Technische Universität München
Physik-Department **B. Garbrecht, C. Tamarit, G. Zattera**

Mechanik (Theoretische Physik 1)

Sommersemester 2018

Abgabe bis Freitag, 22.06.18, 12:00 neben PH 3218.

Übungsblatt Nr. 10 Dieses Blatt wird in den Übungen vom 25.06. - 29.06.18 besprochen.

Aufgabe 1:
Natürliche Randbedingungen **3 Punkte**

Betrachten Sie das Funktional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\left(y(x), y'(x), x\right) dx.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, daß, unter der Annahme, die Variationen δy verschwinden an den Randpunkten x_1 und x_2, die Funktionen F, welche I extremalisieren, die Euler-Lagrange erfüllen.

Zeigen Sie, daß verschwindende Variationen an den Rändern nicht die einzige Möglichkeit sind und daß das Funktional I extremiert wird, wenn der Integrand die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt und der *generalisierte Impuls* $\partial F/\partial y'$ an den Randpunkten verschwindet.
Betrachten Sie dann die folgenden beiden Beispiele:

1. Ausgehend von der Wirkung eines frei fallenden Punktteilchens der Masse m in einem konstanten Schwerefeld $\mathbf{g}$, welches in negative x-Richtung zeigt, soll die Bahn mit der Randbedingung

   $$x(t_1 = 0) = 0,$$

   bestimmt werden, d.h. ohne $x(t)$ an einem bestimmten Endzeitpunkt festzusetzen.
   Zeigen Sie, daß die Lösung in der Tat die Wirkung minimiert.

2. Bestimmen Sie die Funktion $y(x)$, welche das Funktional

   $$I = \int_0^1 dx \left[y'^2 + yy' + y + y'\right]$$

   extremiert und die Randbedingung $y(0) = \frac{1}{2}$ erfüllt.

Aufgabe 2:
Sttelpunkte **3 Punkte**

Ein harmonischer Oszillator werde durch folgende Wirkung beschrieben:

$$S[x(t)] = \int_0^{t_2} dt \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2\right]$$

Zeigen Sie, daß die Bahn $x(t) = a\sin(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ ein Sattelpunkt der Wirkung ist, wenn der Endzeitpunkt t_2 größer als die Hälfte der Schwingungsperiode T des Oszillators ist.
Hinweis: Betrachten Sie eine kleine Störung der Bahn, $x(t) \to \hat{x}(t) = x(t) + \epsilon\eta(t)$ und bestimmen Sie das Vorzeichen der Änderung ΔS der Wirkung. Dies läßt sich durchführen, indem die Störung η in einer Fourierreihe entwickelt wird:

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{t_2} t\right) \quad , \quad b_k = \text{const} \quad \forall k \geq 1.$$

Aufgabe 3:
Kepler trifft Lagrange **4 Punkte**

Betrachten Sie die Bahn eines Teilchens in einer Ebene unter Einfluß der Zentralkraft

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

1. Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen zum Beweis der Erhaltung des Drehimpulses $l = mr^2\dot{\phi}$ und der Energie

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r).$$

2. Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen und diese Erhaltungssätze zur Herleitung einer Differentialgleichung für $d\phi/dr$. Leiten Sie die Lösungen her, welche Ellipsen der folgenden Form sind:

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{l^2}(1 + \epsilon\cos(\phi - \phi_0)).$$

Hinweis:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, \quad a < 0, b^2 - 4ac > 0.$$