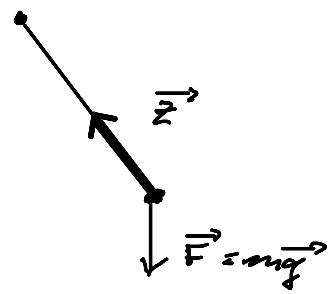
2. Lagrange-Mechanik

2.1 Lagrangegleichungen 1. Art

Liegen Zwangsbedingungen vor, z.B. die Einschränkung der Bewegung auf eine bestimmte Fläche, müssen in den Newtonschen Gleichungen Zwangskräfte $\vec{Z}$ berücksichtigt werden, d.h. im Falle eines Massenpunktes



z.B. Pendel

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}$$

Aus der Bestimmung der Zwangskräfte ergeben sich die Lagrangegleichungen 1. Art. Eliminiert man dagegen die Zwangsbedingungen durch Einführung generalisierter Koordinaten, erhält man die Lagrangegleichungen 2. Art. Letztlich bereiten diese Entwicklungen auf das Hamiltonsche Prinzip vor, welches wichtiger Ausgangspunkt für weitere theoretisch physikalische Methoden ist.

Eine Zwangsbedingung für die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Fläche kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$g(\vec{r}, t) = 0$$

(Zwei Bedingungen dieser Art würden die Bewegung auf den Schnitt zweier Flächen, also eine Kurve, einschränken.)

Da die Bewegung innerhalb der Fläche durch die Zwangskraft nicht eingeschränkt ist, steht $\vec{Z}$ orthogonal auf dieser:

$$\vec{Z} \parallel \vec{\nabla} g(\vec{r}, t)$$

$\longrightarrow$ Ansatz: $\vec{Z}(\vec{r},t) = \lambda(t)\,\vec{\nabla} g(\vec{r},t)$

mit $\lambda(t)$ einer zunächst unbekannten Funktion.

$\longrightarrow$

Lagrangegleichungen 1. Art

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) + \lambda(t)\,\vec{\nabla} g(\vec{r},t)$$

Zusammen mit der Zwangsbedingung $g(\vec{r},t)=0$ erhalten wir so vier Gleichungen für die vier Unbekannten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ $(\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{e}_x + y(t)\,\hat{e}_y + z(t)\,\hat{e}_z)$ und $\lambda(t)$.

Wir betrachten nun $3N$ Koordinaten $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N\} \equiv \{x_1, x_2, \dots, x_{3N}\}$ und R Zwangsbedingungen $\longrightarrow$

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{j=1}^{R} \lambda_j(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_j(x_1,\dots,x_{3N},t), \quad n = 1,\dots,3N$$

$$g_j(x_1,\dots,x_{3N},t) = 0, \quad j = 1,\dots,R$$

Klassifizierung der Zwangsbedingungen:

Können diese in einem Gleichungssystem obiger Form geschrieben werden, dann heißen sie holonom (ganz gesetzlich).

Andernfalls (wenn diese z.B. z.T. die Form von Ungleichungen haben oder von Geschwindigkeiten abhängen & sofern sich dies nicht durch Integration/Umformung beseitigen läßt), heißen sie anholonom.

In beiden Fällen werden noch bezüglich der Zeitabhängigkeit folgende Begriffe benutzt:

skleronom (starr) : keine explizite Zeitabhängigkeit

rheonom (fließend): mit expliziter Zeitabhängigkeit

Diskussion der Lagrangegleichungen für Spezialfälle

1. Teilchen auf Kurve $\longrightarrow N=1, \quad R=2$

$$\left.\begin{array}{l} g_1(\vec{r},t)=0 \\ g_2(\vec{r},t)=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \vec{Z}(\vec{r},t) = \lambda_1(t)\,\vec{\nabla} g_1(\vec{r},t) + \lambda_2(t)\,\vec{\nabla} g_2(\vec{r},t)$$

Da die Bewegung des Teilchens auf die Kurve beschränkt ist, wirkt die Zwangskraft nicht entlang der Tangente, sondern senkrecht zu dieser. Obige Form ist ein allgemeiner Ansatz für eine solche Zwangskraft senkrecht zur Kurve.

Konkret lauten hier die Lagrangegleichungen 1. Art:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \vec{\nabla} g_j(\vec{r},t), \qquad g_j(\vec{r},t)=0$$

$\longrightarrow$ 5 Gleichungen für 5 Unbekannte

2. Zwei Teilchen und eine Zwangsbedingung $\longrightarrow N=2, \quad R=1$

$$\begin{array}{l} m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 + \lambda(t)\dfrac{\partial}{\partial \vec{r}_1} g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 + \lambda(t)\dfrac{\partial}{\partial \vec{r}_2} g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t) \end{array}, \quad g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)=0$$

$\longrightarrow$ 7 Gleichungen, 7 Unbekannte

Zwangskräfte $\quad \vec{Z}_{1,2} = \lambda(t)\dfrac{\partial g(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)}{\partial \vec{r}_{1,2}}$

Da nur eine Zwangsbedingung vorliegt, taucht auch nur eine Funktion $\lambda(t)$ auf.

Von Interesse sind weiter folgende Fälle:

a) Zwangsbedingung hängt von nur einer Koordinate ab, z.B.

$$g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \equiv g(\vec{r}_1, t) = 0 \longrightarrow \vec{Z}_1 = \lambda(t) \frac{\partial g(\vec{r}_1, t)}{\partial \vec{r}_1}, \quad \vec{Z}_2 = 0$$

b) Unmittelbare Wirkung zwischen zwei Teilchen, z.B.

$$g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = g(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, t) \longrightarrow \vec{Z}_1 = \lambda(t) \frac{\partial g(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, t)}{\partial \vec{r}_1}$$

$$= \lambda(t)\, g'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|, t) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\vec{Z}_2$$

$$g'(r,t) = \frac{\partial}{\partial r} g(r,t)$$

im Einklang mit dem 3. Axiom.

Erhaltungsgrößen

Multipliziere Lagrangegleichungen 1. Art mit $\dot{x}_n$ & summiere über n:

Linke Seite $\longrightarrow$ Änderung der kinetischen Energie:

$$\sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \dot{x}_n = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \dot{x}_n^2 = \frac{d}{dt} T$$

Auf der rechten Seite (mit konservativen Kräften F_n)

$\longrightarrow$ Änderung der potentiellen Energie:

$$\sum_{n=1}^{3N} F_n \dot{x}_n = -\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_n} \dot{x}_n = -\frac{d}{dt} U(x_1, \dots, x_n)$$

Insgesamt:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_{n=1}^{3N} \sum_{j=1}^{R} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_n} \dot{x}_n}$$

Weiter folgt mit

$$\frac{d}{dt} g_j(x_1, \dots, x_{3N}, t) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_j}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial g_j}{\partial t} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}(T+U) = -\sum_{j=1}^{R} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial t}$$

In anderen Worten haben wir gefunden:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Kräfte konservativ \&}\\ \text{Zwangsbedingungen}\\ \text{skleronom}\end{array}\right\} \longrightarrow T+U=\text{const.}$$

2.2 Anwendungen der Lagrangegleichungen 1. Art

Elimination der λ_j

Oft ist es günstig, die λ_j zu eliminieren, wobei man folgendermaßen vorgehen kann:

$$\frac{d^2 g_j}{dt^2}=0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_j}{\partial x_n}\ddot{x}_n = G_j(x,\dot{x},t)$$

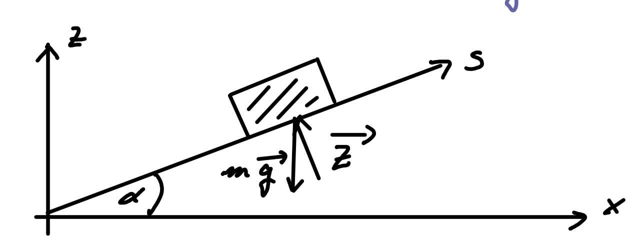
Wir haben dabei benutzt, daß $\ddot{x}_n$ nur linear vorkommen kann und alle anderen Terme in G_j zusammengefaßt mit der Kurzschreibweise $x=(x_1,\dots,x_{3N})$, $\dot{x}=(\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_{3N})$

Mit der Bewegungsgleichung folgt dann

$$\sum_{n=1}^{3N}\frac{\partial g_j(x,t)}{\partial x_n}\frac{1}{m_n}\left(F_n(x,\dot{x},t)+\sum_{k=1}^{R}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial x_n}\right)=G_j(x,\dot{x},t)$$

$\longrightarrow$ lineares, inhomogenes System von R Gleichungen, die wir nach den λ_k auflösen können

Schiefe Ebene (reibungsfrei)



Zwangsbedingungen: $\frac{z}{x}=\tan\alpha$

$g_1(\vec{r},t)=x\sin\alpha - z\cos\alpha = 0$

$g_2(\vec{r},t)=y=0$

$$\longrightarrow \quad m\ddot{\vec{r}} = -mg\,\vec{e}_z + \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2$$

In Komponenten:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \sin\alpha$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2$$

$$m\ddot{z} = -\lambda_1 \cos\alpha - mg$$

Eliminiere $\lambda_{1,2}$: (hier: $G_j \equiv 0$)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\partial g_1}{\partial x}}}{\sin\alpha}\ \frac{1}{m}\,\lambda_1\, \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\partial g_1}{\partial x}}}{\sin\alpha} - \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\partial g_1}{\partial z}}}{\cos\alpha}\ \frac{1}{m}\Big(\underset{\substack{\uparrow \\ F_z}}{-mg} + \lambda_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\partial g_1}{\partial z}}}{(-\cos\alpha)}\Big) = 0$$

$$\longrightarrow \quad \lambda_1 \sin^2\alpha + \lambda_1 \cos^2\alpha + mg\cos\alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 = -mg\cos\alpha$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\partial g_2}{\partial y}}}{1}\ \frac{1}{m}\,\lambda_2\ \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\partial g_2}{\partial y}}}{1} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_2 = 0$$

$\longrightarrow$

$$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha\cos\alpha$$

$$m\ddot{y} = 0$$

$$m\ddot{z} = mg\cos^2\alpha - mg = -mg\sin^2\alpha$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen lautet:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \sin\alpha\cos\alpha + a_1 t + a_2$$

$$y(t) = b_1 t + b_2$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \sin^2\alpha + c_1 t + c_2$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus den Zwangsund Anfangsbedingungen.

$$g_1 = -\frac{1}{2} g t^2 \sin^2\alpha \cos\alpha + (a_1 t + a_2)\sin\alpha$$
$$+ \frac{1}{2} g t^2 \sin^2\alpha \cos\alpha - (c_1 t + c_2)\cos\alpha = 0$$

$$\longrightarrow (a_1 \sin\alpha - c_1 \cos\alpha) t + a_2 \sin\alpha - c_2 \cos\alpha = 0$$

$$g_2 = b_1 t + b_2 = 0$$

Dies muß für beliebige Werte von t gelten, also folgt:

$$b_{1,2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 \sin\alpha - c_1 \cos\alpha &= 0 \\ a_2 \sin\alpha - c_2 \cos\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a_1 &= v_0 \cos\alpha, & c_1 &= v_0 \sin\alpha \\ a_2 &= s_0 \cos\alpha, & c_2 &= s_0 \sin\alpha \end{aligned}$$

Außerdem definieren wir $s(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha + v_0 t + s_0$

Rücksubstitution in die Lösungen $\longrightarrow$

$$x(t) = s(t) \cos\alpha$$
$$y(t) = 0$$
$$z(t) = s(t) \sin\alpha$$

Die Integrationskonstanten v_0, s_0 können dann mittels der Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Zwangskraft:

$$\vec{Z} = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2 = -mg \cos\alpha \, (\hat{e}_x \sin\alpha - \hat{e}_z \cos\alpha)$$
$$|\vec{Z}| = m g \cos\alpha$$

Wie in der elementaren geometrischen Diskussion dieses Problems kompensiert $\vec{Z}$ also die Schwerkraftkomponente senkrecht zur Ebene.

Insgesamt bewegt sich der Massenpunkt längs der Ebene mit

$$s(t) = x(t)\cos\alpha + z(t)\sin\alpha$$

entsprechend der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{s} = -mg\sin\alpha$$

d.h. auf der rechten Seite steht die Schwerkraftkomponente parallel zur Ebene.

Da die Kraft $\vec{F} = m\vec{g}$ konservativ ist und die Zwangsbedingung skleronom gilt Energieerhaltung:

$$T + U = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + mgz = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + mgs\sin\alpha$$

$$= \frac{m}{2}(-gt\sin\alpha + v_0)^2 + mg\sin\alpha\left(-\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + v_0t + s_0\right)$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + mgs_0\sin\alpha$$

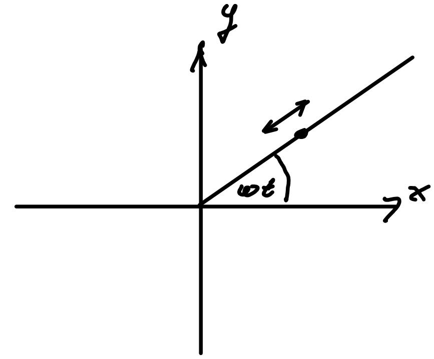
Aus den Resultaten für die Koordinate y in diesem Beispiel sehen wir, daß allgemein Richtungen, in deren keine Bewegung erfolgt und in die keine Kräfte wirken, ignoriert werden können.

<u>Massenpunkt auf rotierender Stange</u>

Die Stange rotiere dabei mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der x-y-Ebene.

Nutze Polarkoordinaten:

$$x = \varrho \cos\varphi$$
$$y = \varrho \sin\varphi$$



Die Zwangsbedingung lautet

$$\frac{y}{x} = \tan \omega t \iff$$

$$g = \arctan\frac{y}{x} - \omega t = \varphi - \omega t = 0$$

Mit $\vec{r} = x(t)\,\hat{e}_x + y(t)\,\hat{e}_y = \varrho(t)\,\hat{e}_\varrho$

und $\vec{\nabla} = \hat{e}_\varrho \frac{\partial}{\partial\varrho} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varphi}$

sowie dem Resultat aus dem 1. Kapitel

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_\varrho + (\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})\,\hat{e}_\varphi$$

können wir schreiben:

$$m\ddot{\vec{r}} = \lambda\vec{\nabla}g \longrightarrow \begin{aligned} m\ddot{\varrho} - m\varrho\dot{\varphi}^2 &= \lambda\frac{\partial g}{\partial\varrho} = 0 \\ m\varrho\ddot{\varphi} + 2m\dot{\varrho}\dot{\varphi} &= \frac{\lambda}{\varrho}\frac{\partial g}{\partial\varphi} = \frac{\lambda}{\varrho} \end{aligned}$$

Elimination von λ:

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = \ddot{\varphi} = 0 \longrightarrow 2m\dot{\varrho}\dot{\varphi} = \frac{\lambda}{\varrho} \iff \lambda = 2m\varrho\dot{\varrho}\dot{\varphi} \equiv \lambda(\varrho, \dot{\varrho}, \dot{\varphi})$$

Rücksubstitution in Bewegungsgleichung $\longrightarrow m\varrho\ddot{\varphi} = 0$

$\varrho(t) = 0$ ist eine triviale Lösung des Gleichungssystems.

Für $\varrho(t) \neq 0$ folgt $\ddot{\varphi} = 0 \longrightarrow \varphi = At + B$

Einsetzen in $g = 0 \longrightarrow At + B - \omega t = 0 \longrightarrow A = \omega,\ B = 0$

$$\longrightarrow \varphi(t) = \omega t$$

Bleibt zu lösen: $m\ddot{\varrho} - m\omega^2\varrho = 0$.

$$\longrightarrow \quad \varrho(t) = A\, e^{\omega t} + B\, e^{-\omega t}$$

wobei A, B aus den Anfangsbedingungen folgen. Man kann diese so wählen, daß die Masse im labilen Gleichgewicht $\varrho = 0$ zur Ruhe kommt, im Allgemeinen wird sie aber mit exponentiell zunehmender Geschwindigkeit weggeschleudert.

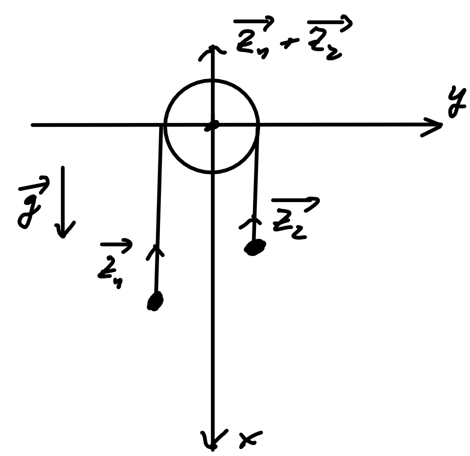
Zwangskraft:

$$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} g = 2m\, \varrho\, \dot{\varrho}\, \dot{\varphi}\, \frac{\hat{e}_\varphi}{\varrho} = 2m\, \dot{\varrho}\, \omega\, \hat{e}_\varphi = 2m\, \omega^2\, \hat{e}_\varphi \left(A e^{\omega t} - B e^{-\omega t}\right)$$

Auf die Stange wirkt gemäß des 3. Gesetzes dabei die entgegengesetzte Kraft $-\vec{Z}$.

$E = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2}$ ist nicht erhalten, was aufgrund der rheonomen Zwangsbedingung erlaubt ist.

<u>Atwoodsche Fallmaschine</u>



Masselose, reibungsfreie Rolle mit Radius R.

6 kartesische Koordinaten

$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$

5 Zwangsbedingungen

$y_1 = -R, \quad y_2 = R, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0 \longrightarrow$ trivial

$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \ell = 0$ mit $\ell = L - \pi R$

↳ Seillänge

$\longrightarrow$

Bewegungsgleichungen mit Zwangskräften:

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g + \lambda$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g + \lambda$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \longrightarrow \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$$

Rücksubstitution in Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m_1 m_2 \ddot{x}_1 &= m_1 m_2 g + m_2 \lambda \\ -m_1 m_2 \ddot{x}_1 &= m_1 m_2 g + m_1 \lambda \end{aligned}\right\} \longrightarrow \lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{Z}_1 = \vec{Z}_2 = \lambda \, \vec{\nabla}_{1,2} \, g = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \hat{e}_x$$

Für $m_1 = m_2$ ist dies die Gewichtskraft der Massen, andernfalls ergibt sich eine Abweichung aufgrund der Beschleunigung.

Setze λ in Bewegungsgleichungen ein:

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = g \frac{m_1^2 + m_1 m_2 - 2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\longrightarrow (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 = (m_1 - m_2) g$$

$\longrightarrow$ Lösung $\quad x_1(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2} g t^2 + c_1 t + c_2$

$$E = T + U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = \text{const.}$$

da die Schwerkraft konservativ ist und die Zwangsbedingungen skleronom sind.

2.3 Lagrangegleichungen 2. Art

Ist man an der expliziten Berechnung der Zwangskräfte nicht interessiert, ist es meist einfacher, diese automatisch aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren. $\longrightarrow$ Lagrangegleichungen 2. Art.

Verallgemeinerte Koordinaten

R holonome Zwangsbedingungen
N Massenpunkte

$\Big\}$ $f = 3N - R$ Freiheitsgrade / unabhängige Koordinaten

$\longrightarrow$ Benutze f generalisierte Koordinaten $q_1, \dots, q_f$ mit $x_n = x_n(q_1, \dots, q_f, t)$, so daß die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind: $g_j(x_1(q_1, \dots, q_f), \dots, x_n(q_1, \dots, q_f), t) = 0$.

Elimination der Zwangskräfte

Da die Zwangsbedingungen die generalisierten Koordinaten nicht einschränken, folgt

$$\frac{\partial g_j}{\partial q_k} = 0 \iff \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_j}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, \dots, f)$$

Multipliziere nun die Lagrangegleichungen 1. Art

$$m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{j=1}^{R} \lambda_j(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_j(x_1, \dots, x_{3N}, t)$$

mit $\dfrac{\partial x_n}{\partial q_k}$ und summiere über n $\longrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \qquad \left(\text{da } \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \frac{\partial g_j}{\partial x_n} = 0 \right)$$

Herleitung der Lagrangegleichungen 2. Art

Betrachte die kinetische Energie $T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n^2$ mit

$$\dot{x}_n = \frac{dx_n}{dt} = \sum_{n=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

Abhängigkeit von T von den generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \left(\ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \right)$$

wobei wir $\frac{d}{dt}$ und $\frac{\partial}{\partial q_k}$ im letzten Term vertauscht haben:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_n(q,t)}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^{f} \frac{\partial^2 x_n}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 x_n}{\partial t \, \partial q_k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_k} \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_n}{\partial t} \right)}_{= \dot{x}_n} = \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k}$$

partielle Ableitungen vertauschen

Die erste und dritte Gleichung fassen wir zusammen zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} =: Q_k$$

generalisierte Kraft

Potential: $F_n = - \frac{\partial U(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_n}$

Mit $x_n = x_n(q,t) \longrightarrow U(q,t) \longrightarrow$

$$-\frac{\partial U}{\partial q_k} = -\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = Q_k$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(T-U) \underset{\uparrow}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T = Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}(T-U)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Dies führt zur Definition der <u>Lagrangefunktion</u>

$$\boxed{L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,t)}$$

als Differenz aus kinetischer und potentieller Energie.

Damit schreiben wir obige Gleichungen als die

<u>Lagrangegleichungen 2. Art</u>

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_k}}$$

Vorteile der Lagrangeformulierung:

* L ist eine einfach zu bestimmende skalare Größe — kann Vektor-/Tensorüberlegungen umgehen. Da die Gleichungen skalar sind, sind sie invariant unter Koordinatentransformationen, im Gegensatz zum vektoriell formulierten 2. Newtonschen Gesetz.
* Routineverfahren zur Bestimmung von Bewegungsgleichungen.
* Verallgemeinerbar auf neue Theorien, insbesondere Feldtheorien (Elektrodynamik etc.).

System & Systemzustand

System: nicht notwendig abgeschlossener Ausschnitt der physikalischen Welt mit bestimmter Zahl an explizit zu behandelnden Freiheitsgraden $q_1(t), \dots, q_f(t)$

Lagrangegleichungen 2. Art: f Gleichungen 2. Ordnung

$\longrightarrow$ Der Systemzustand zur Zeit $t=0$ ist durch $2f$ Anfangsbedingungen $q_1(0), \dots, q_f(0)$ und $\dot{q}_1(0), \dots, \dot{q}_f(0)$ gegeben.

Energieerhaltung

Zeitableitung der Lagrangefunktion:

$$\frac{d}{dt} L(q,\dot{q},t) = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\overset{\text{Lagrange 2}}{=} \sum_{k=1}^{f} \left(\dot{q}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial L}{dt} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Die Größe in Klammern ist also erhalten, wenn L nicht explizit von der Zeit abhängt.

Wir betrachten nun skleronome Zwangsbedingungen mit

$x_n = x_n(q) \longrightarrow$

$$T = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n}{2} \sum_{r,s=1}^{f} \frac{\partial x_n}{\partial q_r} \frac{\partial x_n}{\partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s =: \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{f} \mu_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s$$

wobei wir mit μ_{rs} eine symmetrische Matrix definiert haben.

$\longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - T + U$$

U hängt nicht von $\dot{q}$ ab

$$= \frac{1}{2} \sum_{k,r,s=1}^{f} \left(\mu_{rs} \delta_{kr} \dot{q}_s + \mu_{rs} \dot{q}_r \delta_{ks} \right) \dot{q}_k - T + U$$

$$= \underbrace{\sum_{r,s=1}^{f} \mu_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s}_{=2T} - T + U = T + U = E$$

Die Gesamtenergie ist also erhalten, und wir fassen den Erhaltungssatz zusammen als

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \;\&\; x_n = x_n(q) \Longrightarrow E = T + U = \text{const.}$$

<u>Zyklische Koordinaten</u>

Hängt L nicht von einer bestimmten Koordinate q_k ab, dann heißt diese <u>zyklisch.</u>

Mit $$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \xRightarrow[\text{Lagrange 2}]{} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

Der <u>generalisierte Impuls</u> $p_k = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ ist dann erhalten.

Reibungskräfte

Solchen Kräften $F_{diss,n} = -\gamma_n \dot{x}_n$ kann kein Potential zugeordnet werden. Um Reibung zu berücksichtigen, gehen wir zurück zur aus der Elimination der Zwangskräfte gewonnenen Gleichung und modifizieren diese zu

$$\sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = \underbrace{\sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}}_{= Q_k} + \underbrace{\sum_{n=1}^{3N} F_{diss,n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k}}_{= Q_{diss,k}}$$

$\longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + Q_{diss,k}$$

In den Lagrangegleichungen 2. Art entsteht damit ein Zusatzterm:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} + Q_{diss,k}$$

Letzteren wollen wir als Ableitung einer einfach zu konstruierenden skalaren Funktion schreiben. $\longrightarrow$

$$D(\dot{x}) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\gamma_n}{2} \dot{x}_n^2$$

Rayleighsche Dissipationsfunktion

$$D(q,\dot{q},t) = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\gamma_n}{2} \left(\dot{x}_n(q,\dot{q},t)\right)^2$$

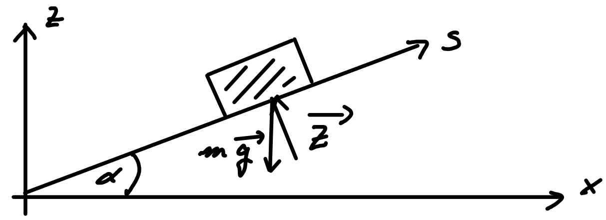
$$\longrightarrow Q_{diss,k} = -\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_k} = -\sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n}\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial D(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\dot{x}_n = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_n}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} + \frac{\partial D(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

2.4 Beispiele zu den Lagrangegleichungen 2. Art

Schiefe Ebene



Wähle s als verallgemeinerte Koordinate,

$$x = x(s) = s\cos\alpha \qquad T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\dot{s}^2$$

$$y = y(s) = 0$$

$$z = z(s) = s\sin\alpha \qquad U = mgz = mg\,s\sin\alpha$$

$$\longrightarrow L(s,\dot{s}) = T-U = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - mg\,s\sin\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = m\ddot{s} + mg\sin\alpha = 0$$

$$\longrightarrow$$

$$s(t) = -\frac{g}{2}t^2\sin\alpha + v_0 t + s_0$$

Massenpunkt auf rotierender Stange

Verallgemeinerte Koordinate: e

$$x = e\cos\omega t$$

$$y = e\sin\omega t$$

$$L = T - \underbrace{U}_{=0} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\dot{e}^2 + \frac{m}{2}\omega^2 e^2$$

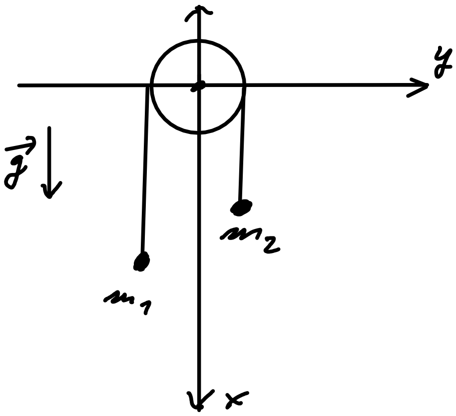
$$\longrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{e}} - \frac{\partial L}{\partial e} = m\ddot{e} - m\omega^2 e = 0$$

Wir erinnern an den Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} \longrightarrow m\dot{e} - \frac{m}{2}\omega^2 e^2 = \text{const.}$$

Atwoodsche Fallmaschine



Wähle verallgemeinerte Koordinate

$q = x_1 \qquad x_2 = l - q$

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2\right) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2$$

$$U = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 = g(m_2 - m_1) q + \text{const.}$$

↳ wähle gleich Null (irrelevant in Lagrangegleichungen)

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 - g(m_2 - m_1) q$$

$$\longrightarrow (m_1 + m_2)\ddot{q} = (m_1 - m_2) g$$

Krummlinige Koordinaten

Wir können die Newtonschen Bewegungsgleichungen in krummlinigen Koordinaten aufstellen, indem wir $\ddot{\vec{r}}$ wie im Abschnitt 1.1 unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit der Basis berechnen.

Hier wenden wir stattdessen die Lagrangegleichungen 2. Art an (ohne Zwangsbedingungen). Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir dabei die krummlinigen Koordinaten.

$\longrightarrow$

→ kartesische Koord.

$$x_n = x_n(\underbrace{q_1, \dots, q_N}_{\text{krummlinige Koord.}}) \quad \text{mit} \quad n = 1, \dots, N$$

$$dx_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x_n}{\partial q_k}\, dq_k$$

$\longrightarrow$ Wegelement:

$$ds^2 = \sum_{n=1}^{N} (dx_n)^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} dq_i dq_k = \sum_{i,k=1}^{N} g_{ik}(q) dq_i dq_k$$

mit $g_{ik}(q) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j}$

Für ein Teilchen ($N=3$) und orthogonale Koordinaten (d.h. mit orthogonalen Basisvektoren, also z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinaten) ist

$$g_{ik}(q) = h_i(q)\, \delta_{ik}$$

Zum Beispiel

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}(q)\, dq_i\, dq_k = \begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 & \text{kartesische Koord.} \\ d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 + dz^2 & \text{Zylinderkoord.} \\ dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 & \text{Kugelkoord.} \end{cases}$$

Kinetische Energie:

$$T(q,\dot{q}) = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2} \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}(q)\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j$$

$$= \frac{m}{2} \begin{cases} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 & \text{kartesische Koord.} \\ \dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 & \text{Zylinderkoord.} \\ \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2 & \text{Kugelkoord.} \end{cases}$$

Zum Beispiel für ein kräftefreies Teilchen im Zylinderkoordinaten folgt dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varrho}} - \frac{\partial L}{\partial \varrho} = m(\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) = 0$$

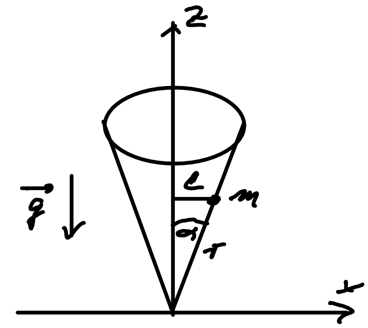
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m \frac{d}{dt} (\varrho^2 \dot{\varphi}) = m\varrho (\varrho \ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi}) = 0$$

Vgl. mit Resultat aus 1.1

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2)\,\hat{e}_\varrho + (\varrho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varrho}\dot{\varphi})\,\hat{e}_\varphi = 0$$

↳ kräftefrei

<u>Massenpunkt auf einem Kreiskegel</u>



Reibungsfrei, im Schwerefeld, Öffnungswinkel α

Zwangsbedingung:

$$g(x,y,z) = x^2+y^2-z^2\tan^2\alpha = 0$$

Verallgemeinerte Koordinaten:

Wir wählen φ und $r = x^2+y^2+z^2$

$\longrightarrow$

$x = x(r,\varphi) = r\sin\alpha\cos\varphi$	$\dot{x} = \dot{r}\sin\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\,\dot{\varphi}\sin\varphi$
$y = y(r,\varphi) = r\sin\alpha\sin\varphi$	$\dot{y} = \dot{r}\sin\alpha\sin\varphi + r\sin\alpha\,\dot{\varphi}\cos\varphi$
$z = z(r,\varphi) = r\cos\alpha$	$\dot{z} = \dot{r}\cos\alpha$

$\longrightarrow$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha)$$

$$U = m g z = m g r\cos\alpha$$

$\longrightarrow$

$$L(r,\dot{r},\dot{\varphi}) = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha) - m g r\cos\alpha$$

$\longrightarrow$ Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - m r\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha - m g\cos\alpha = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\, m r^2\dot{\varphi}\sin\alpha = 0$$

Erhaltungsgrößen:

Wir benutzen, daß φ eine zyklische Koordinate ist und daß

L und x, y, z nicht explizit von t abhängen.
Die mit der zyklischen Koordinate verknüpfte Erhaltungsgröße folgt unmittelbar aus der zweiten Bewegungsgleichung:

$l = m r^2 \dot{\varphi} \sin \alpha \longrightarrow$ z-Komponente des Drehimpuls

Außerdem:

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ & $x_n = x_n(q)$

$\Longrightarrow E = T + U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\alpha) + m g r \cos\alpha = \text{const.}$

Diese Erhaltungsgrößen stellen Integrale der Bewegungsgleichungen dar, können diese also jeweils ersetzen. Für die zum Drehimpuls gehörige Gleichung ist dies unmittelbar ersichtlich. Weiterhin benutzen wir l, um $\dot{\varphi}$ in der erhaltenen Energie zu eliminieren:

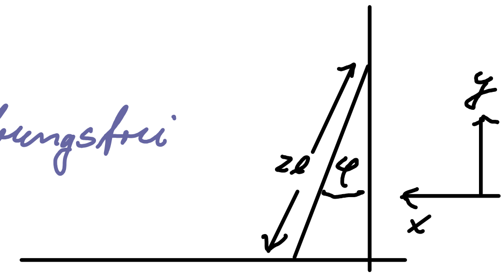
$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad \text{mit} \quad U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2 m r^2 \sin\alpha} + m g r \cos\alpha$$

Diese Gleichung und jene für l sind 1. Ordnung, hängen aber von den Integrationskonstanten l und E ab. Sie sind somit äquivalent zu den zwei ursprünglichen Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung.

Ansonsten gilt ab hier die Diskussion der rein orts-abhängigen Kraft aus 1.3. D.h. die Bahn beschreibt eine Wellenform zwischen den beiden Umkehrradien mit $U_{eff}(r) = E$. Allerdings läßt sich die Differential-gleichung für die Bahnkurve nicht elementar lösen.

Besenstiel

Wie lange braucht der Stiel, um reibungsfrei und aus der Ruhe von $\varphi = \varphi_0$ nach $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu gleiten?



Ort des Schwerpunkts: $\vec{s} = l \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

Lasse von unten nach oben den Parameter $\beta \in [0;1]$ über den Stab laufen. Das Massenelement $dm = m\,d\beta$ befindet sich bei

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l(1-\beta)\sin\varphi \\ 2l\beta\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ potentielle Energie: $U = mg \int_0^1 d\beta\, y = mgl\cos\varphi$

kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}\int_0^1 d\beta\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} 4l^2\dot{\varphi}^2 \int_0^1 d\beta\left[(1-\beta)^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi\right] = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$\longrightarrow$

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi$$

$\longrightarrow$ Bewegungsgleichung: $\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\varphi} = mgl\sin\varphi \Longleftrightarrow \ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\sin\varphi$

$$\Longrightarrow 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 2\dot{\varphi}\frac{3g}{4l}\sin\varphi \xrightarrow{\int dt} \dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{2l}(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

Dabei haben wir die Randbedingung $\dot{\varphi} = 0$ für $\varphi = \varphi_0$ einfließen lassen.

$\longrightarrow$

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{3g}} \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{2}{3}}\, 2{,}00722\ldots = 1{,}63889\ldots\sqrt{\frac{l}{g}}$$

z.B. für $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$

Zerlegung der kinetischen Energie:

$$T = \frac{2}{3} m l^2 \dot\varphi^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{6} m l^2 \dot\varphi^2 = \underbrace{\frac{m}{2} \vec{v}_s^{\,2}}_{\text{Bewegungsenergie Schwerpunkt}} + \underbrace{\frac{1}{2} \Theta_s \dot\varphi^2}_{\text{Rotationsenergie}}$$

mit $\vec{v}_s = l\dot\varphi \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$ Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$\Theta_s = m \int_0^1 d\beta \Big[\underbrace{2l\left(\tfrac{1}{2} - \beta\right)}_{\text{Abstand vom Schwerpunkt}}\Big]^2 = m l^2 \int_0^1 d\beta\, (1-2\beta)^2$$ Trägheitsmoment bezgl. Schwerpunkt

$$= m l^2 \int_0^1 d\beta\, (1 - 4\beta + 4\beta^2) = m l^2 \left(1 - 2 + \frac{4}{3}\right) = \frac{m}{3} l^2$$

Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

In der Herleitung der Lagrangegleichungen 2. Art haben wir oben angenommen, daß die Kräfte von einem Potential kommen und damit geschwindigkeitsunabhängig sind. Jedoch hängt die Kraft auf ein geladenes Punktteilchen von der Geschwindigkeit ab:

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$ Lorentzkraft (SI System)

e: Ladung, $\vec{E}$: elektrisches Feld, $\vec{B}$: Magnetfeld

Wir greifen auf die Elektrodynamik vor, wo gezeigt wird, daß sich die Felder als Ableitungen eines skalaren Potentials $\Phi(\vec{r},t)$ und eines Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r},t)$ schreiben lassen:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

(Damit werden automatisch die homogenen Maxwellgleichungen $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ gelöst.)

Einsetzen in den Ausdruck für die Kraft:

$$[\vec{v}\times\vec{B}]_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, v_j\, B_k = \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{=\varepsilon_{kij}} v_j\, \varepsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} A_m$$

$$= \sum_{j,l,m=1}^{3} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, v_j \frac{\partial}{\partial x_l} A_m = \sum_{j=1}^{3} v_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)$$

$\longrightarrow$

$$F_i = e\left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)\right]$$

Obige Kraft ergibt sich dann aus den Bewegungsgleichungen folgender Lagrangefunktion:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}} = \vec{v}) = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + e\,\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) - e\,\Phi(\vec{r},t)$$

$\longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(m v_i + e A_i) = m\ddot{x}_i + e\,(\vec{\nabla}A_i)\cdot\vec{v} + e\frac{\partial A_i}{\partial t} = e\,\vec{v}\cdot\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} - e\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

$$\longrightarrow m\ddot{x}_i = F_i = e\left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)\right]$$

Eine elegante Begründung der Gestalt obiger Lagrangefunktion findet man in der Speziellen Relativitätstheorie.

2.5 Raum-Zeit-Symmetrien und Erhaltungssätze

Symmetrien bedingen Erhaltungssätze. Wir untersuchen hier Raum-Zeit Symmetrien, während in Quantentheorien sogenannte innere Symmetrien eine große Rolle spielen können.

Wir betrachten dazu ein abgeschlossenes Vielteilchensystem mit der Lagrangefunktion

$$L_0(\underbrace{\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N,\dot{\vec{r}}_1,\dots,\dot{\vec{r}}_N}_{\equiv \vec{r},\dot{\vec{r}}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} U_{ij}(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)$$

Als mögliche Symmetrien betrachten wir nun aktive Transformationen, unter denen L invariant bleibt.

Homogenität der Zeit

Betrachte als Transformation die zeitliche Verschiebung

$$\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i$$

$$t \longrightarrow t^* = t + \varepsilon \implies dt = dt^*$$

$$\longrightarrow$$

$$L^* = L(\vec{r}^{\,*},\dot{\vec{r}}^{\,*},t^*) = L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t+\varepsilon) \implies$$

$$\left.\frac{\partial L^*}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(L - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\dot{\vec{r}}_i\right)$$

$$\uparrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Insbesondere ist die Lagrangefunktion L_0 für ein geschlossenes System nicht explizit zeitabhängig. $\longrightarrow$

$$\left.\frac{dL_0^*}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \longrightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\dot{\vec{r}}_i}_{=2T} - L_0 = T + U = \text{const.}$$

Homogenität des Raumes

Räumliche Verschiebung:

$$\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i + \varepsilon \vec{n} \Longrightarrow d\vec{r}_i^{\,*} = d\vec{r}_i$$

$$t \longrightarrow t^* = t$$

$\longrightarrow$

$$L^* = L(\vec{r}^{\,*}, \dot{\vec{r}}^{\,*}, t^*) = L(\ldots, \vec{r}_i + \varepsilon \vec{n}, \ldots, \dot{\vec{r}}, t) \Longrightarrow$$

$$\left.\frac{\partial L^*}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{n} \underset{\uparrow}{=} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \vec{n} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cdot \vec{n}$$

Lagrange-Gl.

$$= \frac{d}{dt} \vec{n} \cdot \vec{P}$$

mit dem Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}$

Insbesondere hängen die in L_0 für ein geschlossenes System auftretenden Koordinatendifferenzen $\vec{r}_i^{\,*} - \vec{r}_j^{\,*} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ nicht von ε ab. $\longrightarrow$

$$\left.\frac{dL_0^*}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \longrightarrow \vec{P} = \text{const.}$$

Isotropie des Raumes

Infinitesimale Drehung um die Achse $\vec{n}$ und einen Winkel ε

$$\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_i + (\vec{n} \times \vec{r}_i)\,\varepsilon$$

$$t \longrightarrow t^* = t$$

$$\Longrightarrow \dot{\vec{r}}_i \longrightarrow \dot{\vec{r}}_i^{\,*} = \dot{\vec{r}}_i + (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_i)\,\varepsilon$$

$\longrightarrow$

$$L^* = L(\vec{r}^{\,*}, \dot{\vec{r}}^{\,*}, t^*) = L(\ldots, \vec{r}_i + (\vec{n} \times \vec{r}_i)\varepsilon, \ldots, \dot{\vec{r}}_i + (\vec{n} \times \dot{\vec{r}}_i)\varepsilon, \ldots, t)$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{d}{dt}\vec{p}_i \quad \text{(wg. Lagrange 2.)}$$

$\Longrightarrow$

$$\left.\frac{dL^*}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\cdot(\vec{n}\times\vec{r}_i) + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot(\vec{n}\times\dot{\vec{r}}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial \vec{p}_i}{\partial t}\cdot(\vec{n}\times\vec{r}_i) + \vec{p}_i\cdot\frac{d}{dt}(\vec{n}\times\vec{r}_i)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)} = \frac{d}{dt}\vec{n}\cdot\vec{L}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = \varepsilon_{rst}\, n_r\, r_s\, p_t = \varepsilon_{trs}\, p_t\, n_r\, r_s$$

Die Lagrangefunktion des geschlossenen Systems L_0 hängt nur von $|\vec{r}_i-\vec{r}_j|$ und $\dot{\vec{r}}^{\,2}$ ab, für welche gilt:

$$\dot{\vec{r}}_i^{*2} = \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
$$(\vec{r}_i^{\,*}-\vec{r}_j^{\,*})^2 = (\vec{r}_i-\vec{r}_j) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Die Korrekturterme treten dabei wegen der Linearisierung auf. Werden die Rotationen exakt behandelt, dann bleiben auch die Geschwindigkeiten und Abstände exakt invariant.

$\Longrightarrow$

$$\left.\frac{dL_0^*}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \longrightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

Zusammenfassung:

Homogenität der Zeit	$\Longrightarrow$	Energieerhaltung
Homogenität des Raumes	$\Longrightarrow$	Impulserhaltung
Isotropie des Raumes	$\Longrightarrow$	Drehimpulserhaltung

Diese Betrachtungen lassen sich noch allgemeiner mit dem auf Variationsprinzipien fußenden Noethertheorem anstellen.