

## Mechanik (Theoretische Physik 1)

Sommersemester 2018

Abgabe bis Freitag, 27.04.18, 12:00 neben PH 3218.

### Übungsblatt Nr. 2

Dieses Blatt wird in den Übungen vom 30.04. - 04.05.18 besprochen.

#### Aufgabe 1:

#### Konservatives Feld

3 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{f}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

1. Zeigen Sie, daß dieses Feld rotationsfrei in seinem maximalen Definitionsbereich, d.h. in jedem Punkt, in dem es wohldefiniert ist, ist.
2. Abgesehen von einer dimensionsbehafteten Konstante kann  $\mathbf{f}$  für ein Kraftfeld stehen. Zeigen Sie, daß ein solches Feld in seinem maximalen Definitionsbereich nicht konservativ ist, indem Sie die geleistete Arbeit, um von  $A = (1, 0, 0)$  nach  $B = (-1, 0, 0)$  zu gelangen, berechnen, und zwar auf zwei verschiedenen Wegen entlang des Einheitskreises, welcher durch

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

parametrisiert ist.

3. Schränken Sie nun den Definitionsbereich von  $\mathbf{f}$  auf positive Werte von  $y$  ein. Berechnen Sie nun die von  $A = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$  nach  $B = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$  geleistete Arbeit entlang der Wege  $\gamma$  und  $\rho$  von Abbildung 1: Hängt die Arbeit hier vom Weg ab? Ist das Feld im eingeschränkten Definitionsbereich konservativ?

#### Aufgabe 2:

#### Rocket science!

2 Punkte

Eine Rakete habe eine Zeitabhängige Masse  $m(t)$ , wobei  $m(t = 0) \equiv m_0$ . Die Rakete beschleunigt durch den Ausstoß von Gasen mit einer Geschwindigkeit vom Betrag  $v_e$  im momentanen Ruhesystem der Rakete. Unter Vernachlässigung der Gravitationskraft ist dann der Gesamtimpuls von Rakete und ausgestoßenen Gasen erhalten. Leiten Sie damit die Tsiolkovskysche Raketengleichung

$$v - v_0 = v_e \log \frac{m_0}{m} \quad (1)$$

her, wobei  $v_0$  und  $m_0$  die Anfangsgeschwindigkeit und -Masse zu einer Bezugszeit  $t_0$  sind. Eine Saturn V Rakete, wie Sie in den Apollomissionen zum Mond verwendet wurde, hatte 3 Stufen –wobei jede Stufe von der Rakete nach Verbrauch des Treibstoffs abgestoßen wurde – mit den folgenden Eigenschaften:

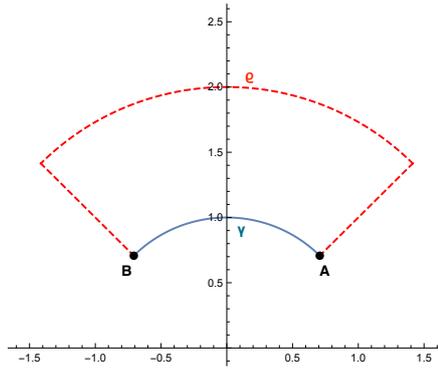


Abbildung 1: Zwei Pfade zum Herausarbeiten der Arbeit.

Stufe	Gesamtmasse (kg)	Trockengewicht (kg)	$v_e$ (m/s)
I	$2.3 \times 10^6$	$1.3 \times 10^5$	2580
II	$4.8 \times 10^5$	$3.6 \times 10^4$	4130
III	$1.2 \times 10^5$	$1.0 \times 10^4$	4130

Welche Geschwindigkeit konnte die Saturn V in Abwesenheit von Schwerkraft erreichen? Nehmen Sie dabei an, daß jede Stufe mit verschwindender Relativgeschwindigkeit von der Rakete abgestoßen wird.

**Aufgabe 3:**  
**Pirouette**

**2 Punkte**

Eine Eisläuferin, deren ausgebreitete Arme insgesamt 160cm weit reichen, trägt Hanteln mit Masse  $M = 4\text{kg}$  in jeder ihrer Hände, und dreht sich um Ihre vertikale Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  von einer halben Drehung pro Sekunde. Sie beugt dann ihre Arme, so daß sich jede der Hanteln mit einer Geschwindigkeit von 10 cm/s auf die Drehachse zubewegt. Angenommen, der Drehimpuls der Arme sei gegeben durch

$$|\mathbf{L}|_{\text{arm}} = \frac{1}{3}mR^2\omega, \quad (2)$$

wobei  $R$  der horizontale Abstand zwischen der Drehachse und jeder der Hände ist, und  $m = 3\text{kg}$  die Masse eines jeden der Arme, wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Eisläuferin nach vier Sekunden? Ist die kinetische Energie der Hanteln erhalten, und begründen Sie Ihre Antwort?

**Aufgabe 4:**  
**Flächensatz**

**3 Punkte**

Ein punktförmiges Objekt der Masse  $m$  befindet sich am Ende eines Fadens und rotiert in der horizontalen Ebene um jenen Punkt, in dem der Faden in eine senkrecht angeordnete Hohlstange eintritt. Der Faden wird nun in das Innere der Stange gezogen, so daß der zeitabhängige Abstand zwischen dem Objekt und der Stange mit  $l(t) = L \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$  gegeben ist, wobei  $\tau = 3\text{ s}$ . Ist der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  erhalten, und begründen Sie Ihre Antwort? Falls die anfängliche Winkelgeschwindigkeit  $\omega(0) = 1.5\text{ rad/s}$ , welcher Winkel wurde dann nach  $\Delta t = 2\text{ s}$  überstrichen?