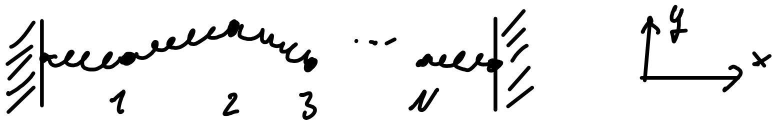
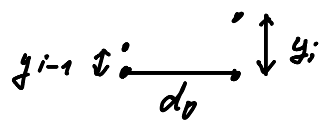
6. Elemente der Kontinuumsmechanik

6.1 Transversale Schwingungen



Betrachte N Massenpunkte der Masse m, verbunden durch identische Federn mit Konstante k, Gleichgewichtsabstand d_0.
Auslenkungen: y_i, feste Randbedingungen

$$\longrightarrow T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{y}_i^2$$



$$U = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{1}{2} k \left(d_0^2 + (y_i - y_{i-1})^2 - d_0^2 \right) \quad \text{mit } y_0 = y_{N+1} = 0$$

Kontinuumslimes: $N \longrightarrow \infty$, $d_0 \longrightarrow 0$, $N d_0 = l = \text{const.}$

$\mu = \dfrac{m}{d_0}$ Massendichte (Masse pro Länge)

$\kappa = d_0 k$ z.B. $\kappa = \underbrace{E}_{\text{Elastizitätsmodul}} \underbrace{A}_{\text{Fläche}}$

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{y}_i^2 \longrightarrow \int_0^l dx \frac{\mu}{2} \dot{y}^2(x)$$

$$U = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{k}{2} (y_i - y_{i-1})^2 = \sum_{i=1}^{N+1} d_0^2 \frac{k}{2} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{d_0} \right)^2$$

$$\longrightarrow \int_0^l dx \frac{\kappa}{2} y'^2(x)$$

$$L = T - U = \int_0^\ell dx \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{\varkappa}{2} \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$=: \int_0^\ell dx \; \mathcal{L}(y(x,t), \dot{y}(x,t), y'(t))$$

$\hookrightarrow$ Lagrangedichte

Mit dem Kontinuumslimes sind wir von endlich zu unendlich vielen Freiheitsgraden übergegangen.

Wirkung:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \; \mathcal{L}(y, \dot{y}, y')$$

Euler - Lagrange:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \left[\mu \frac{\partial y}{\partial t} \, \delta \frac{\partial y}{\partial t} - \varkappa \frac{\partial y}{\partial x} \, \delta \frac{\partial y}{\partial x} \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\ell dx \left[-\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varkappa \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \delta y$$

$\uparrow$ partielle Integration

Mit $\delta y(x,t)$ beliebig folgt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \text{mit} \quad c = \sqrt{\frac{\varkappa}{\mu}} \quad \text{(Wellengeschwindigkeit)}$$

Im Gegensatz zur Punktmechanik begegnet uns hier eine partielle Differentialgleichung. Da die verschiedenen Ableitungen nicht gemischt auftreten wählen wir den Separationsansatz: $y(x,t) = A(x)\,B(t)$

$$\Longrightarrow \frac{A''}{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{B}}{B} = 0$$

Der erste Term hängt nur von x, der zweite nur von t ab. Daher müssen die einzelnen Terme gleich Konstanten sein. $\longrightarrow$

$$A''(x) + k^2 A(x) = 0$$
$$\ddot{B}(t) + \omega^2 B(t) = 0$$

mit $\omega = ck$

Randbedingung $k_n = \frac{n\pi}{l}$

Allgemeine Lösung

$$A_n(x) \propto \sin(k_n x)$$
$$B_n(t) \propto \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$ mit $\omega_n = ck_n$

$$\longrightarrow y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

6.2 Hydrodynamik

Anwendungen u.a. im Plasmaphysik, Schwerionenkollisionen, Astrophysik und Kosmologie.

Ansatz: Die Flüssigkeit wird beschrieben durch die Felder

$\rho(\vec{r},t)$ Massendichte

$\vec{v}(\vec{r},t)$ Geschwindigkeit

$P(\vec{r},t)$ isotroper Druck

Würde man ein Flüssigkeitselement an der Stelle $\vec{r},t$ in einen kleinen Zylinder mit Kolbenfläche A einschließen, dann wirkt auf den Kolben die Kraft $F = A\,P(\vec{r},t)$.

Kontinuitätsgleichung

Stromdichte: $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)$

Erhaltung der Masse: $$\oint_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{j} = -\int_V d^3r\,\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)$$

Gaußscher Satz $\Longrightarrow$ $$\int_V d^3r\;\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\int_V d^3r\,\frac{\partial}{\partial t}\rho$$

V beliebig $\Longrightarrow$

Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$

Euler-Gleichung

Betrachte Volumenelement ΔV → enthält Masse $\Delta m = \rho \, \Delta V$

2. Axiom ⟶

$$\Delta m \frac{d\vec{v}(r,t)}{dt} = \rho(\vec{r},t)\, \Delta V \frac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt} = \Delta \vec{F}(\vec{r},t) = \Delta \vec{F}_{ext} + \Delta \vec{F}_{int}$$

Mit $\Delta \vec{F}_{ext}(\vec{r},t) = \vec{f}(\vec{r},t)\, \Delta V$

↳ Kraftdichte, z.B. $\vec{f} = \rho \vec{g}$

$$\Delta \vec{F}_{int} = -\oint_{\partial \Delta V} d\vec{a}\, P = -\sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i \oint_{\partial \Delta V} d\vec{a} \cdot \hat{e}_i\, P$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i \int_{\Delta V} d^3r\ \vec{\nabla} \cdot \hat{e}_i\, P = -\int_{\Delta V} d^3r\ \vec{\nabla} P \approx -\Delta V\ \vec{\nabla} P$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} v_i = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{v}$$

⟶

Euler-Gleichung

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\, \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \vec{f}}$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung sind dies vier partielle Differentialgleichungen für 5 Felder ρ, P und $\vec{v}$. Die fehlende Information folgt mit der

Zustandsgleichung

$$\boxed{P = P(\rho(\vec{r},t))}$$

<u>Beispiel</u> Ruhendes Fluid im Schwerefeld

$$\varrho \equiv \varrho(z), \quad \vec{v} \equiv 0, \quad \underline{P} \equiv \underline{P}(z)$$

$$\vec{f} = \varrho \vec{g} = -\varrho g \, \hat{e}_z$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d\underline{P}}{dz} = -\varrho g$$

Schwimmbad: $\varrho = \varrho_0$ (inkompressible Flüssigkeit)

$$\longrightarrow \underline{P}(z) = \underline{P}_0 - \varrho_0 g z = \underline{P}_0 - 1000 \frac{kg}{m^3} \, 9{,}81 \frac{kg}{ms^2} \, \frac{z}{1m} \, m$$

$$= \underline{P}_0 - 9810 \, Pa \frac{z}{1m} = \underline{P}_0 - \underbrace{98{,}1 \, kPa}_{\hat{=}\, 0{,}098 \, bar} \frac{z}{m}$$

Ideales Gas bei konstanter Temperatur:

$\underline{P} V = N k T$ (N Teilchen der Masse m)

$$\frac{d\underline{P}}{dz} = -\varrho g = -\frac{Nm}{V} g = -\frac{mg}{kT} \underline{P}$$

$$\longrightarrow \underline{P}(z) = \underline{P}_0 \, e^{-\frac{mgz}{kT}} = \underline{P}_0 \exp\left\{ -\frac{28 * 1{,}66 * 10^{-27} kg * 9{,}81 \frac{N}{kg}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} * 300 K} \, z \right\}$$

$$= \underline{P}_0 \, e^{-\frac{z}{9090 m}}$$

Bernoulli-Gleichung

Kräftefreie, stationäre Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit:

$$\vec{f} = \vec{0}, \quad \rho(\vec{r}, t) = \rho_0, \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}), \quad P(\vec{r}, t) = P(\vec{r})$$

$\longrightarrow$ Euler-Gleichung

$$\rho_0 (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P \quad \longrightarrow$$

$$\rho_0 \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} P$$

Mit $\frac{1}{2} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}^2 = \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \longrightarrow$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\rho_0 \vec{v}^2}{2} + P \right) = 0$$

$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ ist dabei die Ableitung in Richtung von $\vec{v}$, d.h. entlang einer Stromlinie. $\longrightarrow$

Bernoulli-Gleichung

$$\underbrace{\frac{\rho_0}{2} \vec{v}^2(\vec{r})}_{\text{Staudruck}} + P(\vec{r}) = \text{const.} \quad \text{entlang einer Stromlinie}$$

$\longrightarrow$ Funktionsprinzip von Flügeln.

Navier-Stokes-Gleichung

Euler-Gleichung mit Viskosität:

$$\varrho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}P+\vec{f}+\mu\vec{\nabla}^2\vec{v}+(\lambda+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$

λ: Volumenviskosität ("bulk viscosity" — bei Volumenänderungen)

μ: dynamische Viskosität ("shear viscosity", Scherviskosität)