Technische Universität München
Physik-Department **B. Garbrecht, C. Tamarit, G. Zattera**

Mechanik (Theoretische Physik 1)

Sommersemester 2018

Abgabe bis Freitag, 29.06.18, 12:00 neben PH 3218.

Übungsblatt Nr. 12 Dieses Blatt wird in den Übungen vom 2.07. - 6.07.18 besprochen.

Aufgabe 1: Noetherladungen mit Tansformationen der Zeit — 5 Punkte

In der Vorlesung wurden infinitesimale Transformationen der generalisierten Koordinaten $q_i(t) \to q_i'(t) = q_i(t) + \epsilon\delta Q_i[q_i(t)]$ besprochen. Ist die Wirkung unter diesen invariant, so daß

$$dt\left(\mathcal{L}\left[t, q_i'[t], \frac{dq_i'}{dt}[t]\right] - \epsilon\frac{dR}{dt}\right) = dt\mathcal{L}\left[t, q_i[t], \frac{dq_i}{dt}[t]\right], \tag{1}$$

dann gibt es eine erhaltene Noetherladung

$$Q = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta Q_i - R. \tag{2}$$

Betrachten wir nun Transformationen sowohl der verallgemeinerten Koordinaten als auch der Zeitvariablen

$$\begin{aligned} q_i(t) &\to q_i'(t') = q_i(t) + \epsilon\delta Q[q_i(t)], \\ t &\to t' = t + \epsilon\delta T(t), \end{aligned}$$

für welche die Wirkung ebenso invariant bleiben soll.

1. Zeigen Sie, daß (bis auf höhere Korrekturen in ϵ)

$$\begin{aligned} dt'\mathcal{L}\left[t', q_i'[t'], \frac{dq_i'}{dt'}[t']\right] &= dt\left(1 + \epsilon\frac{d\delta T}{dt}\right)\mathcal{L}\left[t + \epsilon\delta T, q_i'[t'], \frac{dq_i'}{dt}[t'] - \epsilon\frac{d\delta T}{dt}\frac{dq_i}{dt}[t]\right] \\ &= dt\left(\mathcal{L}\left[t, q_i'[t'], \frac{dq_i'}{dt}[t']\right] - \epsilon\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L}\right)\delta T\right]\right) \end{aligned}$$

und daß dies, entsprechend den Gleichungen (1) and (2), zur Erhaltung folgender Ladung führt:

$$Q = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\delta Q_i - \left(\sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L}\right)\delta T.$$

[Hinweis. Benutzen Sie die Identität

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \sum_i\left(\dot{q}_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} + \ddot{q}_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right),$$

und die Euler-Lagrange-Gleichungen.]

2. Die Lagrangedichte eines Teilchens in einem wie $1/r^2$ fallenden Zentralpotential ist

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{\alpha}{r^2}.$$

Zeigen Sie die Invarianz der Wirkung unter den Transformationen

$$r[t] \to r'[t'] = (1+\epsilon)r[t],$$
$$t \to t' = (1+\epsilon)^2 t,$$

und berechnen Sie die zugehörige Noetherladung als Funktion von Energie, der Radialkoordiante und deren Seitableitung.

Hinweis: Unter der Änderung der Zeitkoordinate ändert sich auch das Integrationsmaß entsprechend

$$dt \to \left|\frac{dt}{dt'}\right| dt'$$

Aufgabe 2:
Satz von Steiner **5 Punkte**

Der Ursprung eines körperfesten Systems K befinde sich im Schwerpunkt eines starren Körpers der Masse M. Der Trägheitstensor im System K sei $J_{\mu\nu}$. Betrachten Sie nun ein weiteres System K' welches gegenüber K um einen Vektor $\mathbf{a}$ parallelverschoben sei, und $J'_{\mu\nu}$ sei dann der Trägheitstensor in K' . Zeigen Sie den Steinerschen Satz, d.h. daß der Zusammenhang zwischen diesen Tensoren gegeben ist durch

$$J'_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + M[|\mathbf{a}|^2\delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu]$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen, wenn angebracht unter Verwendung des Satzes von Steiner:

1. Bestimmen Sie zunächst den Trägheitstensor einer homogenen Kugel von Radius R und Masse M in ihrem Schwerpunktsystem.

2. Betrachte ein System aus zwei homogenen Kugeln jeweis der Masse $M/2$ und vom Radius R, welche in ihrem Berührpunkt aneinandergeschweißt sind. Bestimmen Sie den Trägheitstensor bezüglich dieses Punktes.

3. Bestimmen Sie den Trägheitstensor eines Kegels der Höhe h und einer Grundfläche mit Radius R in dessen Schwerpunktsystem. (Dazu muß der Schwerpunkt bestimmt werden.)
   Hinweis 1: Der Trägheitstensor im System mit Ursprung an der Spitze des Kegels und einer Achse entlang der Symmetrieachse ist diagonal. Berechnen Sie $I_i,\ i = 1, 2, 3$ in einem solchen System und benutzen Sie den Steinerschen Satz für die Verschiebung in den Schwerpunkt.
   Hinweis 2: Zylinderkoordinaten vereinfachen die Integrale.

4. Wir betrachten einen homogenen Quader der Masse M und Kantenlängen $a_1 = a_2$, a_3. In dem in der Abbildung skizzierten körperfesten System K ist der Trägheitstensor diagonal. Berechnen Sie diesen und erhalten Sie dann seine Form in K', wobei die x'_3 in Richtung der Hauptdiagonale des Quaders wie in der Skizze zeigen soll.
   Hinweis: Benutzen Sie, daß $a_1 = a_2$. Dadurch hat der Trägheitstensor eine Symmetrie,

welche ermöglicht, ihn aus seiner Form in K nach K' durch eine Rotation bezüglich einer einzigen Achse zu überführen. Die Rotationsmatrix hat dabei die Form

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$$

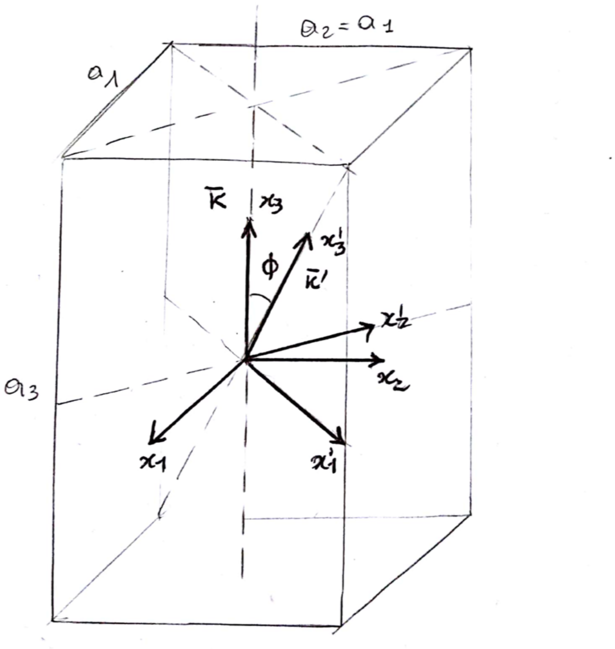

Abbildung 1: Die körperfesten Systeme K und K'.