3. Hamilton-Mechanik (Variationsprinzipien)

3.1 Variationsrechnung

Zentrales Objekt von Interesse ist das Funktional

$A : D_A \longrightarrow \mathbb{R}$

Funktional

Gebiet innerhalb eines Banachraums (d.h. vollständiger, normierter Vektorraum) von Funktionen, z.B. quadratintegrable

$A : f \longmapsto A[f] \in \mathbb{R}$

Die einfachsten und oft auch relevantesten Beispiele sind Integrale, z.B.:

$A[f] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x)$ Fläche der Funktion

$A[f] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \sqrt{1 + f'^2(x)}$ Länge des Funktionsgraphen

Wir können uns das Funktional als Verallgemeinerung einer Funktion mehrerer Veränderlicher auf unendlich viele Veränderliche (also die Funktionswerte an allen Punkten im Definitionsbereich denken). Somit kommt man auch zur Funktionalableitung.

Ein Funktional A heißt differenzierbar an der Stelle f, wenn ein lineares Funktional $\frac{\delta A}{\delta f}$ existiert, so daß gilt

$$\| A[f+g] - (A[f] + \frac{\delta A}{\delta f}[g]) \| \leq \varepsilon(\|g\|)$$

mit einer Funktion $\varepsilon(x)$ mit der Eigenschaft $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon(x)}{x}=0$. Dabei ist $\|\cdot\|$ die Norm im o.g. Banachraum.

Es gibt keine allgemein brauchbare Methode zur Bestimmung der Funktionalableitung. Allerdings haben die in der Physik relevanten Funktionale meistens die Form

$$A[f]=\int_{x_1}^{x_2} dx\; \ell(x, f(x), f'(x))$$

d.h. es sind Integrale, und der Integrand hängt von der Integrationsvariablen, $f(x)$ und $f'(x)$ ab.
Für eine kleine Änderung $f \longmapsto f+\delta f$ mit $\delta f(x_1)=\delta f(x_2)=0$ können wir dann die Variation bestimmen:

$$\begin{aligned}\delta A[f] &= A[f+\delta f]-A[f]\\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{\frac{\partial \ell}{\partial f}\,\delta f+\frac{\partial \ell}{\partial f'}\,\delta f'\right\}\\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{\frac{\partial \ell}{\partial f}\,\delta f-\left(\frac{\partial \ell}{\partial f'}\right)'\delta f\right\}\\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{\frac{\partial \ell}{\partial f}-\left(\frac{\partial \ell}{\partial f'}\right)'\right\}\delta f\end{aligned}$$

Randterme verschwinden wegen $\delta f(x_{1,2})=0$

partielle Integration

$$\longrightarrow \frac{\delta A}{\delta f}[g]=\int_{x_1}^{x_2} dx \left\{\frac{\partial \ell}{\partial f}-\left(\frac{\partial \ell}{\partial f'}\right)'\right\} g$$

Wir merken noch an, daß auch Funktionalableitungen nach Funktionen an einem bestimmten Punkt auftreten. Diese lassen sich folgendermaßen definieren:

$$\frac{\delta A[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A[f(x)+\varepsilon\,\delta(x-y)] - A[f(x)]}{\varepsilon}$$

Ist A von der obigen Integralform, dann läßt sich leicht feststellen, daß dies konsistent mit der oben berechneten Variation ist:

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2} dy \, \frac{\delta A[f]}{\delta f(y)} \, \delta f(y) = \int_{x_1}^{x_2} dy \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial \ell(x)}{\partial f(x)} - \left(\frac{\partial \ell(x)}{\partial f'(x)} \right)' \right\} \delta(x-y)\, \delta f(y)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial \ell(x)}{\partial f(x)} - \left(\frac{\partial \ell(x)}{\partial f'(x)} \right)' \right\} \delta f(x)$$

wobei wir benutzt haben:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \, \frac{\partial \ell(x)}{\partial f'(x)} \, \delta'(x-y) \underset{y \in]x_1;x_2[}{=} - \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial \ell(x)}{\partial f'(x)} \right)' \delta(x-y)$$

Zentrale Fragestellung: für welche f wird A extremal?

$\longrightarrow \dfrac{\delta A[f]}{\delta f}[g] = 0 \quad \forall g$ welche an den Endpunkten verschwinden

$\Longleftrightarrow \delta A = 0$ für beliebige δf

$\Longleftrightarrow$

Euler-Lagrange-Gleichung

$$\boxed{\frac{\partial \ell(x)}{\partial f(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \ell(x)}{\partial f'(x)} = 0}$$

Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung
Ggf. bleibt dabei noch zu untersuchen, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt.

Hängt das Funktional von mehreren Funktionen ab, z.B gemäß $A[f_1, \dots, f_n]$ und $\ell(x, f_1(x), \dots, f_n(x), f_1'(x), \dots, f_n'(x))$, dann finden wir die Variation

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial \ell}{\partial f_i} - \left(\frac{\partial \ell}{\partial f_i'} \right)' \right\} \delta f_i$$

Da die δf_i beliebig sind erhalten wir n i.A. gekoppelte Gleichungen

$$\frac{\partial \ell(x)}{\partial f_i(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \ell(x)}{\partial f_i'(x)} = 0$$

<u>Ein Erhaltungssatz</u>

Hängt $\ell(f, f')$ nicht explizit von x ab, dann folgt

$$\frac{d}{dx}\left(f' \frac{\partial \ell}{\partial f'} - \ell \right) = f'' \frac{\partial \ell}{\partial f'} + \underbrace{f' \frac{d}{dx} \frac{\partial \ell}{\partial f'} - f' \frac{\partial \ell}{\partial f}}_{=0 \text{ wegen Euler-Lagrange}} - f'' \frac{\partial \ell}{\partial f'} - \underbrace{\frac{\partial \ell}{\partial x}}_{=0} = 0$$

$$\Longrightarrow f' \frac{\partial \ell}{\partial f'} - \ell = \text{const.}$$

Wir betrachten der Allgemeinheit halber noch höhere Ableitungen, die aber in physikalisch relevanten Modellen nicht auftreten. Sei also

$$A[f] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; \ell(f'', f', f, x)$$

$\longrightarrow$

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial \ell}{\partial f} \delta f + \frac{\partial \ell}{\partial f'} \delta f' + \frac{\partial \ell}{\partial f''} \delta f'' \right)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial \ell}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \ell}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \ell}{\partial f''} \right) \delta f$$

$$\longrightarrow \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \ell}{\partial f''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \ell}{\partial f'} + \frac{\partial \ell}{\partial f} = 0$$ Differentialgleichung 4. Ordnung

Beispiele

Kürzeste Verbindung

$$A[f] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+f'^2(x)}$$

soll minimal sein

$$\longrightarrow \frac{d}{dx} \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}} \overset{!}{=} 0$$

Offensichtlich ist $f'(x) = \text{const.}$ eine Lösung, so daß $f(x) = ax + b$ die allgemeine Lösung mit zwei Integrations=konstanten, welche durch die Randpunkte bestimmt sind.

Brachistochrone

Ein Massenpunkt soll auf einer Bahn reibungsfrei aus der Ruhelage im Koordinatenursprung unter Einfluß der Schwerkraft nach (x_1, y_1) gleiten.
Es soll die Bahn $y(x)$ dabei so gewählt werden, daß die dazu benötigte Zeit τ minimal ist.

Energieerhaltung $\longrightarrow$ $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy = 0 \Longleftrightarrow$

$$2gy = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + y'^2) \quad \text{mit } y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\Longrightarrow dt = dx \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

Zu minimieren ist damit das Funktional

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} dx \underbrace{\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}}_{= l(y, y')}$$

Der Integrand hängt nicht explizit von x ab, so daß wir diesen Erhaltungssatz anwenden können:

$$y' \frac{\partial \ell}{\partial y'} - \ell = y' \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \left(y'^2 - 1 - y'^2 \right)$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \text{const.} = - \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

$$\Longrightarrow \quad y(1+y'^2) = 2a$$

Die Lösung ist eine Zykloide (Kreisrollbogen)

$$x(\lambda) = a(\lambda - \sin\lambda)$$
$$y(\lambda) = a(1-\cos\lambda)$$

Wir verifizieren dies durch Nachrechnen:

$$\frac{dx}{d\lambda} = a(1-\cos\lambda), \qquad \frac{dy}{d\lambda} = a\sin\lambda$$

$$y' = \frac{dy}{d\lambda}\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^{-1} = \frac{\sin\lambda}{1-\cos\lambda}$$

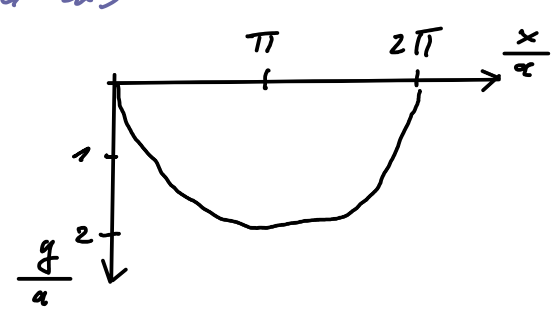
$$1+y'^2 = \frac{(1-\cos\lambda)^2 + \sin^2\lambda}{(1-\cos\lambda)^2} = \frac{1-2\cos\lambda+\cos^2\lambda+\sin^2\lambda}{(1-\cos\lambda)^2} = \frac{2}{1-\cos\lambda} = \frac{2a}{y}$$

Der Punkt (x_1, y_1) wird für $\lambda = \lambda_1$ erreicht mit

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{\lambda_1 - \sin\lambda_1}{1-\cos\lambda_1}, \qquad 0 < \lambda_1 < 2\pi$$

Der Radiusparameter ergibt sich als

$$a = \frac{1}{2} y_1 (1+y_1'^2) = \frac{y_1}{1-\cos\lambda_1}$$



Soll (x_1, y_1) auf dem

fallenden Teil der Zykloide liegen, dann muß $\lambda_1 < \pi$ sein und somit $2x_1 < \pi y_1$.

3.2 Variation mit Nebenbedingungen

Lagrange Multiplikatorenmethode

In der Analysis der Funktionen mehrerer Veränderlicher beweist man folgende Aussage:

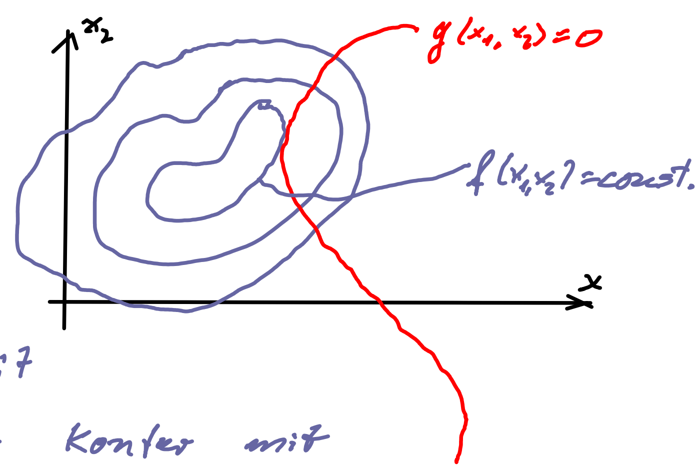
Die stationären Punkte einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ unter den Nebenbedingungen $g_\ell(x_1, \dots, x_n) = 0$ $(\ell = 1, \dots, m)$ erfüllen folgende Beziehungen:

Mit $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell g_\ell(x_1, \dots, x_n)$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{und} \quad g_\ell(x_1, \dots, x_n) = 0 \qquad \forall\, i, \ell$$

Mit der Benennung $x_{n+k} = \lambda_k$ läßt sich auch schreiben $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} = 0$ für $j = 1, \dots, n+m$

Beweis und Veranschaulichung für eine Nebenbedingung:



Im Falle von zwei Variablen machen wir uns anhand der Skizze folgendes klar:
In einem stationären Punkt ist die Kurve $(x_1(t), x_2(t))$ mit $g(x_1, x_2) = 0$ tangential zu einer Kontur mit $f(x_1, x_2) = \text{const.}$ Dies bedeutet, daß

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}$$ für $i = 1,2$, wie behauptet.

Anmerkung: Eine Nebenbedingung, beliebig viele Variablen

Für mehr als zwei Variable definiert die Nebenbedingung eine $n-1$-dimensionale Hyperfläche. Auf dieser Hyperfläche betrachten wir beliebige Kurven $s(t) = (s_1(t), \ldots, s_n(t))$, welche für $t=0$ durch einen stationären Punkt von f entlang der Fläche gehen. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} f(s(t))\Big|_{t=0} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial s_i(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

Damit steht $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{x=s(0)}$ senkrecht auf jeder beliebigen Kurve auf $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, d.h. parallel zur Richtung $\left(\frac{\partial g}{x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right)_{x=s(0)}$. $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}\Big|_{x=s(0)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x=s(0)} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{x=s(0)} = 0$$

wie behauptet.

Mehrere Zwangsbedingungen und Variablen:

$f(x_1, \ldots, x_n)$ ist zu extremalisieren, wobei

$g_\ell(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ell = 1, \ldots, m$

$\longrightarrow$

$$dg_\ell = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\ell}{\partial x_i} dx_i = 0$$ für dx_i auf der durch $g_j = 0$ gegebenen Hyperfläche

$\longrightarrow$ Für zunächst beliebige λ_ℓ gilt dann $\sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_\ell}{\partial x_i} dx_i = 0$

Gesucht ist nun ein Punkt auf der Hypofläche mit $df = 0$. Die Bedingungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ für $i = 1, \dots, n$ geben allerdings die Extrema ohne Nebenbedingungen. Man betrachtet daher

$\longrightarrow$

$$df = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_i} dx_i \right) \stackrel{!}{=} 0$$

↳ für den gesuchten Punkt

$\longrightarrow$ n Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial x_i} = 0$,

m Gleichungen $g_l = 0$

Welche (sofern keine Entartungen vorliegen), die $n+m$ Variablen $x_1, \dots, x_n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ eindeutig bestimmen.

Anmerkung: Formale Bestimmung der Multiplikatoren

Oft ist es am günstigsten, die λ_j in einer dem jeweiligen Problem angepaßter Weise zu bestimmen. Eine formale Lösung ergibt sich wie folgt:

Wir lösen zunächst die Zwangsbedingungen nach willkürlich gewählten Koordinaten

$x_l = h_l(x_{m+1}, \dots, x_n)$ mit $l = 1, \dots, m$

und schreiben damit

$f \equiv f(h_l(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n)$

Gesucht sind dann Koordinaten $x_{m+1}, \dots, x_n$ mit

$$\frac{df}{dx_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \partial_j h_k + \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 , \qquad j = m+1, \ldots, n$$

Auf der Hyperfläche der Zwangsbedingungen gilt:

$$\frac{dg_l}{dx_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial x_k} \partial_j h_k + \frac{\partial g_l}{\partial x_j} = 0$$

$$\longrightarrow \partial_j h_k = - \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^{-1}_{lk} \frac{\partial g_l}{\partial x_j}$$

$$\longrightarrow \frac{df}{dx_j} = \underbrace{- \sum_{\substack{l=1 \\ k=1}}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^{-1}_{lk}}_{= \lambda_j} \frac{\partial g_l}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$$

Lagrange-Multiplikatoren für Variationsprobleme

Betrachte dazu die Zwangsbedingungen

$$g_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = g_k(\vec{r}, t) = g_k(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \qquad k = 1, \dots, m$$

$$a_{ki}(\vec{r}, t) = \frac{\partial g_k}{\partial x_i}, \qquad a_{kt} = \frac{\partial g_k}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \ d g_k(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{3N} a_{ki}\, dx_i + a_{kt}\, dt = 0$$

Für festes t gilt also $\sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\, a_{ji}\, \delta x_i = 0$

Zu extremalisieren: $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

Gesucht sind $x_1, \dots, x_{3N}$, so daß

$$\delta \int dt\, L = \int dt \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i = 0$$

mit der Einschränkung, daß die x_i und δx_i den Zwangsbedingungen genügen. Wir können dann die obige Relation addieren und erhalten

$$\longrightarrow$$

$$\int dt \sum_{i=1}^{3N} \Bigg(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_i}}_{= F_i} - \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}}_{= -m_i \ddot{x}_i} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t)\, a_{ji}}_{= \lambda_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}} \Bigg) \delta x_i = 0$$

Sofern L die Lagrangefunktion ist, identifizieren wir hier die Lagrangegleichungen 1. Art, worauf wir in Kürze zurückkommen.

Da δx_i eine beliebige Verschiebung auf der Hyperfläche der Zwangsbedingungen ist, muß also gelten:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) a_{ji} = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, 3N$$

$$g_k(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, m$$

$\longrightarrow$ $3N+m$ Funktionen $x_i(t)$ und $\lambda_j(t)$ sind festgelegt

Im Vergleich zum gewöhnlichen Lagrange-Multiplikatoren-verfahren wird im Variationsproblem das Extremum über kontinuierliche Funktionen gesucht, gemäß den Ersetzungen

$$x_i \longrightarrow x_i(t) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} \longrightarrow \sum_{i=1}^{3N} \int dt$$

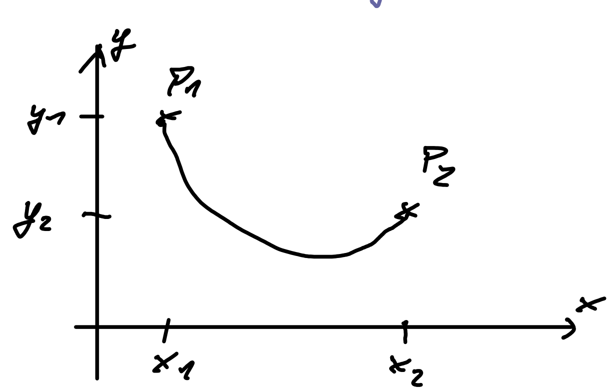
Wir können obige Gleichungen auch durch Zerlegung $\int dt \longrightarrow \sum \Delta t$ in diskrete Zeitintervalle im Grenzfall $\Delta t \longrightarrow 0$ erhalten.

Beispiel Kettenlinie

Bei fester Länge soll sie minimale potentielle Energie haben

$$E_{pot} = \varrho g \int_{x_1}^{x_2} dx \; y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2} = \text{minimal}$$

Masse pro Länge



Nebenbedingung:

$$l_K = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2} = \text{const.}$$

Diese Nebenbedingung ist im Gegensatz zu obigen holonomen isoperimetrisch d.h. eine Bedingung an ein Integral. Der Multiplikator ist damit keine Funktion $\lambda(x)$ sondern eine reelle Zahl λ, und wir extremalisieren

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \; \underbrace{(y-\lambda)\sqrt{1+y'^2}}_{=\ell(y,y')} \qquad \longrightarrow \; y' = \frac{dy}{dx}$$

Da der Integrand nicht explizit von x abhängt, gilt der oben hergeleitete Erhaltungssatz

$$-y'\frac{\partial \ell}{\partial y'} + \ell = \text{const.}$$

$$\longrightarrow -y'(y-\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + (y-\lambda)\sqrt{1+y'^2} = \frac{y-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = a = \text{const.}$$

$$\longrightarrow \quad y'^2 = \frac{(y-\lambda)^2}{a^2} - 1$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y-\lambda}{a}\right)^2 - 1}} = dx \implies x - x_0 = a\int_{z_0}^{z} \frac{dz'}{\sqrt{z'^2-1}} = -a \operatorname{arccosh} z + c$$

$$z' = \frac{y-\lambda}{a}$$

$$z = \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right) \implies y = \lambda + a\cosh\left(\frac{x}{a} + b\right)$$

Die drei Parameter a, b, λ lassen sich aus

$$y(x_1) = y_1$$

$$y(x_2) = y_2$$

$$\ell_K = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+y'^2}$$

bestimmen.

Wir betrachten nun Aufhängpunkte in gleicher Höhe

$(x_1, y_1) = (-1, 0) \qquad \Longrightarrow b = 0 \;, \quad \lambda = -\alpha \cosh \frac{1}{a}$

$(x_2, y_2) = (1, 0) \qquad\qquad y(x) = a \cosh \frac{x}{a} - a \cosh \frac{1}{a}$

$$y'(x) = \sinh \frac{x}{a}$$

$$l_k = \int_{-1}^{1} dx \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} = \int_{-1}^{1} dx \cosh \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \sinh \frac{x}{a} \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{a} \sinh \frac{x}{a}$$

3.3 Hamiltonsches Prinzip

Wir hatten oben bereits angemerkt, daß die Lagrange-gleichungen 1. Art

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \lambda_j(t) \vec{\nabla} g_j(\vec{r}, t), \qquad j = 1, \dots, R$$

aus Extremalisierung der Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L$$

mit $L = T - U$ unter den Nebenbedingungen $g_j = 0$ folgen.

Wir erinnern auch an die Lagrangegleichungen 2. Art

$$\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

wobei q_k $f = 3N - R$ generalisierte Koordinaten sind, so daß $g_j(x_1(q), \dots, x_{3N}(q), t) = 0$.

Diese sind aber die Euler-Lagrange-Gleichungen für

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(q, \dot{q}, t)$$

was aufgrund der oben festgestellten Extremaleigenschaft der Wirkung nun auch zu erwarten war.

$\longrightarrow$ Die Bewegungsgleichungen können durch Extremalisierung der Wirkung hergeleitet werden. Im Vergleich zur Herleitung der Lagrangegleichungen 2. Art im Kapitel 2 wird nun deren Form (d.h. Euler-Lagrange) transparent, sowie die Abwesenheit expliziter Zwangskräfte bei Verwendung generalisierter Koordinaten.

Nachdem wir im vorigen Kapitel die Lagrangegleichungen 2. Art aus denen 1. Art durch Elimination der Zwangskräfte hergeleitet haben, zeigt auch dies nochmals die Äquivalenz der beiden Verfahren.

Mit diesen Feststellungen können wir nun ein Extremal=prinzip formulieren, aus welchem sich Bewegungsgleichungen für Punktteilchen herleiten lassen:
Gegeben sei für Bahnkurven $q(t)$ das Wirkungsfunktional

$$S = S[q] = \int dt\; L(q, \dot{q}, t)$$

Dabei steht q für $(q_1, \dots, q_f)$ und L ist die Lagrangefunktion. Die Bewegungsgleichungen sind dann gegeben durch:

$\boxed{\text{Hamiltonsches Prinzip: } \delta S[q] = 0}$

wobei in der Variation die Endpunkte $q(t_1)$ und $q(t_2)$ festgehalten werden.

Bemerkungen:

* Für $L = T - V$ ergeben sich die Newtonschen Gleichungen (ggf. mit Zwangsbedingungen). Allerdings können mit anderen Lagrangefunktionen auch andere Theorien, z.B. die relativistische Mechanik, definiert werden. Auch Feldtheorien lassen sich mittels Extremalprinzipien formulieren.
* Die Wirkung ist ein Skalar, d.h. sie ist invariant hier unter Galileitransformationen, in anderen Fällen aber z.B. unter Lorentztransformationen oder „inneren Symmetrien". Die hergeleiteten Bewegungsgleichungen sind dann automatisch im Einklang mit dem Symmetrieprinzip.
* Extremalprinzip führt zu lokalen, kausalen Gleichungen ?
* Ausgangspunkt der Quantisierung: Pfadintegral oder kanonischer Formalismus.
* Forminvarianz: Gibt es eine bijektive Abbildung

  $$q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_f) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, f,$$

  dann sehen wir unmittelbar, daß

  $$\frac{\partial L(q', \dot{q}', t)}{\partial q'_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q', \dot{q}', t)}{\partial \dot{q}'_k} = 0$$

  äquivalent ist zu den Lagrangegleichungen 2. Art in den ungestrichenen Koordinaten. Dabei ist

$$L(q',\dot{q}',t) = L(q(q'),\dot{q}(q'),t)$$

(Man kann dies auch explizit nachweisen was aber deutlich mühseliger als die Begründung durch das Hamiltonsche Prinzip ist.)

Eichtransformation

Verschiedene Lagrangefunktionen können zu den gleichen Bewegungsgleichungen führen, z.B.

$L \longmapsto L^* * \text{const.}$ oder $L \longmapsto L^* + \text{const.}$

Wir nennen entsprechende Lagrangefunktionen gleichwertig.

Eine weitere wichtige Klasse gleichwertiger Lagrangefunktionen ergibt sich aus Eichtransformationen:

$$L(q,\dot{q},t) \longmapsto L^*(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt} f(q,t)$$

mit einer beliebigen Funktion $f(q,t)$.

Für die Wirkung gilt dann:

$$S^* = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L^* = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L + f(q(t_2),t_2) - f(q(t_1),t_1)$$

Wegen $\delta S^* = \delta S + \sum_{i=1}^{f} \Big\{ \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_{t_2} \delta q(t_2) - \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)_{t_1} \delta q(t_1) \Big)$

und $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \longrightarrow \delta S^* = \delta S$

d.h. L und L^* sind gleichwertig.

Beispiel: Galilei-Transformation

$$\vec{r} \longmapsto \vec{r} + \vec{v}\, t$$
$$\dot{\vec{r}} \longmapsto \dot{\vec{r}} + \vec{v}$$
$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} \longmapsto T^* = \frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{r}}^{\,2} + 2 \dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} + \vec{v}^{\,2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{d}{dt} \left(m \vec{r} \cdot \vec{v} + \frac{m}{2} \vec{v}^{\,2} t \right)$$

$$\longrightarrow L^* - L = \frac{d}{dt} \left(m \vec{r} \cdot \vec{v} + \frac{m}{2} \vec{v}^{\,2} t \right)$$

$\longrightarrow$ läßt die Bewegungsgleichung invariant

Beispiel: Elektrodynamik

Punktteilchen im elektromagnetischen Feld

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^{\,2} - q\, \Phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \qquad \text{(Gauß-cgs)}$$
$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Eichtransformationen

$$\vec{A} \longmapsto \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}, t)$$
$$\Phi \longmapsto \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}$$
$$\vec{E} \longmapsto \vec{E}$$
$$\vec{B} \longmapsto \vec{B}$$
$$L \longmapsto L + q \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}, t)$$
$$= L + \frac{q}{c} \frac{d}{dt} \Lambda(\vec{r}, t)$$

$\longrightarrow$ Bewegungsgleichungen (Lorentzkraft) bleibt invariant.

3.4 Das Noether-Theorem

Wir sagen, ein System besitzt eine Symmetrie, wenn es eine (differenzierbare) Abbildung

$$q(t) \longmapsto q'(\alpha, t) \quad \text{mit} \quad q'(0,t) = q(t)$$

gibt so daß gilt: Ist $q(t)$ Lösung der Bewegungsgleichung, dann ist $q'(\alpha,t)$ ebenso eine Lösung. Ist eine solche Symmetrie gegeben, dann gibt es eine Erhaltungsgröße (oder auch Integral der Bewegung, Konstante der Bewegung).

Beweis

Zunächst stellen wir fest, daß die Bewegungsgleichungen invariant sind, sofern sich die Lagrangefunktion nur um eine totale Zeitableitung (Eichung) ändert. Für kleine α läßt sich die Abhängigkeit von α daher folgendermaßen linearisieren:

$$L(q'(\alpha,t), \dot{q}'(\alpha,t), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \alpha \frac{d}{dt} R(q, \dot{q}, t)$$

$$\Longrightarrow \left.\frac{dL}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} R(q, \dot{q}, t)$$

Vergleich mit

für N Freiheitsgrade $\equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_i'} \frac{\partial q_i'}{\partial \alpha}$ etc.

$$\left.\frac{d}{d\alpha} L(q', \dot{q}', t)\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{\partial L}{\partial q'} \frac{\partial q'}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial q'}{\partial \alpha} + \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q'} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'}\right]}_{=0 \text{ (Euler-Lagrange)}} \frac{\partial q'}{\partial \alpha}$$

$\longrightarrow$ Mit der

Noetherladung

$$\boxed{Q = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial q'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} - R}$$

ist $\frac{d}{dt} Q = 0$, was zu beweisen war.

Dabei können auch mehrere Symmetrien und erhaltene Ladungen gleichzeitig auftreten.

Beispiel: Zeittranslation

$$q(t) \longmapsto q'(\alpha, t) = q(t+\alpha)$$

$$\longrightarrow \frac{dL}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \frac{dL}{dt}\Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dR}{dt}$$

Falls L nicht explizit von der Zeit abhängt, dann verschwindet $\frac{\partial L}{\partial t}$ und $\Longrightarrow R = L$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = 2T - (T - U) = T + U = E$$

$\longrightarrow$ Hängt die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit ab, dann ist die Energie erhalten.

Beispiel: Raumtranslation

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, betrachte x-Richtung

$$x(t) \longmapsto x'(\alpha, t) = x(t) + \alpha$$

Für Translationsinvarianz in x-Richtung darf L nur von $\dot{x}$, nicht von x abhängen.

$\longrightarrow$

$$\frac{dL}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \frac{dR}{dt} = 0 \longrightarrow Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}'} \frac{\partial x'}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = m\dot{x}$$

$\longrightarrow$ Impulserhaltung

Beispiel: Drehung (um z-Achse)

$$\vec{r}(t) \longmapsto \vec{r}'(\alpha, t) = R(\alpha)\,\vec{r} \quad \text{mit} \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hängt L nur von $|\dot{\vec{r}}|$ ab, nicht von $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ $\Longrightarrow$

$$\left.\frac{dL}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{dR}{dt} = 0$$

$$Q = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}'} \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = m\,\dot{\vec{r}} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{r}\right] = m(-\dot{x}y + \dot{y}x)$$

$$= m\left[\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right]_z = \ell_z$$

$\longrightarrow$ Drehimpulserhaltung

In Feldtheorien sind neben diesen Raumzeitsymmetrien auch sogenannte innere Symmetrien von größter Bedeutung, da diese mit dem Noethertheorem zu erhaltenen Ladungen führen.