutation $123 \to 312$ der Hauptachsen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ durch.

Die körperfesten Komponenten von $\vec{L}$ sind:

$$\begin{aligned}
L_2 &= \vec{L}\cdot\vec{e}_z = L\vec{e}_z\cdot\vec{e}_2 = L\cos\theta = \Theta_2\omega_2\\
L_3 &= \vec{L}\cdot\vec{e}_3 = L\vec{e}_z\cdot\vec{e}_3 = L\sin\theta\sin\psi = \Theta_3\omega_3\\
L_1 &= \vec{L}\cdot\vec{e}_1 = L\vec{e}_z\cdot\vec{e}_1 = L\sin\theta\cos\psi = \Theta_1\omega_1
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert sofort

$$\cos\theta(t) = \frac{\Theta_2}{L}\omega_2(t) = \tanh(\gamma t)$$

und aus Teilen der zweiten durch die dritte Gleichung folgt

$$\tan\psi(t) = \frac{\Theta_3\omega_3(t)}{\Theta_1\omega_1(t)} = \pm\sqrt{\frac{\Theta_3(\Theta_2-\Theta_1)}{\Theta_1(\Theta_3-\Theta_2)}} = \text{const.}$$

Es fehlt der Eulerwinkel $\phi(t)$. Zu seiner Berechnung benutzen wir die bekannten Beziehungen nach der Permutation $123 \to 312$

$$\begin{aligned}
\omega_3 &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\\
\omega_1 &= \dot{\phi}\cos\theta\sin\psi - \dot{\theta}\sin\psi
\end{aligned}$$

Man erhält durch Elimination von $\dot{\theta}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{\omega_1 \cos\psi + \omega_3 \sin\psi}{\sin\theta} \frac{L^2 \sin\theta}{L^2 \sin\theta} = L \frac{\Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_3 \omega_3^2}{\Theta_1^2 \omega_1^2 + \Theta_2^2 \omega_3^2} \\ &= L \frac{\frac{\Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)}{\Theta_3 - \Theta_1} + \frac{\Theta_2(\Theta_2 - \Theta_1)}{\Theta_3 - \Theta_1}}{\frac{\Theta_1 \Theta_2(\Theta_3 - \Theta_2)}{\Theta_3 - \Theta_1} + \frac{\Theta_3 \Theta_2(\Theta_2 - \Theta_1)}{\Theta_3 - \Theta_1}} = L \frac{\Theta_3 - \Theta_2 + \Theta_2 - \Theta_1}{\Theta_1 \Theta_3 - \Theta_1 \Theta_2 + \Theta_2 \Theta_3 - \Theta_1 \Theta_3} = \frac{L}{\Theta_2}\end{aligned}$$

somit

$$\phi(t) = \frac{L}{\Theta_2} t + \text{const.} \qquad \text{gleichförmige Drehung um } \vec{e}_z$$

Aus unseren Formeln folgt, dass sich der Vektor $\vec{\omega}(t)$ der momentanen Winkelgeschwindigkeit asymptotisch (für $t \to +\infty$) der $\vec{e}_2$-Achse annähert.

$$\lim_{t \to +\infty} \vec{\omega}(t) = \frac{L}{\Theta_2} \lim_{t \to \infty} \vec{e}_2(t)$$

Dieses $\vec{e}_2(t)$ strebt asymptotisch der raumfesten $\vec{e}_z$-Achse zu ($\cos\theta(t) = \tanh(\gamma t) \to 1\,, \quad \theta \to 0$). Des weiteren sind ψ und $\dot{\phi}$ während der speziellen Drehbewegung mit $2E\Theta_2 = L^2$ konstant.

23 Zwei Stangen an masselosem Scharnier

Zwei gleiche, dünne, homogene Stangen der Länge a und Masse m sind durch ein masseloses Scharnier verbunden. Das eine Ende ist am Ursprung fixiert und das andere gleitet entlang der $x-$Achse. Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems für Knick- und Rotationsbewegungen.

Wir betrachten zunächst Stange 1.
Ein Massenelement $m\mathrm{d}\beta$ mit $\beta \in [0,1]$ befindet sich am Ort

$$\vec{r}_1 = a\beta\,(\cos\phi, \sin\phi\cos\psi, \sin\phi\sin\psi)$$

Hierbei ist ϕ der Winkel zwischen der Stange und der $x-$Achse und ψ der Drehwinkel um die $x-$Achse.

$$T_1 = \frac{m}{2} \int_0^1 \mathrm{d}\beta\, \dot{\vec{r}}_1^2 = \frac{m}{2} a^2 \int_0^1 \mathrm{d}\beta\, \beta^2 \left(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\phi\right) = \frac{m}{6} a^2 \left(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\phi\right)$$

Analog gilt für Stange 2

$$\begin{aligned}
\vec{r}_2 &= a\left((2-\beta)\cos\phi, \beta\sin\phi\cos\psi, \beta\sin\phi\sin\psi\right) \\
T_2 &= \frac{m}{2}\int_0^1 \mathrm{d}\beta\, \dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{m}{2}a^2\int_0^1 \mathrm{d}\beta \left[(2-\beta)^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi + \beta^2\left(\dot{\phi}\cos^2\phi + \dot{\psi}^2\sin^2\phi\right)\right] \\
&= \frac{m}{2}a^2\left[\frac{7}{3}\dot{\phi}^2\sin^2\phi + \frac{1}{3}\left(\dot{\phi}^2\cos^2\phi + \dot{\psi}^2\sin^2\phi\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\boxed{T_{\text{kin}} = T_1 + T_2 = \frac{m}{3}a^2\left[\dot{\phi}^2 + (3\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2)\sin^2\phi\right]}$$

Das Trägheitsmoment für Drehungen der Anordnung um die $x-$Achse lautet

$$\Theta' = 2m\int_0^1 \mathrm{d}\beta\,(a\,\beta\sin\phi)^2 = \frac{2}{3}ma^2\sin^2\phi$$

und $\frac{\Theta'}{2}\dot{\psi}^2$ ist genau der letzte Term in T_{kin}.

24 Kleine Schwingung eines starren Körpers um feste horizontale Achse

Man bestimme die Frequenz ω kleiner Schwingungen, mit der ein starrer Körper im Schwerefeld um eine <u>feste horizontale</u> Achse schwingt. Der Aufhängepunkt hat den Abstand s vom Schwerpunkt.

$$U_{\text{pot}} = -Mgs\cos\phi$$

Die Schwerpunktsgeschwindigkeit lautet

$$\begin{aligned}
\vec{v}_s &= s\dot{\phi}(\cos\phi, 0, -\sin\phi) \\
T_{\text{trans}} &= \frac{M}{2}\vec{v}_s^2 = \frac{M}{2}s^2\dot{\phi}^2
\end{aligned}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist $\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\vec{e}_y$. Die Hauptträgheitsachsen $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des starren Körpers rotieren mit dem Winkel $\phi(t)$ um $\vec{e}_y$.

$$\vec{e}_j(t) = R_y(\phi(t))\vec{e}_j^{(0)} \quad \text{für } j = 1,2,3\,, \quad R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Die Komponenten von $\vec{\omega}$ bezüglich der zeitabhängigen Hauptträgheitsachsen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\omega_j &= \vec{\omega}(t)\cdot\vec{e}_j(t) = \dot{\phi}\,\vec{e}_y\cdot\left(R_y(\phi)\vec{e}_j^{\,(0)}\right) = \dot{\phi}\left(R_y^t(\phi)\vec{e}_y\right)\cdot\vec{e}_j^{\,(0)}\\ &= \dot{\phi}\,\vec{e}_y\cdot\vec{e}_j^{\,(0)} = \dot{\phi}\,n_j \qquad \text{mit}\, n_1^2+n_2^2+n_3^2=1\end{aligned}$$

n_j sind hierbei konstante Richtungskosinusse, festgelegt durch die Orientierung des starren Körpers bei $\phi = 0$. Hierbei wurde die folgende Identität zwischen Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ und der Matrix A angewandt:

$$\vec{w}\cdot(A\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^{3} w_i\,(A_{ij}v_j) = \sum_{i,j=1}^{3}\left(A_{ji}^t w_i\right)v_j = \left(A^t\vec{w}\right)\cdot\vec{v}$$

Die kinetische Energie der Rotation um den Schwerpunkt ist somit

$$\begin{aligned}T_{\text{rot}} &= \frac{\dot{\phi}^2}{2}\left(\Theta_1 n_1^2+\Theta_2 n_2^2+\Theta_3 n_3^2\right)\\ \mathcal{L} &= \frac{\dot{\phi}^2}{2}\left(Ms^2+\Theta_1 n_1^2+\Theta_2 n_2^2+\Theta_3 n_3^2\right)+Mgs\cos\phi\end{aligned}$$

Gemäß dem Steinerschen Satz ist $\Theta_{\text{eff}} = Ms^2+\Theta_1 n_1^2+\Theta_2 n_2^2+\Theta_3 n_3^2$ das effektive Trägheitsmoment. Mit der quadratischen Näherung $\cos\phi = 1-\frac{\phi^2}{2}+\ldots$ ergibt sich die Frequenz kleiner Schwingungen

$$\omega^2 = \frac{Mgs}{\Theta_{\text{eff}}}\,,\quad \omega = \sqrt{\frac{Mgs}{\Theta_{\text{eff}}}}\,,\quad \Theta_{\text{eff}} = Ms^2+\Theta_1 n_1^2+\Theta_2 n_2^2+\Theta_3 n_3^2$$

25 Schaukelbewegung eines homogenen Halbzylinders

Ein homogener Halbzylinder (Masse m und Radius r) liegt mit seiner runden Seite auf der $xy-$Ebene parallel zur $y-$Achse ausgerichtet. Er schaukelt im Schwerefeld $-g\vec{e}_z$ hin und her. Wie lautet die Bewegungsgleichung und was ist die Frequenz kleiner Schwingungen?

Zuerst bestimmen wir die Lage des Schwerpunkts.

$$(x_S, y_S) = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^\pi \mathrm{d}\phi\int_0^R \mathrm{d}r\, r^2(r\cos\phi, r\sin\phi) = \frac{2R}{3\pi}(\sin\phi,\cos\phi)_0^\pi = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$$

Der Abstand des Schwerpunkt vom Mittelpunkt beträgt $s = \frac{4R}{3\pi} = 0{,}424413\,R$. Das Trägheitsmoment des Halbzylinders bei Rotation um den Mittelpunkt ist

$$\Theta' = \frac{m}{\frac{\pi}{2}R^2 h}h\int_0^\pi \mathrm{d}\phi\int_0^R \mathrm{d}r\, r\, r^2 = \frac{m}{2}R^2$$

Mit dem Steinerschen Satz ergibt sich das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunkts zu

$$\Theta' = \Theta_S + ms^2\,, \quad \Theta_S = mR^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)$$

Die momentane Position des Schwerpunkts während der Schaukelbewegung ist

$$X_S = R\phi - s\sin\phi\,, \quad Z_S = R - s\cos\phi$$

$$\begin{aligned} T_{\text{kin}} &= \frac{m}{2}\left(\dot{X}_s^2 + \dot{Z}_s^2\right) + \frac{\Theta_2}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}^2\left[\left(1 - \frac{4}{3\pi}\cos\phi\right)^2 + \left(\frac{4}{3\pi}\sin\phi\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right] \\ &= \frac{m}{2}R^2\dot{\phi}^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\phi\right) \end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion lautet also

$$\mathcal{L} = T_{\text{kin}} - U_{\text{pot}} = m\dot{\phi}^2\left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3\pi}\cos\phi\right) + mgR\frac{4}{3\pi}\cos\phi$$

und die resultierende Bewegungsgleichung ist

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\phi}\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\phi\right)\right] - \frac{4}{3\pi}\dot{\phi}^2\sin\phi + \frac{4g}{3\pi R}\sin\phi = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\ddot{\phi}\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\phi\right) + \frac{4}{3\pi}\dot{\phi}^2\sin\phi + \frac{4g}{3\pi R}\sin\phi = 0}$$

Linearisiere die Bewegungsgleichung mit $\sin\phi \approx \phi\,, \cos\phi \approx 1$

$$\begin{aligned} &\ddot{\phi}\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right) + \frac{4g}{3\pi R}\phi = 0 \\ &\omega^2 = \frac{4g}{3\pi R\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)} = \frac{8g}{R(9\pi - 16)}\,, \quad \omega = \sqrt{\frac{8g}{R(9\pi - 16)}} = 0{,}80732\sqrt{\frac{g}{R}} \end{aligned}$$

26 Schlafender Kreisel

Betrachte einen schweren, symmetrischen Kreisel dessen Figurenachse vertikal steht, das heißt $\theta = 0$. Man untersuche die Stabilität des „schlafenden Kreisels“ (d.h. der

Rotation um die inertiale Hochachse).

Mit den Anfangsbedingungen $\theta(0) = 0 = \dot\theta(0)$ lauten die Erhaltungsgrößen

$$\begin{aligned} L_3 &= \Theta_3(\dot\phi\cos\phi + \dot\psi) = \Theta_3(\dot\phi_0 + \dot\psi_0) \\ L_z &= \Theta_1\dot\phi\sin^2\theta + L_3\cos\theta = L_3 \\ E &= \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\right) + \frac{L_3^2}{2\Theta_3} + Mgs\cos\theta = \frac{L_3^2}{2\Theta_3} + Mgs \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung für $u = \cos\theta$ lautet

$$\begin{aligned} \dot u^2 &= P_3(u) \\ \text{Generell gilt}\quad P_3(u) &= \frac{2}{\Theta_1}\left(E - \frac{L_3^2}{2\Theta_3}\right)(1-u^2) - \frac{1}{\Theta_1^2}(L_z - L_3 u)^2 + \frac{2}{\Theta_1}Mgsu(u^2-1) \\ \text{und hier speziell}\quad P_3(u) &= \frac{2}{\Theta_1}Mgs(1-u^2) - \frac{L_3^2}{\Theta_1^2}(1-u)^2 - \frac{2}{\Theta_1}Mgsu(1-u^2) \\ &= (1-u)^2\left[\frac{2}{\Theta_1}Mgs(1+u) - \frac{L_3^2}{\Theta_1^2}\right] \end{aligned}$$

Man sieht, dass $P_3(u)$ eine doppelte Nullstelle bei $u = 1$ hat und die zweite Ableitung dort den Wert

$$P_3''(1) = 2\left[\frac{4}{\Theta_1}Mgs - \frac{L_3^2}{\Theta_1^2}\right] \begin{matrix} > 0 & \text{instabil} \\ < 0 & \text{stabil} \end{matrix}$$

Für $P_3''(1) > 0$ liegt die dritte Nullstelle bei $u_3 < 1$, und $P_3(u)$ ist positiv im Bereich $u_3 < u < 1$. Für $P_3''(1) < 0$ liegt die dritte Nullstelle bei $u_3 > 1$ und $P_3(u)$ ist negativ im physikalischen Bereich $-1 < u < 1$. Der Rotationszustand mit $\theta = 0 = \dot\theta$ ist daher stabil, wenn

$$\frac{L_3^2}{\Theta_1^2} > \frac{4}{\Theta_1}Mgs\,, \quad L_3^2 > 4Mgs\Theta_1$$

oder ausgedrückt durch die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_3 = \frac{L_3}{\Theta_3} > \frac{2}{\Theta_3}\sqrt{Mgs\Theta_1} = \omega_{\text{krit}}$$

ω_3 muss größer als ω_{krit} sein, damit die aufrechte Rotation stabil ist. Für $\Theta_1 \gg \Theta_3$ ist ω_{krit} sehr groß (z.B. bei einem langen Stift). Wenn Reibung ω_3 unter ω_{krit} gebracht hat, „wacht“ der „schlafende“ Kreisel auf und fängt bei kleinsten Störungen an zu taumeln und zu schwanken. Die torkelnde Bewegung wird mit der Zeit immer heftiger.

27 Fallbahn einer Kugel auf einem Stab mit Schale

Ein Stab der Länge l ruht zum Zeitpunkt $t = 0$ unter dem Winkel ϕ_0 gegen die $x-$Achse. Auf dem Stab befindet sich eine kleine Schale und direkt dahinter liegt eine kleine Kugel. Nun wird der Stab gelöst und fällt zu Boden. Ist es möglich, dass die Kugel in die Schale fällt?

Mit dem Trägheitsmoment bezüglich des Ursprungs

$$\Theta = \frac{m}{l}\int_0^l \mathrm{d}x\, x^2 = \frac{m}{3}l^2$$

lautet Lagrangefunktion des Stabs

$$\mathcal{L} = \frac{m}{6}l^2\dot{\phi}^2 - mg\frac{l}{2}\sin\phi$$

wobei $\frac{l}{2}\sin\phi$ die Höhe des Schwerpunkts ist.

$$\text{Bewegungsgleichung:}\quad \frac{m}{3}l^2\ddot{\phi} = -mg\frac{l}{2}\cos\phi\,,\quad \ddot{\phi} = -\frac{3g}{2l}\cos\phi$$
$$\text{Energieerhaltung:}\quad \frac{m}{6}l^2\dot{\phi}^2 + mg\frac{l}{2}\sin\phi = mg\frac{l}{2}\sin\phi_0$$

Das Stabende $y = l\sin\phi$ erfährt die Vertikalbeschleunigung

$$\ddot{y} = l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\phi}\cos\phi\right) = l\left(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi\right)$$

Wir eliminieren $\ddot{\phi}$ und $\dot{\phi}^2$

$$\ddot{y} = g\left[-\frac{3}{2}\cos^2\phi - 3\sin\phi\,(\sin\phi_0 - \sin\phi)\right] = -gN$$

Der Verstärkungsfaktor N im Vergleich zur Beschleunigung $-g$ der kleinen Kugel ist

$$N = \frac{3}{2}\left(1-\sin^2\phi\right) + 3\sin\phi\,(\sin\phi_0 - \sin\phi)$$

Mit der Substitution $\xi = \sin\phi\,,\xi_0 = \sin\phi_0$ ergibt sich ein quadratischer Ausdruck

$$N(\xi) = \frac{3}{2} + 3\xi\xi_0 - \frac{9}{2}\xi^2 = \frac{1}{2}\left[3 + \xi_0^2 - (3\xi - \xi_0)^2\right]$$

Man findet die Werte

$$N(0) = \frac{3}{2}\,,\quad N\left(\frac{\xi_0}{3}\right) = \frac{1}{2}(3+\xi_0^2)\,,\quad N\left(\frac{2\xi_0}{3}\right) = \frac{3}{2}\,,\quad N(\xi_0) = \frac{3}{2}(1-\xi_0^2)$$

Verlange $\frac{3}{2}(1-\xi_0^2) > 1\,,\quad \xi_0^2 < \frac{1}{3}\,,\quad \sin\phi_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad \phi_0 < 35{,}26^\circ$

Dann ist $|\ddot{y}|$ während der ganzen Fallbewegung des Stabs größer als g. Die Kugel wird in der Schale auf dem horizontal liegenden Stab landen. Es sind hier Zwangskräfte am Werk, die die Beschleunigung des sich drehenden Stabs im Schwerefeld verstärken.

28 Anhang: Hyperbolische Funktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$
$$\sin(ix) = i \sinh x \qquad \cos(ix) = \cosh x$$
$$\sin \xi = \frac{1}{2i}\left(e^x - e^{-x}\right) = i\frac{e^x - e^{-x}}{2} = i \sinh x$$
$$(\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Umkehrfunktionen

i)

$$x = \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \qquad \Big| \cdot 2e^y$$
$$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \qquad (e^y - x)^2 = 1 + x^2$$
$$e^y = x + \sqrt{1 + x^2} \qquad \text{Hier kann kein - stehen, da sonst } e^y < 0 \text{ wäre.}$$
$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \operatorname{arsinh} x$$

ii)

$$x = \cosh y > 1$$
$$\Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \qquad \text{(analog zu oben)}$$
$$\Rightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \operatorname{arcosh} x$$

iii)

$$x = \tanh y = 1 - \frac{2}{e^{2y} + 1}$$
$$\Rightarrow \dots$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{artanh} x$$

Ableitungen der hyperbolischen Umkehrfunktionen

i)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

ii)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \ldots = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

iii)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{artanh}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1-x\right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^2}$$