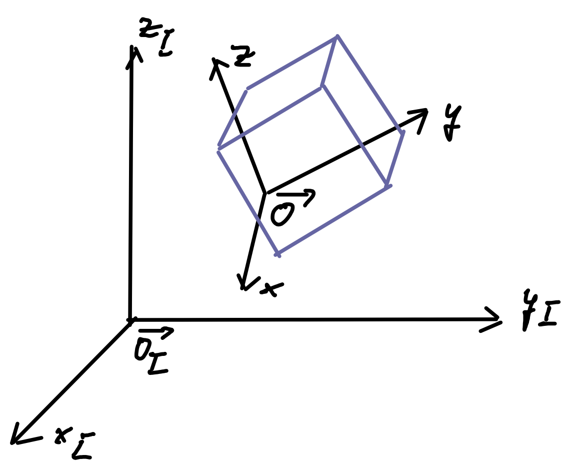
4. Starrer Körper

Idealisierung: Viele, sehr kleine Massenelemente, welche einen festen Abstand voneinander haben.
Alles Weitere folgt aus der Newtonschen bzw. Lagrangeschen Mechanik.

4.1 Bewegung starrer Körper

Die Bewegung läßt sich in eine Translation ($\longrightarrow$ Schwerpunktsatz) und eine Rotation zerlegen, was wir folgendermaßen beschreiben:



x_I, y_I, z_I: Inertialsystem
x, y, z: körperfestes System — momentane Drehachse durch $\vec{O}$
Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$.

$\longrightarrow$ Sechs Freiheitsgrade (Lage von $\vec{0}$, Drehung $\vec{R}$)

Oder: Die Lage des Körpers wird durch drei körperfeste Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, eindeutig bestimmt $\longrightarrow$ neun Koordinaten, jedoch sind $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = const.$, $|\vec{r}_3 - \vec{r}_1| = const.$, $|\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = const.$ fix

$\longrightarrow$ Sechs Freiheitsgrade

Geschwindigkeit des Punkts $\vec{r}$ (relativ zu $\vec{0}$) im Inertialsystem:

$$\vec{v}_I = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{v}_0$: Geschwindigkeit von $\vec{O}$ im Inertialsystem
$\vec{\omega}$: Winkelgeschwindigkeit im Inertialsystem

Den Ursprung $\vec{O}$ legt man in einer der Situation angepaßten Weise fest. Wird z.B. ein Punkt des Körpers in Ruhe gehalten, ist dieser eine gute Wahl. Für eine freie Bewegung nimmt man günstigerweise den Schwerpunkt.

4.2 Kinetische Energie und Trägheitstensor

Wir setzen den Körper aus N Massenpunkten m_i zusammen.
mit $m = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$

$\longrightarrow$ Kinetische Energie:

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} \vec{v}_{I\nu}^{\,2} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \left\{ \frac{m_\nu}{2} \vec{v}_0^{\,2} + m_\nu \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu) + \frac{m_\nu}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2 \right\}$$

$$= \underbrace{\frac{m}{2} \vec{v}_0^{\,2}}_{=T_{trans}} + (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) \cdot \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2}_{=T_{rot}}$$

Translationsenergie Rotationsenergie

Ist $\vec{O}$ der Schwerpunkt, dann ist $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu = \vec{O}$ und $\longrightarrow$

$$T = T_{trans} + T_{rot}$$

Wird der Körper in einem Punkt festgehalten, kann

man das Inertialsystem so wählen, daß $\vec{v}_0 = \vec{0}$ und $\longrightarrow$
$T = T_{rot}$

Mit $(\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)^2 = \vec{\omega}^2 \vec{r}_\nu^{\,2} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\nu)^2$

$$\equiv \omega_l \omega_l r_{\nu_k} r_{\nu_k} - \omega_i r_{\nu_i} \omega_j r_{\nu_j}$$

$$= \omega_i \omega_j (r_{\nu_k} r_{\nu_k} \delta_{ij} - r_{\nu_i} r_{\nu_j})$$

$\longrightarrow$

$$T_{rot} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} \omega_i \omega_j (r_{\nu_k} r_{\nu_k} \delta_{ij} - r_{\nu_i} r_{\nu_j})$$

Mit der Definition

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Trägheitstensor}} \\ I_{ij} = \sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu (r_{\nu_k} r_{\nu_k} \delta_{ij} - r_{\nu_i} r_{\nu_j}) \end{array}}$$

$\longrightarrow$ $T_{rot} = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j$

Der Kontinuumsfall ergibt sich unter Verwendung der Massendichte ρ:

$$I_{ij} = \int d^3r \, \rho(\vec{r}) \, (\vec{r}^{\,2} \delta_{ij} - r_i r_j)$$

Diagonalelemente: Trägheitsmomente
Nichtdiagonalelemente: Deviationsmomente

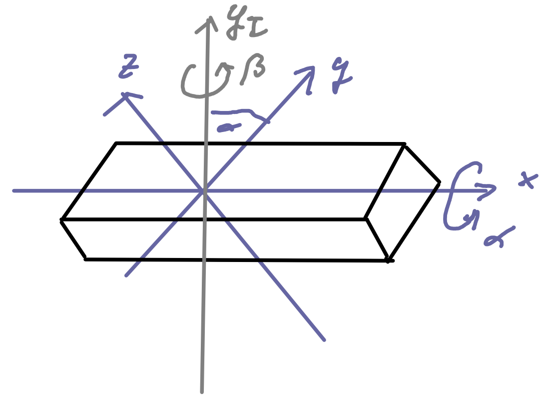
Der Trägheitstensor ist symmetrisch, $I_{ij} = I_{ji}$

$\longrightarrow$ Durch eine orthogonale Transformation (Drehung) kann I auf Diagonalgestalt gebracht werden.

Auf den Diagonalen stehen dann die Eigenwerte $I_{jj} =: I_j$, die <u>Hauptträgheitsmomente</u>

$$\longrightarrow \quad I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

<u>Beispiel</u> Rotierender Quader,



Hauptträgheitsachsen x, y, z

Drehung mit $\dot{\alpha}$ um x-Achse und mit $\dot{\beta}$ um y_I-Achse

$\longrightarrow$

$$\omega_1 \equiv \omega_x = \dot{\alpha}$$

$$\omega_2 = \omega_y = \dot{\beta} \cos \alpha \quad \longrightarrow \quad T_{rot} = \frac{1}{2} I_x \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \left(I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha \right) \dot{\beta}^2$$

$$\omega_3 = \omega_z = \dot{\beta} \sin \alpha$$

Beachte, daß dies für $I_y = I_z$ zeitunabhängig ist.

Ein starrer Körper heißt

- Rotator, wenn er eindimensional ist und seine Massenpunkte damit nur auf einer Achse liegen,
- unsymmetrisch, wenn alle drei Hauptträgheitsmomente verschieden sind,
- symmetrisch, wenn zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind,
- Kugelkreisel, wenn $I_1 = I_2 = I_3$, also auch z.B. für einen Würfel.

<u>4.3 Drehimpuls</u>

Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \, \vec{r}_{I\nu} \times \vec{v}_{I\nu}$$

Mit

$$\vec{r}_{I\nu} = \vec{r}_0 + \vec{r}_\nu$$

$$\vec{v}_{I\nu} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu$$

$\longrightarrow$

$$\vec{L}_{tot} = m\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \vec{r}_0 \times \left[\vec{\omega} \times \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \right] + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{v}_0$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)$$

Wir unterscheiden wieder die Fälle freie und festgehaltene Bewegung.

Freie Bewegung:

Lege $\vec{0}$ in den Schwerpunkt $\longrightarrow \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu = \vec{0}$

$$\vec{L}_{tot} = m\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu)$$

$$=: \underbrace{m\, \vec{r}_0 \times \vec{v}_0}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \vec{L} \hookrightarrow \text{Eigendrehimpuls}$$

Dabei sind $\vec{r}_0$ und $\vec{v}_0$ hier Ort und Geschwindigkeit des Schwerpunkts.

Festgehaltener Punkt oder festgehaltene Punkte:

Lege $\vec{O}_I$ und $\vec{O}$ gemeinsam in einen der ortsfesten Punkte. $\longrightarrow \vec{r}_0 = \vec{v}_0 = \vec{0}$

$$\vec{L}_{tot} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu) =: \vec{L}$$

Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Trägheitstensor:

$$L_i = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[\vec{r}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu) \right]_i$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left[\vec{\omega}\, \vec{r}_\nu^{\,2} - \vec{r}_\nu (\vec{r}_\nu \cdot \vec{\omega}) \right]_i$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \left(r_{\nu k} r_{\nu k} \delta_{ij} - r_{\nu i} r_{\nu j} \right) \omega_j = I_{ij}\, \omega_j$$

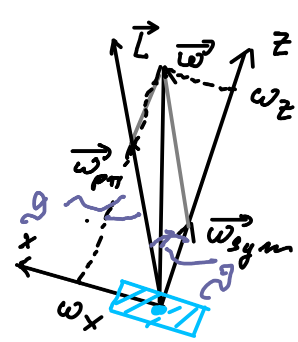
Wählen wir die Hauptträgheitsachsen als Koordinaten= achsen des mitbewegten Systems, dann ist $L_i = I_i\, \omega_i$

$\longrightarrow$ Im Allgemeinen sind $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ nicht parallel.

<u>Beispiel</u> Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Als Kreisel bezeichnen wir einen starren Körper, welcher in einem Punkt festgehalten wird. Wirken keine äußeren Kräfte ein (z.B. in Schwerelosigkeit oder falls der Festhaltepunkt im Schwerpunkt liegt), dann ist der Kreisel kräftefrei. Falls die Drehachse durch den Schwerpunkt geht und der Kreisel sich in Schwerelosigkeit befindet, treffen die Überlegungen hier auch zu.

Wähle z-Achse entlang der Symmetrieachse (welche auch eine Hauptträgheitsachse ist)



Zu einem beliebigen Zeitpunkt t wählen wir die y-Achse so, daß sie senkrecht zur $\vec{L}$-$\hat{e}_z$-Ebene steht. (Beachte: $\vec{L}$ ist konstant während $\hat{e}_z$ im Inertialsystem i.A. zeitabhängig ist.) $\longrightarrow$

Für $t=0$ ist $L_y = 0$ und $\omega_y = \frac{L_y}{I_y} = 0$

$\longrightarrow$ $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ und $\hat{e}_z$ liegen in einer Ebene

Zu beliebigen Zeiten: $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ und die (zeitabhängige) Symmetrieachse liegen stets in einer Ebene.

$$\longrightarrow \quad \vec{\omega} = \underbrace{\vec{\omega}_{pr}}_{\parallel \vec{L}} + \underbrace{\vec{\omega}_{sym}}_{\parallel \hat{e}_z}$$

Ein Punkt $\vec{r}^{(z)}$ auf der z-Achse hat im Inertialsystem die Geschwindigkeit

$$\vec{v}^{(z)} = \vec{\omega} \times \vec{r}^{(z)} = \vec{\omega}_{pr} \times \vec{r}^{(z)} \quad \perp \quad \vec{L}\text{-}\hat{e}_z\text{-Ebene}$$

$\longrightarrow$ $\hat{e}_z$ umläuft $\vec{L}$ auf einem Kreiskegel mit konstantem Öffnungswinkel ϑ $\longrightarrow$ <u>reguläre Präzession</u> oder <u>Nutation</u>.

Winkelgeschwindigkeit der regulären Präzession:

$$\sin\vartheta = \frac{\omega_x}{\omega_{pr}} \Longrightarrow \omega_{pr} = \frac{\omega_x}{\sin\vartheta} = \frac{L_x}{I_x \sin\vartheta} = \frac{L}{I_x}$$

Außerdem folgt

$$\omega_{sym} = \omega_z - \omega_{pr}\cos\vartheta = \frac{L_z}{I_z} - \frac{L}{I_x}\cos\vartheta = \left(\frac{L}{I_z} - \frac{L}{I_x}\right)\cos\vartheta$$

4.4 Eulersche Gleichungen

Wir erinnern an den Schwerpunktsatz

$$M \ddot{\vec{r}}_0 = \ddot{\vec{r}}_0 \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\vec{r}}_{I\nu} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(a)} = \vec{F}$$

und den Drehimpulssatz

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_{I\nu} \times \ddot{\vec{r}}_{I\nu} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_{I\nu} \times \vec{F}_\nu^{(a)} = \vec{M}_I$$

Dabei sind $\vec{F}_\nu^{(a)}$ die äußeren Kräfte, und $\vec{L}_I$ und $\vec{M}_I$ beziehen sich auf den Ursprung des Inertialsystems.

Der Drehimpulssatz läßt sich aber auch auf den Schwerpunkt eines i.A. beschleunigten starren Körpers beziehen. Wir zeigen abermals

$$\vec{r}_{I\nu} = \vec{r}_0 + \vec{r}_\nu \Longrightarrow \ddot{\vec{r}}_{I\nu} = \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}_\nu$$

wobei $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu = \vec{0} \Longrightarrow \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = 0$

Mit obigem Drehimpulssatz ergibt dies

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{r}_0 + \vec{r}_\nu) \times (\ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}_\nu)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (\vec{r}_0 \times \ddot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_\nu \times \ddot{\vec{r}}_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} (\vec{r}_0 + \vec{r}_\nu) \times \vec{F}_\nu^{(a)}$$

$$\overset{\text{Schwerpunktsatz}}{\Longleftrightarrow} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \times \ddot{\vec{r}}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^{(a)} =: \vec{M}_{CMS}$$

Mit $\vec{L}_{CMS} := \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \times \dot{\vec{r}}_\nu \Longrightarrow \frac{d}{dt} \vec{L}_{CMS} = \vec{M}_{CMS}$

Wir berücksichtigen jetzt noch, daß ein Schwerpunktsystem im Allgemeinen nicht körperfest ist, sondern durch eine Drehung $\vec{\varphi}$ aus diesem hervorgeht ($\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$):

$$\vec{L}_{CMS} = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu) = \frac{d}{dt} I_{ij} \omega_j \hat{e}_i$$

Dabei sind ω_i die körperfesten Koordinaten von $\vec{\omega}$ und $\hat{e}_i$ sind die Basisvektoren des körperfesten Systems.

Mit $\dot{\hat{e}}_i = \vec{\omega} \times \hat{e}_i \Longrightarrow$

$$\dot{\vec{L}}_{CMS} = I_{ij} \dot{\omega}_j \hat{e}_i + I_{ij} \omega_j (\vec{\omega} \times \hat{e}_i)$$

$$= I_{ij} \dot{\omega}_j \hat{e}_i + \vec{\omega} \times I_{ij} \omega_j \hat{e}_i$$

1. Term: Zeitableitung des Drehimpulses für Beobachter im körperfesten System (Basisvektoren $\hat{e}_i$ werden als konstant angesehen) $\longrightarrow$ „körperfeste Ableitung" $\left[\frac{d}{dt}\right]_K$

$$\dot{\vec{L}}_{CMS} = \left[\frac{d}{dt}\right]_K \vec{L}_{CMS} + \vec{\omega} \times \vec{L}_{CMS} = \vec{M}_{CMS}$$

In dieser Gleichung ist vorausgesetzt, daß die Basisvektoren des körperfesten Systems gewählt werden. Ebenso gilt diese ($\dot{\vec{L}} = \vec{M}$) auch für ein festgehaltenes System, wenn $\vec{L}$ und $\vec{M}$ an Stelle des Schwerpunkts auf den Festhaltepunkt bezogen werden.

Wählt man die körperfesten Achsen als Hauptträgheitsachsen, dann folgt

$$[\vec{\omega} \times \vec{L}]_i = \varepsilon_{ijk}\, \omega_j \underbrace{I_{kl}}_{= I_k \delta_{kl}} \omega_l = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \omega_j I_k \omega_k$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2 \\ \omega_3 I_1 \omega_1 - \omega_1 I_3 \omega_3 \\ \omega_1 I_2 \omega_2 - \omega_2 I_1 \omega_1 \end{pmatrix}_i = - \begin{pmatrix} \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \\ \omega_1 \omega_3 (I_3 - I_1) \\ \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) \end{pmatrix}_i$$

$\longrightarrow$

Eulersche Gleichungen

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\, \omega_2 \omega_3 = M_1$$
$$I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\, \omega_1 \omega_3 = M_2$$
$$I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\, \omega_1 \omega_2 = M_3$$

Nichtlineares, gekoppeltes Gleichungssystem.

Diese gelten, sofern entweder der körperfeste Koordinatenursprung im Schwerpunkt liegt oder der Körper im Koordinatenursprung $\vec{O}$ und ggf. weiteren Punkten festgehalten wird.

Wir kehren zurück zum <u>Beispiel</u> des kräftefreien ($\hookrightarrow \vec{M} = 0$) symmetrischen Kreisels ($\hookrightarrow I_x = I_y$).

Unmittelbar ergibt sich $\omega_z = \text{const.}$

Mit $\Omega := \dfrac{I_z - I_x}{I_x}\,\omega_z = \dfrac{I_z - I_y}{I_y}\,\omega_z$

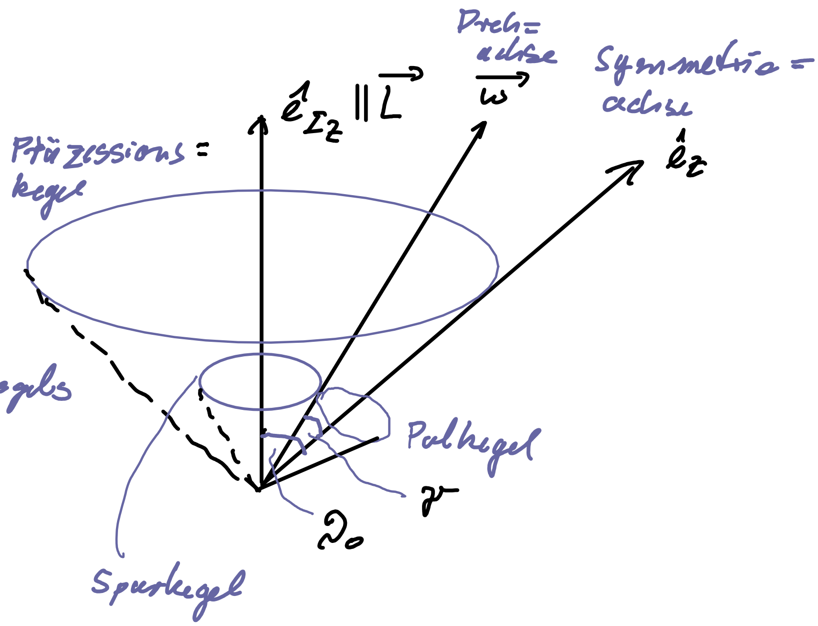
$$\longrightarrow \begin{aligned} \dot\omega_x + \Omega\,\omega_y &= 0 \\ \dot\omega_y - \Omega\,\omega_x &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \omega_x(t) &= A\cos(\Omega t + \alpha) \\ \omega_y(t) &= A\sin(\Omega t + \alpha) \end{aligned}$$

Wieder ist $\vec{\omega}^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$ konstant. Die Projektion von $\vec{\omega}$ auf die x-y-Ebene (im körperfesten System) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um die Symmetrieachse (reguläre Präzession).

In der Skizze ist

$$\tan\gamma = \frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\omega_z} = \text{const.}$$

der Öffnungswinkel des Polkegels.

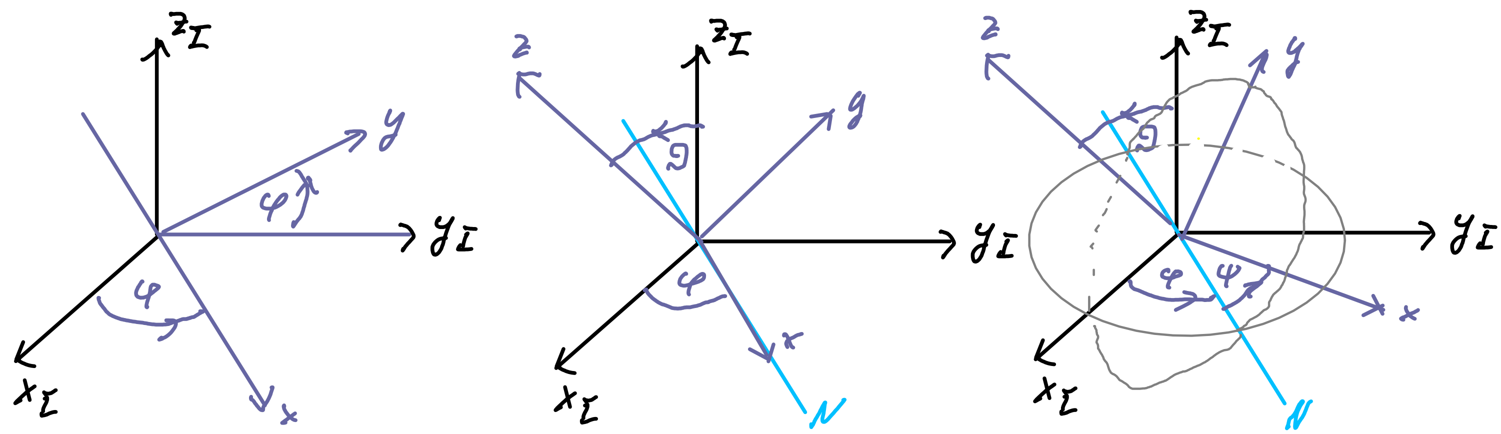


Wir sehen auch, daß $\vec{\omega}$ nicht parallel zu $\vec{L}$ ist, welches im Inertialsystem erhalten ist. Zur genaueren Beschreibung der Bewegung von $\vec{\omega}$ im Inertialsystem benutzen wir die Eulerschen Winkel. (In der Skizze haben wir $\hat{e}_{I_z} \parallel \vec{L}$ gewählt.)

4.5 Eulersche Winkel

Wir wollen die Bewegung des Kreisels mit Hilfe der Eulerwinkel beschreiben

$$R(\varphi, \vartheta, \psi) = R_z(\psi)\, R_x(\vartheta)\, R_z(\varphi)$$



Nach Schritt 1   Nach Schritt 2   Nach Schritt 3

Die x_I-y_I Ebene schneidet dabei die x-y Ebene in der sogenannten Knotenlinie N.

Damit haben die Winkel folgende geometrische Bedeutung:

φ : $\sphericalangle(x_I\text{-Achse}, N)$

ψ : $\sphericalangle(x\text{-Achse}, N)$

ϑ : $\sphericalangle(z\text{-Achse}, z_I\text{-Achse})$

Die einzelnen Schritte sind:

Schritt 1: Drehung φ um z_I-Achse

Schritt 2: Drehung ϑ um N

Schritt 3: Drehung ψ um z-Achse

Winkelgeschwindigkeit und Eulersche Winkel:

$$\left.\begin{array}{lll} d\varphi = d\psi = 0: & \vec{\omega}_\vartheta = \dot{\vartheta}\, \hat{e}_N \\ d\psi = d\vartheta = 0: & \vec{\omega}_\varphi = \dot{\varphi}\, \hat{e}_{I_z} \\ d\vartheta = d\varphi = 0: & \vec{\omega}_\psi = \dot{\psi}\, \hat{e}_z \end{array}\right\} \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\vartheta + \vec{\omega}_\psi$$

Drücke die Einheitsvektoren in der körperfesten Basis aus

$$\hat{e}_N = \cos\psi\, \hat{e}_x - \sin\psi\, \hat{e}_y$$

$$\hat{e}_{I_z} = \sin\vartheta \sin\psi\, \hat{e}_x + \cos\psi \sin\vartheta\, \hat{e}_y + \cos\vartheta\, \hat{e}_z$$

Letzterer Ausdruck läßt sich einfach mit $R(\varphi, \vartheta, \psi)\, \hat{e}_{I_z}$ bestätigen.

$$\vec{\omega} = \begin{cases} \omega_x \hat{e}_x + \omega_y \hat{e}_y + \omega_z \hat{e}_z & \text{(körperfest)} \\ \omega_{I_x} \hat{e}_{I_x} + \omega_{I_y} \hat{e}_{I_y} + \omega_{I_z} \hat{e}_{I_z} & \text{(Inertialsystem)} \end{cases}$$

$\longrightarrow$

$$\omega_x = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_x = \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi$$

$$\omega_y = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_y = \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta} \sin\psi$$

$$\omega_z = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_z = \dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi}$$

Kräftefreier symmetrischer Kreisel mit Eulerwinkeln

Wie in der Skizze soll gelten: $\vec{L} = L\, \hat{e}_{I_z} = \text{const.}$

Anhand der Skizzen für den Kreisel und die Eulerwinkel lesen wir die Bedeutung der Winkel ab und fassen diese zusammen:

φ: Drehung der Symmetrieachse um die z-Achse

φ: Drehung des Körpers um die Symmetrieachse (im körperfesten System)

ϑ: Winkel zwischen Symmetrieachse und $\hat{e}_{z_I}$ bzw. $\vec{L}$

Komponenten des Drehimpuls im körperfesten System:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \hat{e}_{z_I} \cdot \hat{e}_x \\ \hat{e}_{z_I} \cdot \hat{e}_y \\ \hat{e}_{z_I} \cdot \hat{e}_z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} L \begin{pmatrix} \sin\vartheta \, \sin\varphi \\ \sin\vartheta \, \cos\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x \omega_x \\ I_y \omega_y \\ I_z \omega_z \end{pmatrix}$$

Im letzten Ausdruck nehmen wir wie für die Eulerschen Gleichungen an, daß die körperfesten Achsen Hauptträgheits=achsen sind.

Einsetzen der Lösung:

$$L \sin\vartheta \sin\varphi = I_x A \cos(\Omega t + \alpha) = I_x A \sin\left(-\Omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$L \sin\vartheta \cos\varphi = I_x A \sin(\Omega t + \alpha) = I_x A \cos\left(-\Omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$L \cos\vartheta = I_z \omega_3$$

Aus der dritten Gleichung folgt $\vartheta(t) = \vartheta_0 = \text{const}$.
Damit, und aus den ersten beiden folgt: $\varphi(t) = -\Omega t - \alpha + \frac{\pi}{2}$

Kürze $\sin\varphi$ in der ersten Gleichung, teile durch dritte $\Longrightarrow$

$$\tan\vartheta = \frac{A}{\omega_z} \frac{I_x}{I_z}$$

Lösung der Euler-Gleichungen

$$\text{Mit} \quad \omega_x = \dot{\phi} \sin\vartheta \sin\varphi + \overset{=0}{\dot{\vartheta}} \cos\varphi \stackrel{\cdot}{=} A \cos(\Omega t + \alpha) = A \sin\varphi$$

folgt noch: $\dot{\phi} \sin\vartheta = A$

$$\Longrightarrow \quad \phi = \frac{A}{\sin\vartheta} t + \phi_0$$

Vergleich mit Resultat aus 4.3:

$$A = \frac{L}{I_x} \sin\vartheta \Longrightarrow \dot{\phi} = \omega_{Pr} = \frac{L}{I_x}$$

4.6 Schwerer Kreisel

Wir betrachten nun den Kreisel im Schwerefeld. Die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(I_{ij}\,\omega_j\right) = M_i$$

im körperfesten System auszuwerten hat den Vorteil, daß I_{ij} zeitunabhängig ist, allerdings die M_i Zeitabhängigkeiten durch $\vec{e}_i(t)$ haben, was eine Komplikation ist.

$\longrightarrow$ Nutze Lagrangemethode mit Eulerschen Winkeln als Koordinaten.

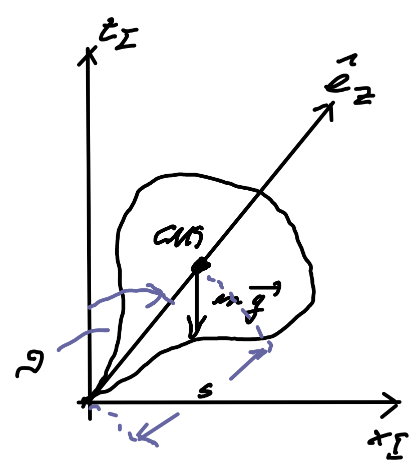
Wieder beziehen wir $\vec{L}$ und $\vec{M}$ auf den Schwerpunkt für einen Kreisel, der nicht festgehalten wird, und auf den Festhaltepunkt andernfalls.

Mit $T_{rot} = \frac{1}{2} I_{ij}\, \omega_i \omega_j \Longrightarrow$

$$L(\varphi, \vartheta, \psi, \dot\varphi, \dot\vartheta, \dot\psi) = T_{rot} - U = \frac{1}{2}\, \omega_i I_{ij}\, \omega_j - U(\varphi, \vartheta, \psi, t)$$

Im körperfesten Hauptachsensystem ist

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2}\left(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2\right) \\ &= \frac{1}{2} I_x \left(\dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} I_y \left(\dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi - \dot\vartheta \sin\psi\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} I_z \left(\dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi\right)^2 \end{aligned}$$



Wir betrachten jetzt die skizzierte Situation für einen symmetrischen Kreisel, $I_x = I_y \longrightarrow$

$$L(\vartheta, \dot\varphi, \dot\vartheta, \dot\psi) = \frac{1}{2} I_x \left(\dot\varphi^2 \sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2\right) + \frac{1}{2} I_z \left(\dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi\right)^2$$
$$- mgs\cos\vartheta$$

Symmetrien der Lagrangefunktion

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ → Energieerhaltung

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ → Erhaltung $\hat{e}_{z_I}$-Komponente des Drehimpulses

$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0$ → Erhaltung $\hat{e}_z$-Komponente des Drehimpuls

Unter Verwendung des Noethertheorems folgt:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\dot\varphi + \frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta}\dot\vartheta + \frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\dot\psi - L$$
$$= I_x \dot\varphi^2 \sin^2\vartheta + I_z\left(\dot\varphi^2\cos^2\vartheta + \dot\psi\dot\varphi\cos\vartheta\right)$$
$$+ I_x\dot\vartheta^2 + I_z\dot\psi^2 + I_z\dot\varphi\dot\psi\cos\vartheta - L$$
$$= \frac{I_x}{2}\left(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta\right) + \frac{I_z}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta\right)^2 + mgs\cos\vartheta = \text{const.}$$

$$L_{z_I} = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = I_x\dot\varphi\sin^2\vartheta + I_z\left(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi\right)\cos\vartheta = \text{const.}$$

$$L_z = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_z\left(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi\right) = \text{const.}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$$\dot\varphi = \frac{L_{z_I} - \cos\vartheta L_z}{I_x\sin^2\vartheta} \qquad \dot\psi = \frac{L_z}{I_z} + \frac{\cos\vartheta\left(\cos\vartheta L_z - L_{z_I}\right)}{I_x\sin^2\vartheta}$$

Einsetzen in E ⟶

$$E = \frac{L_z^2}{2I_z} + \frac{1}{2}I_x\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}\frac{\left(L_{z_I} - \cos\vartheta L_z\right)^2}{I_x\sin^2\vartheta} + mgs\cos\vartheta$$

$$= \frac{1}{2} I_x \dot{\vartheta}^2 + U_{eff}(\vartheta)$$

mit

$$U_{eff}(\vartheta) = \frac{1}{2} \frac{(L_{z_I} - \cos\vartheta L_z)^2}{I_x \sin^2\vartheta} - mgs(1-\cos\vartheta) + \frac{L_z^2}{2I_z} + mgs$$

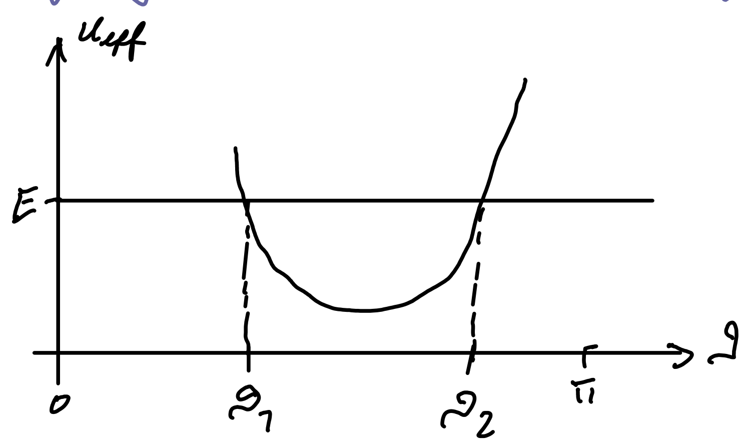
$$\frac{d}{dt}\vartheta = \sqrt{\frac{2(E-U_{eff})}{I_x}} \longrightarrow$$

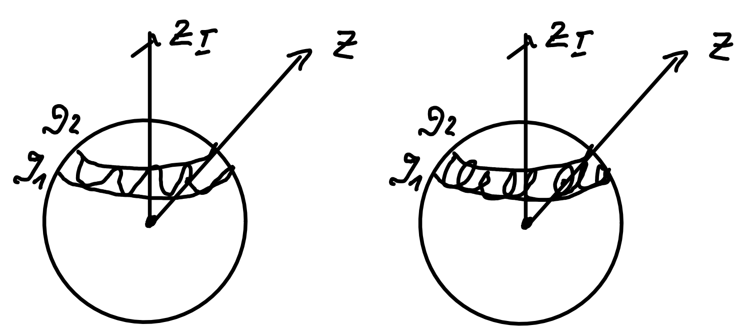
$$t = t_0 + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} d\vartheta' \sqrt{\frac{I_x}{2(E-U_{eff}(\vartheta'))}} \underset{u=\cos\vartheta}{=} \int \frac{du}{\sqrt{P_3(u)}}$$

Dabei ist $P_3(u)$ ein Polynom dritten Grades. Dies ist ein elliptisches Integral, welches nicht elementar lösbar ist.

Allerdings trifft für ϑ abermals die Diskussion der eindimensionalen Bewegung im rein ortsabhängigen Potential zu. Der Winkel ϑ bewegt sich zwischen den festen Werten ϑ_1 und ϑ_2.

$\longrightarrow$ Nutation.





Schneller Kreisel

Wir wollen aus unseren Lösungen noch im systematischer Näherung das Phänomen herleiten, nach dem die Drehachse der angelegten Kraftwirkung senkrecht ausweicht.

Anfangsbedingungen bei $t=0$:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \qquad \dot\vartheta = 0, \quad \dot\varphi = 0, \qquad \dot\psi = \dot\psi_0 \text{ (groß)}$$

$\longrightarrow$

$$L_{z_I} = I_x \dot\varphi \sin^2\vartheta + I_z(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)\cos\vartheta = \text{const.} = 0$$

$$L_z = I_z(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi) = \text{const.} = I_z \dot\psi_0 \text{ (groß)}$$

$$E = \frac{I_x}{2}(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta) + \frac{I_z}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)^2 + mgs\cos\vartheta = \text{const.}$$

$$= \frac{I_z}{2}\dot\psi_0^2 = \frac{L_z^2}{2I_z}$$

Bewegungsgleichung für ϑ:

$$U_{eff}(\vartheta) = \frac{1}{2}\frac{(L_{z_I} - \cos\vartheta L_z)^2}{I_x\sin^2\vartheta} - mgs(1-\cos\vartheta) + \frac{L_z^2}{2I_z} + mgs$$

$$\frac{d}{dt}\vartheta = \sqrt{\frac{2(E-U_{eff})}{I_x}}$$

Mit $u = \cos\vartheta \longrightarrow \frac{d}{dt}\vartheta = \frac{d}{dt}\arccos u = -\frac{\dot u}{\sqrt{1-u^2}}$

$$\dot u^2 = (1-u^2)\frac{2}{I_x}\left(\frac{L_z^2}{2I_z} - \frac{1}{2}\frac{u^2L_z^2}{I_x(1-u^2)} + mgs(1-u) - \frac{L_z^2}{2I_z} - mgs\right)$$

$$= (1-u^2)\left(-\frac{u^2L_z^2}{I_x^2(1-u^2)} - \frac{2}{I_x}mgsu\right) = -\frac{2}{I_x}mgsu(1-u^2) - \frac{L_z^2}{I_x^2}u^2$$

$\approx P_3(u)$

Nullstellen: $u_1 = 0$

$$L_z^2 u_2 = 2 I_x m g s (u_2^2 - 1) \longrightarrow u_2 \approx -2 \frac{I_x m g s}{L_3^2}$$

genauer: $$u_2^2 - \frac{L_z^2}{2 I_x m g s} u_2 - 1 = 0$$

$$u_2 = \frac{L_z^2}{4 I_x m g s} \pm \sqrt{\left(\frac{L_z^2}{4 I_x m g s}\right)^2 + 1}$$

$$\approx \begin{cases} \frac{L_z^2}{2 I_x m g s} >> 1 \quad \lightning \quad \text{mit } u_2 = \cos \vartheta_z \\ -\frac{L_z^2}{4 I_x m g s} \frac{1}{2} \left(\frac{4 I_x m g s}{L_z^2}\right)^2 = -\frac{2 I_x m g s}{L_z^2} \end{cases}$$

Da $|u| << 1$, vernachlässigen wir die $\mathcal{O}(u^3)$ Terme in den Bewegungsgleichungen:

$$\dot{u}^2 = -\frac{2}{I_y} m g s u - \frac{L_z^2}{I_x^2} u^2 \quad \Big| * \frac{1}{2\dot{u}} \frac{d}{dt}$$

$\longrightarrow$

$$\ddot{u} + \frac{L_z^2}{I_x^2} u = -\frac{1}{I_x} m g s$$

$\longrightarrow$ Allgemeine Lösung:

$$u(t) = \cos(\vartheta(t)) = c_1 \cos\left(\frac{L_3}{I_x} t + c_2\right) - \frac{m g s I_x}{L_z^2}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta(t) - \frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{\pi}{2} - \vartheta(t)$$

Wegen $\vartheta(0) = \frac{\pi}{2} \longrightarrow u(0) = 0$, $\dot{\vartheta}(0) = -\frac{\dot{u}(0)}{\sqrt{1-u^2(0)}} \longrightarrow \dot{u}(0) = 0$

Folgen die Integrationskonstanten:

$$c_2 = 0 , \quad c_1 = \frac{m g s I_x}{L_z^2}$$

$\longrightarrow$

$$\vartheta(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{m g s I_x}{L_z^2} \left[1 - \cos\left(\frac{L_3}{I_x} t \right) \right]$$

Die Nutationsbewegung hat also eine sehr geringe Amplitude und hohe Frequenz.

Mit $\sin \vartheta(t) \approx 1$ und $\cos \vartheta(t) \approx \frac{m g s I_x}{L_z^2} \left(\cos \frac{L_3 t}{I_x} - 1 \right)$ und $L_{z_I} = \text{const.} = 0$ wird aus der Lösung für $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_{z_I} - \cos \vartheta L_z}{I_x \sin^2 \vartheta} = - \frac{\cos \vartheta \, L_z}{I_x \sin^2 \vartheta} \approx \frac{m g s}{L_z} \left(1 - \cos \frac{L_3 t}{I_x} \right)$$

$$\longrightarrow \varphi(t) = \frac{m g s}{L_z} \left(t - \frac{I_x}{L_3} \sin \frac{L_3 t}{I_x} \right)$$

Die Symmetrieachse präzediert also mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit $\frac{m g s}{L_z}$ um die z-Achse.

$$\dot{\psi} = \frac{L_z}{I_z} + \frac{\cos \vartheta (\overbrace{\cos \vartheta L_z - L_{z_I}}^{=0})}{I_x \sin^2 \vartheta} \approx \frac{L_z}{I_z}$$

$\longrightarrow$ Hohe Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Symmetrieachse.

Die Erde ist aufgrund ihrer Rotation abgeplattet und keine perfekte Kugel. Die Richtung der Gezeitenkräfte ist so, daß sie ohne die Rotation zur Aufrichtung der Erdachse bezüglich der Ekliptik führen würden. Dies führt zu einer Präzession der Dauer von 25 850 Jahren.