Technische Universität München
Physik-Department **B. Garbrecht, C. Tamarit, G. Zattera**

Mechanik (Theoretische Physik 1)

Sommersemester 2018

Abgabe bis Freitag, 18.05.18, 12:00 neben PH 3218.

Übungsblatt Nr. 6 Dieses Blatt wird in den Übungen vom 21.05. - 25.05.18 besprochen.

Aufgabe 1:
Lenzscher Vektor 3 Punkte

Beweise, dass das Keplerpotential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

neben dem Drehimpuls $\mathbf{L}$ und der Energie E noch eine weitere Erhaltungsgrösse hat, den sogenannten "Lenzschen Vektor"

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{1}{m\alpha}\,\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{1}{r}\,\mathbf{r}.$$

[Hinweis: Drücke= $\dot{\mathbf{L}}$ durch $\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{p}, \mathbf{r}$ und deren Skalarprodukte aus und verwende die Bewegungsgleichung für das Keplerpotenzial. Betrachte das Skalarprodukt $\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{r}$ und zeige weiterhin, dass $\mathbf{\Lambda}$ zum Perihel der Bahnkurve zeigt, und $|\mathbf{\Lambda}|$ die Exzentrizität ϵ ist.]

Aufgabe 2:
Der geführte Kreisel 3 Punkte

Ein dünner Ring mit Radius r und Masse m dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_s um seine Symmetrieachse (siehe Abb. 1, wo die masselosen Speisen nicht eingezeichnet sind). Ein Gestell dreht die Symmetrieachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_p um die raumfeste z-Achse.

Betrachte ein rotierendes Koordinatensystem (x, y, z), das fest mit dem rotierenden Gestell verbunden ist und dessen Koordinatenursprung im ruhenden Punkt der Symmetrieachse liegt. Auf die infinitesimalen Massenelemente $dm = md\phi/(2\pi)$ des Reifens wirken dann die Corioliskräfte $d\mathbf{F} = 2dm\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_p$, von denen einige in Abb. 1 eingezeichnet sind. Man erkennt unschwer, dass die Corioliskräfte versuchen, die Symmetrieachse y so aufzurichten, dass die beiden Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_s$ und $\boldsymbol{\omega}_p$ parallel werden. Die beiden gleich großen Lagerkräfte $\mathbf{F_1}$ und $\mathbf{F_2}$ verhindern diese Aufrichtung, indem sie das Drehmoment

$$\mathbf{N} = I_s\,\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s, \tag{1}$$

das in die negative x-Richtung weist, auf die Symmetrieachse ausüben. (I = Trägheitsmoment für Drehungen um die Symmetrieachse.)

Beweisen Sie Gleichung (1), indem Sie die von den Corioliskräften $d\mathbf{F}_c$ erzeugten Drehmomente berechnen und aufintegrieren.

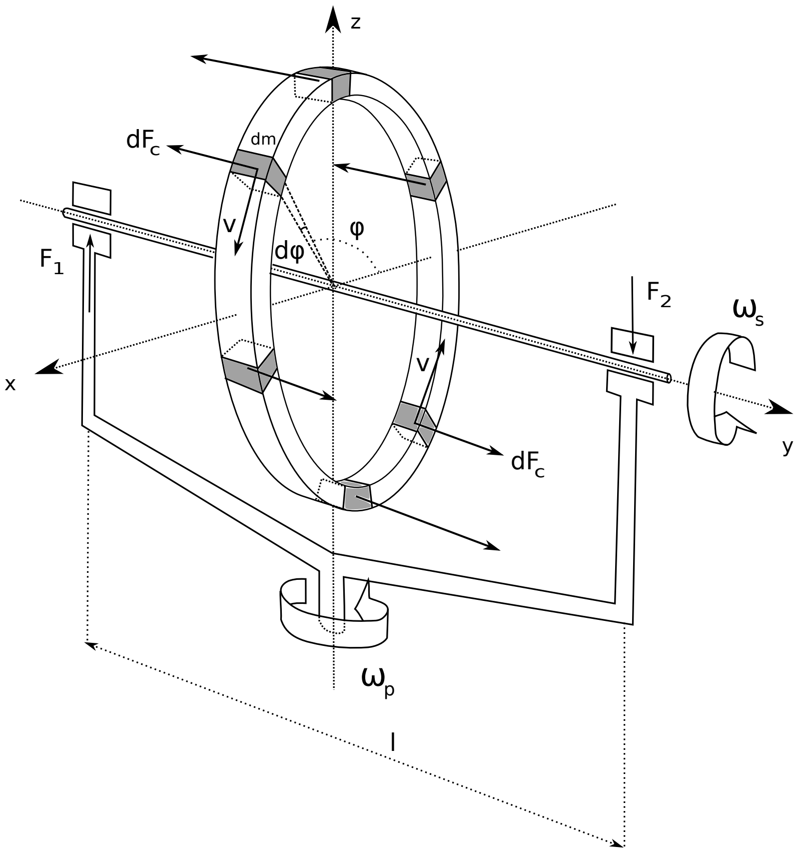

Abbildung 1: Der geführte Kreisel

Aufgabe 3:
Periheldrehung des Merkurs **4 Punkte**

In der Newtonschen Mechanik ist die Bahn des Merkurs, sofern die Effekte weiterer Planeten vernachlässigt werden, eine perfekte Ellipse. Vielkörpereffekte können zu eine Präzession des Perihelions führen, jedoch zeigen die Messungen, dass im Verlauf von 100 Jahren sich das Perihelion um 43″ weiter fortschreitet, also dies in der Newtonschen Mechanik erklärt werden kann. Gemäß Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie ist das effektive Potential zur führenden Ordnung in den relativistischen Korrekturen gegeben durch

$$U_{eff}(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{1}{c^2}\frac{GMl^2}{2mr^3}\,.$$

Zeigen Sie, dass sich mit dieser Näherung eine Präzession des Perihelions auch unabhängig von der Gegenwart weiterer Himmelskörper ergibt. Kann dies, mit den beobachteten Werten

$$\begin{aligned}\frac{GM_\odot}{c^2} =&1.48 \times 10^5\text{cm}\,,\\ a =&5.78 \times 10^{12}\text{cm}\,,\\ \varepsilon =&0.2056\,,\end{aligned}$$

die Drehung von 43″ in einem Jahrhundert erklären?
Hint: Lösen Sie diese Aufgabe in der gleichen Herangehensweise wie in der Vorlesune (Newtonsche

Mechanik Skript S. 43). Zur Lösung der Differentialgleichung für for $s = 1/r$ wählen Sie den perturbativen Ansatz $s = s_0 + s_1$, wobei s_0 die Keplersche Lösung ist.