

1. Newtonsche Mechanik

Übersicht

- * Raum & Zeit in Newtonscher Mechanik
- * Newtonsche Gesetze
- * Elementare unidimensionale Probleme
- * Erhaltungssätze und Vielteilchensysteme
- * Inertialsysteme & Beschleunigte Bezugssysteme
- * Zweikörperproblem: Planetenbewegung und Streuprozesse

1.1 Raum, Zeit & Bahnkurven von Massenpunkten

Variablen, welche Größen das physikalische System charakterisieren.

Ort:

Nicht-relativistische Physik: kann beobachterunabhängig Abstandsvektor $\in \mathbb{R}^3$ zwischen zwei Punkten bestimmen
($\longrightarrow$ Euklidischer affiner Raum $\mathbb{R}^3$)

Ein bestimmter Bezugspunkt, dem der Nullvektor zugeordnet wird, bringt uns zum Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

Zeit:

Absolute Zeit: Alle Uhren gehen gleich schnell, unabhängig vom Bewegungszustand (nicht-relativistisch!)

Mit dem Bezugspunkt und der Zeitmessung erhalten wir ein Bezugssystem (BS), in dem wir die Zeitentwicklung ortsabhängiger Größen beschreiben.

$\longrightarrow$ Koordinatensystem

Zeitkoordinate t

Ortsvektor $\vec{r} = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y + z \hat{e}_z \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

existiert unabhängig von der Wahl der Koordinaten $\longrightarrow$

"Koordinatenfreie" Gleichungen

x, y, z : kartesische Koordinaten

$\hat{e}_{x,y,z}$: Basisvektoren

Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \underbrace{x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z}_{\text{z.B. in kartesischen Koordinaten}}$$

$$= \underbrace{r(t) \vec{e}_r(\vec{r}(t)) + \varrho(t) \vec{e}_\varrho(\vec{r}(t)) + \varphi(t) \vec{e}_\varphi(\vec{r}(t))}_{\text{z.B. in Kugelkoordinaten (ortsabhängige Basis } \mathcal{B}_r)}$$

Wir interessieren uns zunächst für Bahnkurven von Punktmassen (charakterisiert allein durch deren Masse m), behandeln aber auch die Gültigkeit und Korrekturen zu dieser Idealisierung.

Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$

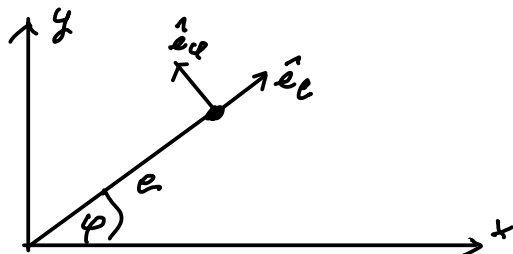
Beschleunigung $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Beispiel: Bahnen im Kartesischen und im Polarkoordinaten
in der Ebene $z=0$:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(e, \varphi) = e \cos \varphi \\ y &= y(e, \varphi) = e \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{kartesische Koordinaten}$$

Basisvektoren im Polarkoordinaten sind ortsabhängig & gehen aus Drehung der kartesischen Basis hervor:

$$\begin{aligned} \vec{e}_e &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \end{aligned}$$



Die Bahnkurve sei nun mit $e(t)$, $\varphi(t)$ gegeben.

→

$$\vec{r}(t) = \rho(t) \hat{e}_\rho(\varphi(t)) = x \hat{e}_x + y \hat{e}_y$$

Mit

$$\dot{\hat{e}}_\rho = -\sin\varphi \dot{\varphi} \hat{e}_x + \cos\varphi \dot{\varphi} \hat{e}_y = \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$\dot{\hat{e}}_\varphi = -\cos\varphi \dot{\varphi} \hat{e}_x - \sin\varphi \dot{\varphi} \hat{e}_y = -\dot{\varphi} \hat{e}_\rho$$

erhalten wir die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi = \dot{x} \hat{e}_x + \dot{y} \hat{e}_y$$

Alternativ hätten wir uns dies auch übers infinitesimale Wegelament überlegen können:

$$d\vec{r} = d\rho \hat{e}_\rho + \rho d\varphi \hat{e}_\varphi$$

Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) &= \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{\rho} \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \hat{e}_\varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \hat{e}_\rho \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{e}_\varphi = \ddot{x} \hat{e}_x + \ddot{y} \hat{e}_y \end{aligned}$$

1.2 Die Newtonschen Gesetze (1687)

Wir geben die Newtonschen Gesetze im Wortlaut sowie anhand der oben formulierten Begriffe an.

I. Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geraden Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

In anderen Worten: Es gibt BS, in denen die kräftefreie Bewegung gegeben ist durch

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \text{const.}$$

Solche BS heißen Inertialsysteme IS.

II. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

In anderen Worten: In einem IS gilt

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \hookrightarrow \text{Kraft}}$$

wobei

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

der Impuls ist. $\longrightarrow m \vec{a} = \vec{F}$

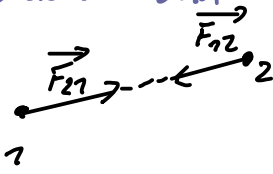
Dies definiert die träge Masse als Maß des Widerstands, welchen ein Körper einer Geschwindigkeitsänderung entgegensetzt.

Haben wir eine Referenzmasse m_1 (z.B. $m_1 = 1 \text{ kg}$) und eine bestimmte Kraft, so können wir das Verhältnis zu einer unbekannten Masse m_2 mit $m_{1,2} \vec{a}_{1,2} = \vec{F} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|}$ bestimmen.

In allen physikalisch relevanten Fällen hat die Kraft (höchstens) die Abhängigkeiten $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ (Kraftfeld)

Maßeinheit der Kraft im SI System: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

III. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich; oder: die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.



In anderen Worten: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Wir merken an, daß offenbar gemeint ist, daß die Kräfte entlang der Verbindungslinie wirken, d.h.

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0$$

Schließlich fügen wir als Zusatz noch das

Superpositionsprinzip an:

Wirken mehrere Kräfte auf einen Massenpunkt, so ist die Gesamtkraft die Summe der Einzelkräfte:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

1.3 Eindimensionale Probleme

Das 2. Newtonsche Gesetz

$$m \ddot{x} = F$$

wird in einer Dimension zu

$$m \ddot{x} = F(x(t), \dot{x}(t), t)$$

wobei wir die möglichen Abhängigkeiten der Kraft F angeben.

→ Differentialgleichung 2. Ordnung → 2 Integrationskonstanten
bzw. Randbedingungen

Rein ortsabhängige Kraft

$$m \ddot{x}(t) = F(x(t))$$

$$\longrightarrow m \ddot{x} \dot{x} = \dot{x} F(x) \iff \frac{d}{dt} \frac{m}{2} \dot{x}^2 = - \frac{d}{dt} U(x)$$

mit dem Potential $U(x) = - \int_{x_0}^x d\xi F(\xi) + \text{const.} \equiv - \int_{x_0}^x d\xi F(\xi)$

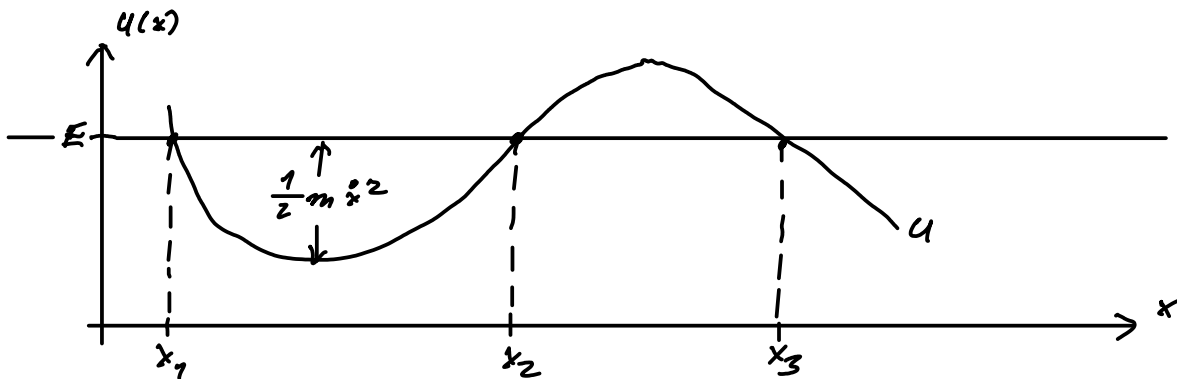
$$\longrightarrow \frac{m}{2} \dot{x}^2(t) = E - U(x)$$

↳ kinetische plus potentielle
Energie als Integrationskonstante

$$\longrightarrow dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2 \frac{m}{2} \frac{E - U(x)}{m}}} = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

Trennung der
Variablen

$$\longrightarrow t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x d\xi \frac{1}{\sqrt{E - U(\xi)}}$$



Offenbar sind in diesem Diagramm x_1 und x_2 Umkehrpunkte, zwischen denen sich der Massenpunkt mit Periode T hin und her bewegt,

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\sqrt{E - U(\xi)}}$$

Für einen harmonischen Oszillator ist $F = -Dx$

↳ Federkonstante

$$\longrightarrow U(x) = \frac{1}{2} Dx^2$$

$$\begin{aligned}
 t - t_0 &= \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x d\xi \frac{1}{\sqrt{E - \frac{1}{2} D \xi^2}} \\
 \xi &= \sqrt{\frac{2E}{D}} \zeta \\
 &\downarrow \\
 &= \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{2E}{D}} \int_{\sqrt{\frac{D}{2E}} x_0}^{\sqrt{\frac{D}{2E}} x} d\xi \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\
 &= \pm \sqrt{\frac{m}{D}} \left(\arcsin \sqrt{\frac{D}{2E}} x - \arcsin \sqrt{\frac{D}{2E}} x_0 \right)
 \end{aligned}$$

Wir absorbieren den Arkussinus von x_0 in eine Redefinition von t_0 und erhalten

$$x(t) = \pm \sqrt{\frac{2E}{D}} \sin \left(\sqrt{\frac{D}{m}} (t - t_0) \right)$$

Aufgrund der Periodizität können wir auch das Vorzeichen in t_0 absorbieren.

Um die Formel für die Umkehrpunkte anzuwenden, bestimmen wir diese mit

$$U(x_{1/2}) = \frac{1}{2} D x_{1/2}^2 = E \rightarrow x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{2E}{D}} \text{ wobei wir die Vorzeichen willkürlich festgelegt haben}$$

→

$$\begin{aligned}
 T &= \sqrt{2m} \frac{1}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{2E}{D}} \int_{-1}^{+1} d\xi \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\
 &= 2 \sqrt{\frac{m}{D}} \arcsin \xi \Big|_{-1}^{+1} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{2\pi}{\omega_0}
 \end{aligned}$$

→

Die Kreisfrequenz ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

→

Bewegungsgleichung: $m \ddot{x} = -Dx = -m \omega_0^2 x$

Dämpfung und erzwungene Schwingung

$$m \ddot{x} = -m \omega_0^2 x - \underbrace{2m\gamma \dot{x}}_{\text{Reibungskern}}$$

Eine lineare, homogene Differentialgleichung lässt sich stets mit einem Exponentialansatz lösen, welcher das Problem auf die Lösung eines Polynoms reduziert. $\rightarrow$

$$\text{Mit } x(t) = e^{\lambda t} \longrightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$v(t) = a_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

(Wir hätten so natürlich auch auf einfache Weise das Problem des harmonischen Oszillators behandeln können.)

$a_{1,2}$ können durch Randbedingungen, z.B. $x(t_0)$ und $v(t_0)$ bestimmt und festgelegt werden.

$\rightarrow$ Drei parametrische Regime

1. Starke Dämpfung ($\gamma > \omega_0$)

$$\rightarrow \lambda_{1,2} < 0 \text{ und } \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = a_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + a_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

$\rightarrow$ Exponentieller Zerfall mit höchstens einem Nulldurchgang

2. Schwache Dämpfung ($\gamma < \omega_0$)

$$\lambda_{1,2} \text{ sind komplex: } \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \lambda_1 = \lambda_2^*$$

$\rightarrow$ Für reelle Bahnkurve, brauche $a_{1,2} = a_R \pm i a_I$ mit $a_{R,I} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-\gamma t} \left(a_R e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + a_I e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + i a_I e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} - i a_R e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right) \quad \left| \varphi = \arg(a_R + i a_I) \right. \\
 &= e^{-\gamma t} \underbrace{\sqrt{a_R^2 + a_I^2}}_{=: \frac{A}{2}} \left(e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + i\varphi} + e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t - i\varphi} \right) \\
 &= A e^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \varphi)
 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Verringerte Kreisfrequenz $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 - \frac{\gamma^2}{\omega_0} + \dots$
 Exponentielle Dämpfung $\propto e^{-\gamma t}$

3. Aperiodischer Grenzfall ($\gamma = \omega_0$)

$\lambda = -\gamma$ ist doppelte Nullstelle

$\longrightarrow$ Weitere Lösung ist $x(t) \propto t e^{-\gamma t}$:

$$\dot{x} \propto e^{-\gamma t} - \gamma t e^{-\gamma t}$$

$$\ddot{x} \propto -\gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 t e^{-\gamma t} - \gamma e^{-\gamma t} = (\gamma^2 t - 2\gamma) e^{-\gamma t}$$

$$\ddot{x} + \gamma^2 x + 2\gamma \dot{x} \propto (\gamma^2 t - 2\gamma + \gamma^2 t + 2\gamma - 2\gamma^2 t) e^{-\gamma t} = 0$$

(Allgemein läßt sich zeigen, daß bei n -fachen Nullstellen $e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$, ..., $t^{n-1} e^{\lambda t}$ linear unabhängige Lösungen sind.)

$\longrightarrow$ allgemeine Lösung $x(t) = e^{-\gamma t} (a_1 + a_2 t)$

Wir fügen nun eine externe Kraft

$$F(t) = m f \sin \omega t$$

hinzu (erzwungene Schwingung) $\longrightarrow$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f \sin \omega t$$

Die allgemeine Lösung setzt sich aus der bereits gewonnenen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung zusammen, für welche wir ansetzen

$$x(t) = B \sin(\omega t - \varphi)$$

Weiterhin ist es einfacher, die komplexe Gleichung

$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = f e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad z(t) = G e^{i\omega t}$$

zu lösen. $\longrightarrow$

$$G(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) = f$$

$\longrightarrow$

$$x(t) = \operatorname{Im}[G e^{i\omega t}] = B \sin(\omega t - \varphi) = \operatorname{Im}[B e^{i(\omega t - \varphi)}]$$

$$\Leftrightarrow G = B e^{-i\varphi} \Rightarrow$$

$$B = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$\Rightarrow$

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + B \sin(\omega t - \varphi)$$

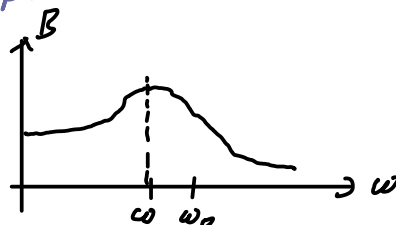
$\hookrightarrow$ exponentiell
abklingend

Maximum der Resonanzkurve

$$\frac{dB}{d\omega} = -[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]^{-\frac{3}{2}} 2f\omega(2\gamma^2 + \omega^2 - \omega_0^2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\longrightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0 \quad (\text{sofern die Diskriminante positiv ist})$$

$$B|_{\omega=\omega_{\max}} = \frac{f}{2\gamma} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$



1.4 Erhaltungssätze

Wir leiten diese hier aus dem 2. Newtonschen Gesetz her.

Impulserhaltung

Für eine kräftefreie Bewegung ist

$$0 = \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \implies \vec{p} = \text{const.}$$

Drehimpulserhaltung

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \implies m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} =: \vec{M}$$

↳ Drehmoment

Definiere den Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \dot{\vec{r}}$$

→

$$\dot{\vec{L}} = m \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m \ddot{\vec{r}} = \vec{M} \longrightarrow \boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}}$$

Verschwindet das Drehmoment, dann ist der Drehimpuls also erhalten.

Beachte: $\vec{L}$ und $\vec{M}$ beziehen sich auf den Ursprung des IS und ändern sich bei dessen Verschiebung.

Die Drehimpulserhaltung ist von wesentlicher Bedeutung für den Fall einer Zentralkraft, welche zum Zentrum des IS wirkt.

$$\text{Mit } \vec{F} \parallel \vec{r} \implies \vec{M} = 0 \implies \vec{L} = \text{const.}$$

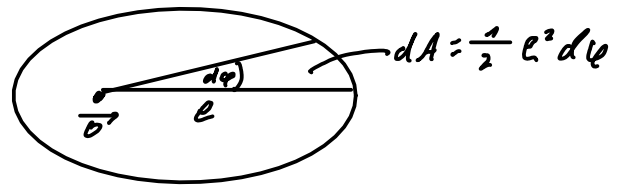
Wir können dann ein IS wählen, dessen z-Achse in Richtung von $\vec{L}$ liegt, so daß

$$\vec{L} = L \hat{e}_z = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$\implies \vec{r} \text{ \& } \dot{\vec{r}} \text{ liegen in der } x\text{-}y\text{-Ebene}$$

Mit $\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho$

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \Rightarrow$$



$$\frac{d}{dt} = \rho^2 \dot{\varphi} = 2 \frac{dA}{dt} = \text{const.} \quad \underline{\text{Flächensatz}}$$

Die vom Fadenstrahl pro Zeitintervall überstrichene Fläche ist konstant.

Energieerhaltung

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ist die Arbeit, welche die Kraft $\vec{F}$ bei Bewegung des Teilchens um den Weg $d\vec{r}$ leistet.

Längs eines Weges $\mathcal{C}$ von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ ist

$$W = \int_{\mathcal{C}} dW = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F} \quad (\text{Einheit: } 1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2})$$

Im allgemeinen hängt W von r_1, r_2 und auch von $\mathcal{C}$ ab.

Leistung ist Arbeit pro Zeit

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (\text{Einheit: } 1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}})$$

Kinetische und potentielle Energie

$$m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = P$$

Diese zu- oder abgeführte Energie ändert also die Geschwindigkeit des Teilchens. Wir identifizieren damit

$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \quad \text{kinetische Energie}$

Zerlegung der Kraft

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}}$$

$\downarrow$ konservativ $\hookrightarrow$ dissipativ

Wir nehmen nun an, daß $\vec{F}_{\text{kons}} \equiv \vec{F}_{\text{kons}}(\vec{r})$ (rein ortsabhängig).
Dann ist $\vec{F}_{\text{kons}}$ definiert als jene Anteile, welche sich folgendermaßen ausdrücken lassen:

$$\vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} = - \frac{dU(\vec{r}(t))}{dt}$$

$\vec{F}_{\text{kons}}$ besitzt damit ein Potential $U(\vec{r})$

Beispiel: Freier Fall mit Reibung

$$m \ddot{x} = -mg - \gamma \dot{x}$$

$\longrightarrow$

$$F_{\text{kons}} = -mg$$

$$F_{\text{kons}} \dot{x} = - \frac{dU(x)}{dt} = - \frac{\partial U(x)}{\partial x} \dot{x}$$

wird gelöst für $U(x) = mgx$

$$F_{\text{diss}} = -\gamma \dot{x}$$

$$F_{\text{diss}} \dot{x} = -\gamma \dot{x}^2 = - \frac{\partial U(x)}{\partial x} \dot{x}$$

läßt sich für eine allgemeine Bahnkurve nicht lösen, da $\dot{x}$ auf beiden Seiten in unterschiedlichen Potenzen auftritt.

Setzen wir obige Zerlegung der Kräfte ein in

$$\frac{d}{dt} \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = - \frac{dU(\vec{r})}{dt} + \vec{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r}) \right) = \vec{F}_{\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Für rein konservative Kräfte folgt der Energieerhaltungssatz

$$\frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r}) = E = \text{const.}$$

Die Energieerhaltung gilt natürlich in noch weitreichenderer Weise, da die dissipativen Kräfte kinetische und potentielle Energie in andere Energieformen, z.B. Wärme umsetzen.

Wir betrachten die Eigenschaften des Potentials näher.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} &= - \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) = - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} U \end{aligned}$$

Wir können daher schreiben

$$\vec{F}_{\text{kons}} = - \vec{\nabla} U(\vec{r}) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

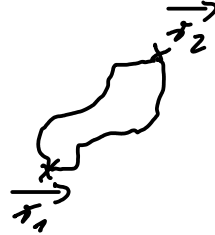
Der zweite Term ist geschwindigkeitsabhängig, entspricht daher nicht der oben getroffenen Annahme die zu der üblichen Definition des konservativen Kraftfelds führt. Wir geben diesen hier dennoch an, weil wir so im Vorbeigehen sehen, daß die Lorentzkraft des Elektromagnetismus auch die Energie (und genauer: die kinetische Energie) erhält.

Wir lassen im Folgenden das Subskript „kons“ fallen.

Wegunabhängigkeit der Arbeit im konservativen Kraftfeld:

Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ist genau dann konservativ, wenn das Wegintegral

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$



nur von $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ abhängt.

Beweis von konservativ $\Rightarrow$ wegunabhängig

Dazu parametrisieren wir den Weg als $\vec{r}(t)$ und schreiben den Integranden als totale Ableitung

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{r}(t)) \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) \\ &= U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \end{aligned}$$

wegunabhängig $\Rightarrow$ konservativ

$$U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = -W = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')$$

ist wegunabhängig und es folgt

$$\vec{\nabla} U(\vec{r}) = -\vec{F}(\vec{r})$$

Weiter bemerken wir:

Da $\vec{F}(\vec{r})$ ein Gradientenfeld ist, ist es wirbelfrei sofern es in einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) \iff \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 \text{ im einfach zusammenhängenden Gebiet}$$

Die Richtung $\implies$ folgt unmittelbar mit $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U(\vec{r}) \equiv 0$.

Für $\impliedby$ bemerken wir, daß $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \implies$

$$0 = \int_A d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} = \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \text{ nach dem Satz von Stokes}$$

für beliebige einfach zusammenhängende Gebiete (Flächen) A .

Diese Aussage für das Verschwinden des Integrals auf beliebigen geschlossenen Wegen ist äquivalent zur Wegunabhängigkeit. Letztere impliziert, wie bereits bewiesen, daß $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$.

1.5 Systeme von Massenpunkten

Verallgemeinere die Erhaltungssätze auf Systeme von N Massenpunkten, die jeweils dem 2. Newtonschen Gesetz gehorchen

$$m_v \ddot{\vec{r}}_v = \vec{F}_v = \vec{F}_v^{(a)} + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^N \vec{F}_{v,\mu}$$

←
äußere Kräfte, z. B.
von externem Feld

←
innere Kräfte zwischen Massenpunkten,
z. B. Coulomb-Wechselwirkung zwischen
geladenen Teilchen

Impuls

Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{v=1}^N m_v \vec{r}_v \quad \text{mit} \quad M = \sum_{v=1}^N m_v$

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^N m_v \ddot{\vec{r}}_v &= M \ddot{\vec{R}} = \sum_{v=1}^N \underbrace{\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^N \vec{F}_{v\mu}}_{\substack{\equiv 0, \text{ da } \vec{F}_{\mu v} = -\vec{F}_{v\mu} \\ \text{(3. Gesetz)}}} + \sum_{v=1}^N \vec{F}_v^{(a)} = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v^{(a)} \end{aligned}$$

Damit folgt unmittelbar der Schwerpunktsatz:

Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob die Masse in ihm vereinigt ist und als ob die Summe $\vec{F}$ der äußeren Kräfte auf diesen wirkt:

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v^{(a)} = \vec{F}$$

Dies rechtfertigt in weitgehender Weise die Idealisierung realer Körper als Punktmassen.

Drehimpuls

$$\sum_{v=1}^N \vec{r}_v \times m_v \ddot{\vec{r}}_v = \sum_{v=1}^N \vec{r}_v \times \vec{F}_v \implies$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{v=1}^N m_v (\vec{r}_v \times \dot{\vec{r}}_v) = \sum_{v=1}^N \vec{r}_v \times \vec{F}_v^{(a)} + \sum_{v=1}^N \vec{r}_v \times \sum_{\substack{\mu \\ \mu \neq v}}^N \vec{F}_{v\mu}$$

Auf der linken Seite tritt der Gesamtdrehimpuls auf:

$$\vec{L} = \sum_{v=1}^N m_v (\vec{r}_v \times \dot{\vec{r}}_v) = \sum_{v=1}^N \vec{L}_v$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite gilt

$$\sum_{\substack{v,\mu \\ \mu \neq v}}^N \vec{r}_v \times \vec{F}_{v\mu} = \sum_{\substack{v,\mu \\ \mu \neq v}}^N \vec{r}_\mu \times \vec{F}_{\mu v} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{3. Gesetz}}}{=} - \sum_{\substack{v,\mu \\ \mu \neq v}}^N \vec{r}_\mu \times \vec{F}_{v\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{v,\mu \\ v \neq \mu}}^N (\vec{r}_v - \vec{r}_\mu) \times \vec{F}_{v\mu} = 0$$

weil $\vec{r}_\mu - \vec{r}_\nu \parallel \vec{F}_{\mu\nu}$ ist.

Insgesamt ist

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu^{(a)} = \vec{M}$$

Für ein abgeschlossenes System ($\vec{F}_\nu^{(a)} = 0$) ist $\vec{L}$ erhalten.

Energie

$$\sum_{\nu=1}^N m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu$$

Linke Seite ist $\frac{d}{dt} T$ mit der kinetischen Energie

$$T = \sum_{\nu=1}^N \frac{m_\nu}{2} \dot{\vec{r}}_\nu^2$$

Kräfte:

$$\vec{F}_\nu = \vec{F}_{\text{kons } \nu} + \vec{F}_{\text{diss } \nu}$$

wobei wir annehmen $\vec{F}_{\text{kons } \nu} = \vec{F}_{\text{kons } \nu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ und daß

$$\sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\text{kons } \nu} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu = - \frac{dU(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{dt} = - \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\nu} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu$$

$$\text{mit } \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\nu} = \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \hat{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} \hat{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \hat{e}_z$$

Damit dies für beliebige Bahnen $\vec{r}_\nu(t)$ gilt, muß

$$\vec{F}_{\text{kons } \nu} = - \frac{\partial U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_\nu} \quad \text{sein.}$$

$\implies$

$$\frac{d}{dt} (T + U) = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\text{diss } \nu} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu$$

In Abwesenheit dissipativer Kräfte ist $T + U = E = \text{const.}$

Wir lassen jetzt das Subskript „kons“ fallen, $\vec{F}_v = \vec{F}_{\text{kons } v}$, und

$$\vec{F}_v = \vec{F}_v^{(a)}(\vec{r}_v) + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^N \vec{F}_{v\mu}(\vec{r}_v, \vec{r}_\mu) = - \frac{\partial U^{(a)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_v} - \frac{\partial U^{(i)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_v}$$

Für die äußeren Kräfte können wir schreiben

$$U^{(a)} = \sum_{v=1}^N U_v(\vec{r}_v) \rightarrow F_v^{(a)}(\vec{r}_v) = - \frac{\partial U^{(a)}}{\partial \vec{r}_v} = - \frac{\partial U_v}{\partial \vec{r}_v}$$

Wir können die Potentiale $U_v^{(a)}$ also wie oben bestimmen.

Für die inneren Kräfte setzen wir an

$$U^{(i)} = \sum_{v=2}^N \sum_{\mu=1}^{v-1} U_{v\mu}(\vec{r}_v, \vec{r}_\mu)$$

Wegen des 3. Gesetzes $\vec{F}_{v\mu}(\vec{r}_v, \vec{r}_\mu) = -\vec{F}_{\mu v}(\vec{r}_\mu, \vec{r}_v) \Rightarrow$

$$- \frac{\partial U_{v\mu}(\vec{r}_v, \vec{r}_\mu)}{\partial \vec{r}_v} = \frac{\partial U_{v\mu}(\vec{r}_v, \vec{r}_\mu)}{\partial \vec{r}_\mu} \rightarrow U_{v\mu} \text{ hängt nur von } \vec{r}_\mu - \vec{r}_v \text{ ab}$$

Da der Raum isotrop ist, können wir weiter vereinfachen zu

$$U_{v\mu} = U_{v\mu}(|\vec{r}_v - \vec{r}_\mu|)$$

Für ein bestimmtes Indexpaar schreiben wir nun $\vec{r} = \vec{r}_v - \vec{r}_\mu$.

→

$$\vec{F}_{v\mu}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U_{v\mu}(|\vec{r}|) = -\vec{\nabla} U_{v\mu}(r) = F_{v\mu}(r) \hat{e}_r$$

In dieser Notation ist dann

$$F_{v\mu}(r) = - \frac{dU_{v\mu}(r)}{dr}$$

und $U_{v\mu}$ kann durch Integration bestimmt werden.

→ Insgesamt:

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{v=1}^N U_v(\vec{r}_v) + \sum_{v=2}^N \sum_{\mu=1}^{v-1} U_{v\mu}(|\vec{r}_v - \vec{r}_\mu|)$$

Beispiel Gravitationswechselwirkung im homogenen Schwerfeld

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{v=1}^N m_v g z_v - G \sum_{v=2}^N \sum_{\mu=1}^{v-1} \frac{m_v m_\mu}{|\vec{r}_v - \vec{r}_\mu|}$$

Virialsatz

Zwischen den Massenpunkten findet eine Umwandlung von potentieller in kinetische Energie statt und umgekehrt. Wir wollen bestimmen, wie sich diese Beiträge im zeitlichen Mittel aufteilen.

$$\sum_{v=1}^N m_v \ddot{\vec{r}}_v \cdot \vec{r}_v = \sum_{v=1}^N \vec{F}_v \cdot \vec{r}_v \longrightarrow$$
$$\sum_{v=1}^N \frac{d}{dt} (m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \vec{r}_v) = \sum_{v=1}^N m_v \dot{\vec{r}}_v^2 = - \sum_{v=1}^N \vec{r}_v \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_v}$$

Dabei sollen die $\vec{F}_v$ konservative Kräfte sein.

Definitionen des zeitlichen Mittelwerts von $f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

$$\overline{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} dt f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

→

$$\sum_{v=1}^N \frac{d}{dt} (m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \vec{r}_v) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \sum_{v=1}^N m_v \dot{\vec{r}}_v \cdot \vec{r}_v \Big|_{t=-\tau}^{t=\tau}$$

Bleibt $\dot{\vec{r}}_v$ endlich und $\vec{r}_v$ auf einem endlichen Raumbereich beschränkt, so verschwindet dieser Grenzwert. Es folgt der

Virialsatz

$$\overline{T} = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N \vec{r}_v \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_v}$$

Ist das Potential eine homogene Funktion vom Grad n , d.h.

$$U(\alpha \vec{r}_1, \dots, \alpha \vec{r}_N) = \alpha^n U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \longrightarrow$$

Ableitung $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ an der Stelle $\alpha=1$ ergibt die Eulersche Homogenitätsrelation

$$\sum_{v=1}^N \vec{r}_v \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_v}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = n U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\Rightarrow \overline{\sum_{v=1}^N \vec{r}_v \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_v}} = n \overline{U} \Rightarrow \boxed{\overline{T} = \frac{n}{2} \overline{U}}$$

(und es gilt $\overline{T} + \overline{U} = E$)

Beispiele

Harmonischer Oszillator: $n=2 \Rightarrow \overline{T} = \overline{U} = \frac{E}{2}$

Gravitationspotential / elektrostatisches Potential: $n=-1$

$$2\overline{T} = -\overline{U}, \quad E = \overline{T} - 2\overline{T} = -\overline{T} \Rightarrow E < 0, \quad \overline{U} = 2E < 0$$

1.6 Inertialsysteme und Galilitransformationen

Galileisches Relativitätsprinzip: Alle IS sind gleichwertig.

Der Zusammenhang zwischen verschiedenen IS ist durch die Transformation der Koordinaten gegeben, welche wir Galileitransformation nennen.

Wir definieren dazu in einem IS ein Ereignis die Zusammenstellung von Orts- und Zeitkoordinaten: (x_1, x_2, x_3, t)
In IS' bezeichne (x'_1, x'_2, x'_3, t') das gleiche Ereignis.

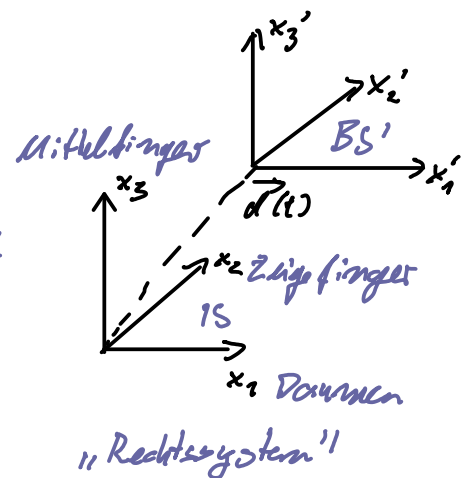
$$(x_1, x_2, x_3, t) \xrightarrow{\text{Galileitransformation}} (x'_1, x'_2, x'_3, t')$$

Das 1. Newtonsche Gesetz soll in IS und IS' gelten. Es nimmt nur Bezug auf die Geschwindigkeit, welche sich bei einer Zeittranslation

$$t' = t - t_0$$

nicht ändert.

Betrachte als nächstes eine Verschiebung des Koordinatenursprungs von BS' gegenüber IS um $\vec{d}(t)$.



Wir verwenden in beiden BS

die gleichen Basisvektoren, so daß

der gleiche physikalische Ort eines Massenpunkts mit

$$\sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{e}_i \quad \text{beschrieben wird.}$$

$$\longrightarrow x_i(t) = x'_i(t) + d_i(t)$$

In IS soll das 1. Newtonsche Gesetz gelten, also

$$\ddot{x}_i = \text{const.} = \ddot{x}'_i + \ddot{d}_i$$

für eine kraftfreie Bewegung.

BS' ist genau dann ein IS, wenn $\ddot{x}'_i = \text{const.}$

$$\Rightarrow d_i(t) = v_i t + a_i$$

konstante
Geschwindigkeit

konstante
Verschiebung

Es folgt damit auch in $\ddot{x}_i = 0 \Leftrightarrow \text{in } \ddot{x}'_i = 0$. Die freie Bewegungsgleichung ist damit forminvariant oder kovariant. Damit wird genauer klar, was wir mit Gleichwertigkeit aller IS meinen. Wir werden im Folgenden noch die Kraft mit einbinden.

Schließlich untersuchen wir noch eine Drehung

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j$$

Dabei ist R eine orthogonale Matrix, d.h. $RR^T = \mathbb{1}$.

Für zeitunabhängige R gilt $\ddot{x}_i = \text{const.} \Leftrightarrow \ddot{x}'_i = \text{const.}$

→ Zeitunabhängige Rotationen vermitteln zwischen IS.

Zusammengefaßt besteht eine allgemeine Galileitransformation aus folgenden Operationen:

1. Räumliche Verschiebung um $v_i t$ („Boost“), 3 Parameter
2. Raumtranslation um a_i , 3 Parameter
3. Drehung um R , 3 Parameter
4. Zeittranslation um t_0 , 1 Parameter

Insgesamt: 10 Parameter

Allgemeine Galileitransformation

$$x_i' = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j - v_i t - a_i$$

$$t' = t - t_0$$

Galiligruppe

- Verknüpfung von $IS \rightarrow IS'$ mit $IS' \rightarrow IS''$ zu $IS \rightarrow IS''$ führt zu einer weiteren Galileitransformation
- $IS' \rightarrow IS$ ist invers zu $IS \rightarrow IS'$

$\Rightarrow$ Die Galileitransformationen bilden eine Gruppe.

Transformation von Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\dot{x}_i' = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \dot{x}_j - v_i$$

$$\ddot{x}_i' = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \ddot{x}_j$$

Kovarianz des 2. Newtonschen Gesetzes

In IS gilt:

$$m \ddot{x}_i(t) = F_i(\{x_k\}, \{\dot{x}_k\}, t) \Rightarrow m \sum_{j=1}^3 R_{ij} \ddot{x}_j(t) = \sum_{j=1}^3 R_{ij} F_j(\{x_k\}, \{\dot{x}_k\}, t)$$

Werten wir letzteres bei den Koordinaten $(\{x_k'\}, t')$ aus, dann erhalten wir

$$m \ddot{x}_i' = \sum_{j=1}^3 R_{ij} F_j(\{x_k\}, \{\dot{x}_k\}, t) =: F_i'(\{x_k\}, \{\dot{x}_k\}, t)$$

Die Kraft transformiert also genau wie ein Vektor. Damit

sind beide Seiten der Gleichung Komponenten von Vektoren (im Tangentialraum), und das 2. Newtonsche Gesetz forminvariant. D.h. die Form in $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ ist gleich, die konkreten Werte der Vektorkomponenten jedoch unterschiedlich.

Bemerkungen

Wir haben hier dieselbe physikalische Bahnkurve in unterschiedlichen Koordinaten beschrieben, d.h. eine passive Transformation vollzogen. [Dabei lebt der Ortsvektor $\vec{r}$ im Koordinatenraum, $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$ und $\vec{F}$ im sogenannten Tangentialraum. (Dieser ist offenbar isomorph zu $\mathbb{R}^3$. Erst in der allgemeinen Relativitätstheorie ist der Koordinatenraum nicht mehr kanonisch isomorph zum Tangentialraum, so daß eine eingehendere Unterscheidung notwendig ist.)]

In diesem Sinne kann man das 2. Newtonsche Gesetz

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

als eine koordinatenfreie Aussage auffassen und die Transformation auf die Koordinaten bzw. Koeffizienten der Basisvektoren (also die Komponenten) beziehen.

Bei einer aktiven Transformation wird dagegen das Koordinatensystem festgehalten und die Massenpunkte und (ggf.) auch die Kräfte verschoben, so daß gilt

$$m \ddot{\vec{r}}' = m (R \ddot{\vec{r}}) = \vec{F}' = R \vec{F}$$

Verwenden wir hier überall die gleichen Basisvektoren und

bezeichnen die Koeffizienten der angestrichenen oder gestrichenen Vektoren erhalten wir umgekehrt wieder die Gleichungen auf Komponentenebene.

Man sieht jedoch auch für passive Transformationen Schreibweisen wie (die wird im Folgenden auch verwendet werden)

$$x_i' = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j - v_i t - a_i \longrightarrow \vec{x}' = R \vec{x} - \vec{v} t - \vec{a}$$

$$F_i' = \sum_{j=1}^3 R_{ij} F_j \longrightarrow \vec{F}' = R \vec{F}$$

Da es für ein gegebenes physikalisches System nur ein Kraftfeld und eine Bahnkurve (gedacht als abstrakte, koordinatenunabhängige Vektoren bzw. Vektorfelder) gibt, ist die rechte Schreibweise etwas salopp, bezieht sich aber auf Komponenten.

1.7 Komponentendarstellung und invariante Tensoren

Wir haben oben den Vektor $\vec{F}$ über das Transformationsverhalten identifiziert. Indem wir verlangen, daß das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ invariant unter Rotationen

$\vec{x}' = R \vec{x}$ und $\vec{y}' = R \vec{y}$ ist, erhalten wir die Bedingung

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \stackrel{!}{=} (R \vec{x}) \cdot (R \vec{y}) = (\vec{x})^t R^t R \vec{y} \implies R^t R = \underline{11}$$

R ist also eine orthogonale Matrix (im kartesischen Koordinatensystem)

Wir können um die drei Raumachsen drehen mit:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Drehungen durch hintereinander ausführen $\rightarrow$

$3 * 2 * 2 = 12$ mögliche Reihenfolgen (nicht zwei gleiche hintereinander)

Standardkonvention: $R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma) R_x(\beta) R_z(\alpha)$ (Eulersche Winkel)

Bemerkung: $\det R = 1$

Summenkonvention:

Man schreibt z.B.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \equiv x_i y_i$$

$$\vec{x}' = R \vec{x} \iff x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j \equiv R_{ij} x_j$$

D.h. über paare gleicher Indizes wird summiert und das Summenzeichen dabei unterdrückt.

Neben den Vektoren kategorisiert man Größen folgendermaßen nach ihren Transformationseigenschaften:

Eine Größe S heißt (kartesischer) Skalar, wenn sie sich bei Rotationen nicht ändert: $S' = S$

Ein Satz von Größen v_i , $i=1,2,3$ heißt (kartesischer) Vektor, falls er sich unter Rotationen folgendermaßen transformiert: $v'_i = R_{ij} v_j$ (definierende Eigenschaft der Rotationen)

Ein Satz von Größen $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3$ heißt (kartesischer) Tensor der Stufe n , falls

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

Bemerkungen

* Die Geschwindigkeit ist ein Vektor:

$$v_i' = \frac{dx_i'}{dt} = \frac{d}{dt} (R_{ij} x_j) = R_{ij} \frac{dx_j}{dt} = R_{ij} v_j$$

* Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist ein Skalar (Rotationen erhalten Längen & Winkel):

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_i' w_i' = R_{ij} v_j R_{ik} w_k = v_j (R^T R)_{jk} w_k$$

$$= v_j \underbrace{\delta_{ji}}_{\equiv \mathbb{1}_{ji}} w_i = v_i w_i = \vec{v} \cdot \vec{w}$$

* $a S_{i_1 \dots i_n} + b T_{i_1 \dots i_n}$ mit S, T Tensoren n -ter Stufe und $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist Tensor der Stufe n .

* $S_{i_1 \dots i_n} T_{j_1 \dots j_m}$ ist ein Tensor der Stufe $n+m$.

* $S_{i_1 \dots i_n k_1 \dots k_r} = U_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} T_{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_r}$
 Falls S Tensor der Stufe $n+r$ & T Tensor der Stufe $m+r$ $\Rightarrow$ Stufe $n+m$
 (Kontraktion)

(Gilt auch für Permutationen der Indizes)

Pseudotensoren

$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ führt zu Spiegelungen ($\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$),

und es gilt $\det P = -1$, P kann mit eigentlichen Drehungen verknüpft werden, i.e. $R^{(2)} = R^{(1)} P$.

Dann ist $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ein Pseudotensor, wenn folgende Transformationseigenschaft gilt:

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \det R * R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

Als Spezialfälle ergeben sich Pseudoskalar und Pseudovektor als Pseudotensoren der Stufe 0 bezw. 1.

Invariante Tensoren

Das Kroneckersymbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

ist ein invarianter Tensor, da es in sich selbst transformiert:

$$\delta'_{ij} = R_{ik} R_{jl} \delta_{kl} = R_{ik} R_{jk} = R_{ik} R_{kj}^T = (R R^T)_{ij} = \delta_{ij}$$

Bemerkung

Wir können das Skalarprodukt folgendermaßen schreiben:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \underbrace{x_i}_{\substack{\text{Tensor} \\ \text{2. Stufe}}} \underbrace{y_j}_{\substack{\text{Tensor} \\ \text{2. Stufe}}} \delta_{ij}$$

Nach obiger Regel für Kontraktionen ist das Resultat ein Tensor nullter Stufe, also ein Skalar.

Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{für } (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit $\det A = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} A_{1 i_1} A_{2 i_2} A_{3 i_3}$ (Leibniz-Formel)

→

$$\varepsilon'_{ijk} = \det R \ R_{1i} R_{2j} R_{3k} \varepsilon_{rst} = \det R \ \varepsilon_{ijk} \det R = \varepsilon_{ijk}$$

Man nennt ε_{ijk} auch den total antisymmetrischen (Pseudo-) Tensor.

Wir können den ε -Tensor verwenden zur Definition des Kreuzprodukts: $(\vec{x} \times \vec{y})_i = \varepsilon_{ikj} x_k y_j = -(\vec{y} \times \vec{x})_i$

Dabei ist $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}| \sin \vartheta(\vec{x}, \vec{y})$

Das Vorzeichen wird folgendermaßen gewählt: Ist $\vec{x} \perp \vec{y}$, dann spannen $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem auf.

↓ ↓ ↘
Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand

Bemerkung:

Sind $\vec{x}, \vec{y}$ Vektoren, dann ist $\vec{x} \times \vec{y}$ ein Pseudovektor.

Pseudotensor 3. Stufe Tensor 2. Stufe
↓ ↓
 $\varepsilon_{ikj} x_k y_j$
↓
Pseudotensor 1. Stufe
≡ Pseudovektor

Ist dazu $\vec{z}$ ein weiterer Vektor, dann ist $\vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$ ein Pseudoskalar (Spatprodukt).

Nützliche Identitäten

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad (\text{Grassmann-Identität})$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijn} = 2 \delta_{kn}$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$$

Man kann diese anhand der verschiedenen Spezialfälle leicht nachweisen.

In der Komponentenschreibweise können wir Identitäten für Skalar- und Kreuzprodukte leicht nachweisen, die ansonsten aufwendiger begründet werden müßten.

Beispiel: BAC-minus-CAB Theorem

$$\begin{aligned} [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m = \epsilon_{kij} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m \\ &= [\vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})]_i \end{aligned}$$

Beispiel: Lagrange-Identität

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{ilm} c_l d_m \\ &= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} \vec{b} \cdot \vec{d} - \vec{a} \cdot \vec{d} \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

In der Mechanik und der Elektrodynamik ist die Parität erhalten, d.h. entweder beide Seiten einer Gleichung transformieren wie ein Tensor (Vektor, Skalar) oder beide wie ein Pseudotensor (Pseudovektor, Pseudoskalar).

In den schwachen Wechselwirkungen der Teilchenphysik ist die Parität allerdings verletzt.

Beispiele

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (\text{Vektorgleichung})$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad (\text{Pseudovektorgleichung})$$

1.8 Beschleunigte Bezugssysteme

Wir betrachten

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{d}(t)$$

d.h. der Ursprung von BS' bewegt sich gegenüber BS mit $\vec{d}(t)$, wobei BS ein B ist.

Linear beschleunigtes System

$$\vec{d}(t) = \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

—>

$$m \ddot{\vec{r}} = 0 = m (\ddot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{d}}) = m (\ddot{\vec{r}}' + \vec{a})$$

$$\text{—> In } BS' \text{ gilt: } m \ddot{\vec{r}}' = -m \vec{a}$$

d.h. ein Beobachter spürt dort eine Trägheitskraft, auch Scheinkraft genannt, da diese in Inertialsystemen verschwindet.

Trägheitskräfte treten in gleicher Form wie die Schwerkraft auf.

Betrachte z.B. an der Erdoberfläche

$$m \ddot{\vec{r}} = m_s \vec{g} \longrightarrow m \ddot{\vec{r}}' = m_s \vec{g} - m \vec{a}$$

↳ schwere Masse im Gegensatz

zur trägen Masse m

Experimentell findet man, daß m_s immer proportional zu m ist. Durch eine geeignete Wahl der Kopplungskonstante der Gravitation kann man $m_s = m$ wählen. Diese Unterscheidbarkeit (Äquivalenz) von träger und schwerer Masse wird schwaches Äquivalenzprinzip genannt.

Dann folgt auch, daß $m \ddot{\vec{r}}' = m (\vec{g} - \vec{a})$, so daß in einem

frei fallenden Federstuhl ($\vec{r} = \vec{g}$) eine gleichförmige freie Bewegung beobachtet wird.

Rotierendes Bezugssystem

Wir verallgemeinern nun zu

$$\vec{r}(t) = R(t) \vec{r}'(t) + \vec{d}(t)$$

mit einer zeitabhängigen Drehung $R(t)$. Dabei ist BS im IS und BS' i.d. Keines.

Bei der Berechnung der Geschwindigkeit ist zu beachten, daß die Basisvektoren im BS' mitbewegt werden:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}' \hat{e}_{x'} + \dot{y}' \hat{e}_{y'} + \dot{z}' \hat{e}_{z'} + x' \dot{\hat{e}}_{x'} + y' \dot{\hat{e}}_{y'} + z' \dot{\hat{e}}_{z'} + \dot{\vec{d}}$$

Um die in BS beobachteten Komponenten zu erhalten, muß man noch die $\dot{\hat{e}}_{x',y',z'}$ durch $\dot{\hat{e}}_{x,y,z}$ ausdrücken. Praktischer ist die Wahl eines Zeitpunktes t mit $\hat{e}_{x,y,z} = \hat{e}_{x',y',z'}(t)$.

In BS' stellt man dagegen fest:

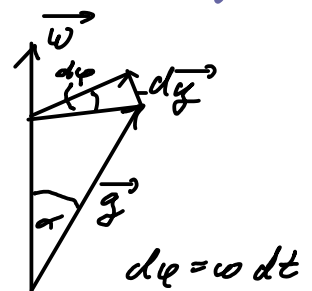
$$\dot{\vec{r}}' = \dot{x}' \hat{e}_{x'} + \dot{y}' \hat{e}_{y'} + \dot{z}' \hat{e}_{z'}$$

Sei BS' nun ein System, welches mit IS bei $t=0$ zusammenfällt und mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\vec{\omega}|$ um die Richtung $\hat{\omega} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$ rotiert.

Ist $\vec{g}$ ein im BS' zeitunabhängiger Vektor, dann gilt für seine zeitliche Änderung in BS

$$d\vec{g} \perp \vec{\omega}, \quad d\vec{g} \perp \vec{g}, \quad |d\vec{g}| = |\vec{g}| \sin \alpha \, d\varphi$$

$$\longrightarrow d\vec{g} = \vec{\omega} \times \vec{g} \, dt$$



$$\rightarrow \dot{\hat{e}}_{x',y',z'} = \vec{\omega} \times \hat{e}_{x',y',z'}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{d}} + \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Diese Herleitung gilt auch für allgemeine Vektoren, d.h.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}'$$

Einsetzen ins 2. Newtonsche Gesetz:

$$\begin{aligned} \vec{F} = m \ddot{\vec{r}} &= m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{d}} + \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= m \left[\ddot{\vec{d}} + \ddot{\vec{r}}' + 2 \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right] \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$m \ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - \underbrace{m \ddot{\vec{d}}}_{\text{Beschul. des Koordinaten-}} - \underbrace{2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\text{Corioliskraft}} - \underbrace{m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\text{tangentielle Beschleunigung}} - \underbrace{m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

Scheinkräfte

Beispiel Erdrotation

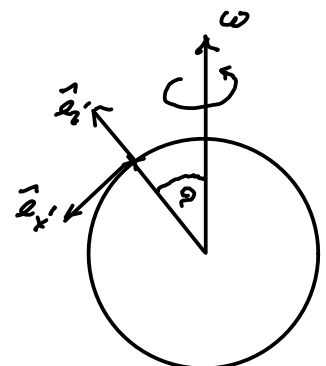
Schwerpunkt der Erde: Ursprung von BS (näherungsweise am IS)

BS' mit Ursprung im Labor auf der Erdoberfläche, bewegt sich auf Kreis mit Radius $R \sin \vartheta$

$90^\circ - \vartheta$: geographische Breite Nord

$\vartheta - 90^\circ$: geographische Breite Süd

$$\vec{\omega} = \omega (\cos \vartheta \hat{e}_z' - \sin \vartheta \hat{e}_x')$$



$\hat{e}_z'$ zeigt aus der Zeichnung heraus

Mit dieser Wahl tritt $m |\ddot{\vec{d}}| = \omega^2 r^2 \sin \vartheta$ als Zentrifugalkraft auf und wir können den letzten Term in obiger Formel vernachlässigen. Würden wir dagegen den Ursprung von BS' in die Erdachse legen, dann wäre $\ddot{\vec{d}} = 0$ und die Zentrifugalkraft ergäbe sich aus dem letzten Term.

Gleichzeitig plattet die Zentrifugalkraft die Erde ab, so daß zusammen mit der von der Schwerkraft kommenden Beschleunigung $\vec{g}_s$ der Vektor

$$\vec{g}_s - \ddot{\vec{d}} = -g \hat{e}_{z'}$$

senkrecht auf der Erdoberfläche steht.

Insgesamt:

$$m \ddot{\vec{r}}' = \vec{F} - m g \hat{e}_{z'} - 2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

Für horizontale Bewegungen entlang der Erdoberfläche ($z' = 0$) erhalten wir

$$m \ddot{x}' = F_{x'} + 2 m \omega \dot{y}' \cos \vartheta$$

$$m \ddot{y}' = F_{y'} - 2 m \omega \dot{x}' \cos \vartheta$$

Richtung der Kraft

$$\left. \begin{array}{l} \cos \vartheta > 0 \text{ und } \dot{x}' > 0 \rightarrow \text{Kraft in negative } y'\text{-Richtung} \\ \cos \vartheta > 0 \text{ und } \dot{y}' > 0 \rightarrow \text{Kraft in positive } x'\text{-Richtung} \end{array} \right\} \text{nach rechts}$$

(umgekehrt für $\cos \vartheta < 0$)

→ Auf der Nordhalbkugel wird stets nach rechts und

auf der Südhalbkugel nach links abgelenkt,

Entsprechend rotieren meteorologische Tiefdruckgebiete auf der Nordhalbkugel entgegen, auf der Südhalbkugel mit dem Uhrzeigersinn.

Beispiel Foucaultsches Pendel

$$F_{x'} = -m\omega_0^2 x' \quad , \quad F_{y'} = -m\omega_0^2 y' \quad , \quad \alpha = \omega \cos \vartheta$$

→

$$\ddot{x}' = -\omega_0^2 x' + 2\alpha \dot{y}'$$

$$\ddot{y}' = -\omega_0^2 y' - 2\alpha \dot{x}'$$

$$\text{Mit } z = x' + iy' \longrightarrow \ddot{z} = -\omega_0^2 z - 2i\alpha \dot{z}$$

$$\text{Ansatz: } z = C e^{i\gamma t} \longrightarrow -\gamma^2 = -\omega_0^2 + 2\alpha\gamma \iff \gamma^2 + 2\alpha\gamma - \omega_0^2 = 0$$

$$\implies \gamma_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} \approx \pm \omega_0 - \alpha$$

$\uparrow$
 $\alpha \ll \omega_0$

$$z(t) = (c_1 + ic_2) e^{-i(\alpha - \omega_0)t} + (c_3 + ic_4) e^{-i(\alpha + \omega_0)t}$$

$$\text{z.B. für } c_1 = c_3 = c, \quad c_2 = c_4 = 0$$

$$z(t) = 2c (\cos \alpha t - i \sin \alpha t) \cos \omega_0 t$$

→

$$x'(t) = 2c \cos \alpha t \cos \omega_0 t$$

$$y'(t) = -2c \sin \alpha t \cos \omega_0 t$$

$$\longrightarrow \text{Dauer für volle Drehung der Schwingungsvekt.} \quad \frac{2\pi}{\omega \cos \vartheta}$$

1.9 Zwei-Teilchen-System mit Zentralkraft

Betrachte Wechselwirkung zweier Körper

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{21} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{12} \end{aligned} \right\} \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (3. \text{ Gesetz})$$

Definiere Relativkoordinat $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $r = |\vec{r}|$

Sei $U(r)$ ein Zweikörper-Zentralpotential,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -\vec{\nabla}_{\vec{r}_1} U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{\nabla}_{\vec{r}_1} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{\nabla}_{\vec{r}_1} (\vec{r}_1^2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{2} (\vec{r}_1^2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_2^2)^{-\frac{1}{2}} \vec{\nabla}_{\vec{r}_1} (\vec{r}_1^2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_2^2) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\vec{F}_{21} \end{aligned}$$

$$\text{Mit } F(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$$

→ gekoppelte Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) F(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \vec{r} F(r)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) F(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\vec{r} F(r)$$

Definiere Schwerpunktskoordinat: $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

$$\rightarrow \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\rightarrow m_1 \ddot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = \vec{r} F(r)$$

$$m_2 \ddot{\vec{R}} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = -\vec{r} F(r)$$

Bilden wir Summe und Differenz, dann entkoppeln wir das System:

$$(m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} = 0$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{r} F(\vec{r})$$

mit der reduzierten Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Die erste Gleichung ist dabei ein Spezialfall des bereits bewiesenen Schwerpunktsatzes, die zweite Gleichung entspricht einem Einkörperproblem.

Kinetische Energie:

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{m_1}{2} \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right)^2$$

$$= \underbrace{\frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2}_{= \text{const.}} + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2$$

Da nach dem Energiesatz $T + U(r) = \text{const.}$ ist, setzen wir

$$\frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(r) = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\mu}{2} r^2 \dot{\varphi}^2}_{= \frac{1}{2\mu r^2} l^2} + U(r) = E = \text{const.}$$

wobei wir die Polarkoordinaten (r, φ) im zweiten Schritt benutzt haben. Da der Drehimpuls $l = \mu r^2 \dot{\varphi}$ ebenfalls konstant ist, können wir schreiben

$$\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E = \text{const.} \quad \text{mit} \quad U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

→

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(r))}, \quad \dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}, \quad \frac{d\varphi}{dr} = \dot{\varphi} \frac{dt}{dr} = \frac{l}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

Radialgleichung entspricht dem in 1.3 behandelten eindimensionalen Problem. Insbesondere können wir aus $E - U(r) = 0$ die Umkehrpunkte Perihel (größte Annäherung) und Aphel (größte Entfernung) leicht bestimmen.

Beispiel Planetenbewegung

Keplersche Gesetze

(Aufgrund der aus den beobachteten Planetenpositionen rekonstruierten tatsächlichen Bahnen)

1. Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, wobei die Sonne in einem der Brennpunkte steht. (1608)
2. Der von der Sonne zum Planeten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen. (1609)
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen der Ellipsen. (1619)

2. Gesetz: Drehimpulserhaltung $r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$, sofern man genauer den Schwerpunkt des Zweikörpersystems statt den Mittelpunkt der Sonne als Ausgangspunkt des Fahrstrahls verwendet.

$$\vec{r} = r \hat{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \quad (\text{siehe 1.1})$$

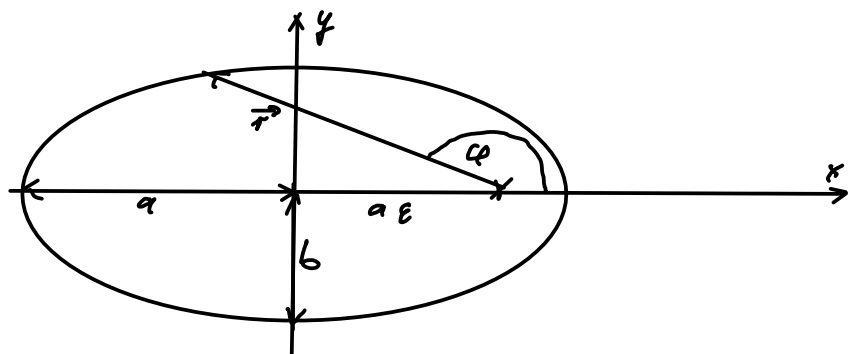
$$|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| \mu = r^2 \dot{\varphi} \mu = l = \text{const.}$$

Wir diskutieren in diesem Zusammenhang zunächst die Geometrie der Ellipsen

a : große Halbachse

b : kleine Halbachse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



Lineare Exzentrizität: $e = \sqrt{a^2 - b^2} \longrightarrow b^2 = a^2 - e^2$

(numerische) Exzentrizität: $\varepsilon = \frac{e}{a} < 1$

Bestimme $r(\varphi) = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$

$$x = e + r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\longrightarrow b^2 (e^2 + 2e + \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi) + a^2 r^2 \sin^2 \varphi - a^2 b^2 = 0$$

$$= a^2 e^2 + 2a^2 e + \cos \varphi + a^2 r^2 - e^4 - 2e^3 + \cos \varphi - e^2 r^2 \cos^2 \varphi - a^4 + a^2 e^2$$

$$= -(a^2 - e(e + r \cos \varphi))^2 + a^2 r^2$$

$$= -(a^2 - ar - e(e + r \cos \varphi))(a^2 + ar - e(e + r \cos \varphi)) = 0$$

$$\longrightarrow a^2 - ar - e^2 - e + \cos \varphi = 0$$

$$\longrightarrow r = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cos \varphi} = \frac{b^2}{a} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \text{ mit } p = \frac{b^2}{a}$$

Abstand r' zum linken Brennpunkt

$$r'^2 = (x+e)^2 + y^2 = \left(2e + (a^2 - e^2) \frac{\cos \varphi}{a + e \cos \varphi}\right)^2 + \left((a^2 - e^2) \frac{\sin \varphi}{a + e \cos \varphi}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(a + e \cos \varphi)^2} \left((a^2 - e^2)^2 + 4e^2(a + e \cos \varphi)^2 + 4e(a + e \cos \varphi)(a^2 - e^2) \cos \varphi \right)$$

$$= \frac{1}{(a + e \cos \varphi)^2} \left(a^4 - 2a^2 e^2 + e^4 + 4e^2 a^2 + 4(e^3 a + a^3 e) \cos \varphi + 4e^2 a^2 \cos^2 \varphi \right)$$

$$= \frac{1}{(a + e \cos \varphi)^2} \left(a^2 + e^2 + 2ae \cos \varphi \right)^2$$

$\longrightarrow$

$$r' = \frac{a^2 + e^2 + 2ae \cos \varphi}{a + e \cos \varphi}$$

$\Rightarrow r + r' = 2a$ (weitere bekannte Bestimmungsgleichung der Ellipse)

Wir können nun das Newtonsche Gravitationsgesetz induktiv aus den Keplerschen Gesetzen bestimmen.

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{r} = - \overset{1. \text{ Gesetz}}{\frac{\dot{r}}{r^2}} = - \frac{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}{p^2} \frac{(-p)(-\varepsilon \sin \varphi) \dot{\varphi}}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} = - \frac{\varepsilon \dot{\varphi} \sin \varphi}{p}$$

$$\text{Mit } \overset{2. \text{ Gesetz}}{\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}} \longrightarrow \dot{r} = \frac{\varepsilon l \sin \varphi}{\mu p}$$

$\longrightarrow$

$$\ddot{r} = \frac{\varepsilon l \dot{\varphi} \cos \varphi}{\mu p} = \frac{\varepsilon l^2 \cos \varphi}{\mu^2 r^2 p}$$

$$\Rightarrow F(r) = \mu \underbrace{(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2)}_{\text{Radialkomponente der Beschleunigung - siehe 1.1}} = \frac{l^2}{\mu r^2} \left(\frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi - \frac{1}{r} \right)$$

Radialkomponente der Beschleunigung - siehe 1.1

$$= \frac{l^2}{\mu r^2} \left(\frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi - \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p} \right) = - \frac{l^2}{\mu p r^2}$$

D.h. die Kraft nimmt mit dem Quadrat des Abstands ab.

$\longrightarrow$

Newtons Gravitationsgesetz (1687)

$$\boxed{\vec{F}_{21} = - \vec{F}_{12} = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r^3}}$$

Dabei ist die Newtonsche Konstante

$$G = (6,674\,08 \pm 0,000\,31) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Aus dem Gravitationsgesetz und den Newtonschen Gesetzen lassen sich wiederum Keplers Gesetze deduzieren.

Dazu kehren wir zurück zu

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(r))} \quad , \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{l}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

und schreiben

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \text{mit} \quad \alpha = \begin{cases} G m_1 m_2 & \text{Gravitationspotential} \\ -q_1 q_2 & \text{Coulombpotential} \end{cases}$$

(cgs, SI mit Faktor $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$)

$$\text{Mit } s = \frac{1}{r} \longrightarrow$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{r} \right) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^{-1} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{\mu r^2}{l} = -\frac{\mu \dot{r}}{l}$$

$$\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U(r) = E = \frac{l^2}{2\mu} \left[\left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] - \alpha s \quad \bigg| \frac{d}{d\varphi}$$

$$\frac{l^2}{2\mu} \left[2 \frac{ds}{d\varphi} \frac{d^2s}{d\varphi^2} + 2s \frac{ds}{d\varphi} \right] - \alpha \frac{ds}{d\varphi} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d^2s}{d\varphi^2} + s = \frac{\alpha \mu}{l^2}$$

$$\longrightarrow s = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{\alpha \mu}{l^2}$$

Mit $B=0$ wird s maximal (für $A>0, \alpha>0$) wenn $\varphi=0 \longrightarrow r$ minimal (Perihelion) für $\varphi=0$.

$$r = \frac{1}{\frac{\alpha \mu}{l^2} + A \cos \varphi} = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{mit } P = \frac{l^2}{\alpha \mu}, \quad E = A P$$

Ersetze die Exzentrizität ε durch die Energie E .

$$r_{\min} = \frac{P}{1 + \varepsilon} = \frac{P}{1 - \varepsilon^2} (1 - \varepsilon) = \frac{b^2}{a} \frac{a^2}{b^2} (1 - \varepsilon) = a (1 - \varepsilon)$$

$\hookrightarrow P \quad \hookrightarrow = \frac{1}{1 - \varepsilon^2}$

(im Einklang mit der Skizze)

$$E = \frac{l^2}{2 \mu r_{\min}^2} - \frac{\alpha}{r_{\min}} = \frac{\alpha P}{2 r_{\min}^2} - \frac{\alpha}{r_{\min}} = \alpha \left(\frac{P}{2 r_{\min}^2} - \frac{1}{r_{\min}} \right)$$

$$= \frac{\alpha}{2 r_{\min}} (1 + \varepsilon - 2) = - \frac{\alpha}{2 r_{\min}} (1 - \varepsilon) = - \frac{\alpha}{2 a}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{a} = - \frac{2 E}{\alpha}$$

$$\longrightarrow 1 - \varepsilon^2 = \frac{P}{a} = - \frac{l^2}{\alpha \mu} \frac{2 E}{\alpha} \iff \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{E l^2}{\alpha^2 \mu}}$$

Für die Bahn können wir dann die Fälle unterscheiden:

$\varepsilon > 1$, $E > 0$, Hyperbel

$\varepsilon = 1$, $E = 0$, Parabel

$\varepsilon < 1$, $E < 0$, Ellipse

Zum 3. Keplerschen Gesetz: $T^2 = \text{const. } a^3$ mit der Umlaufzeit

Gleichung für Fläche A der Ellipse

$$A = \pi a b = \int_0^T dt \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = T \frac{L}{2 \mu}$$

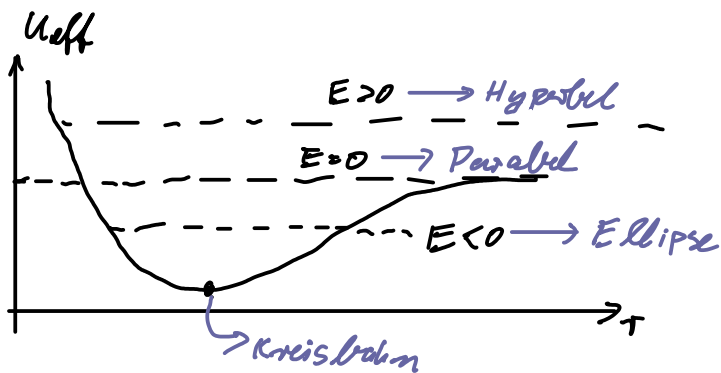
$\longrightarrow$

$$\pi^2 a^2 (a^2 - l^2) = \pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2) = \pi^2 a^5 P = T^2 \frac{l^2}{4 \mu^2}$$

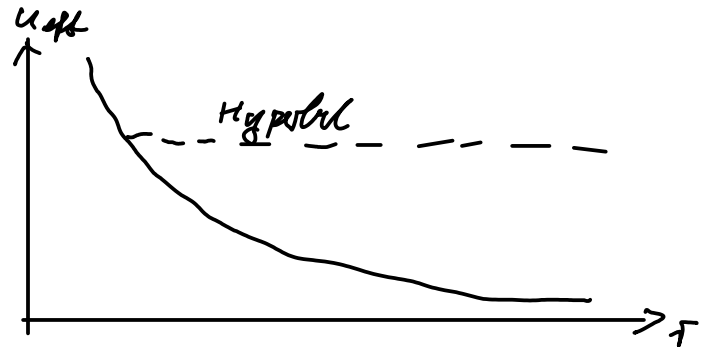
Für Planetenbewegung: $\mu^2 p = \frac{l^2 m^2}{G m_1 m_2 \mu} = \frac{l^2}{G m_1 m_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}} \approx \frac{l^2}{G M_\odot}$

→ Die Proportionalitätskonstante ist für alle Planeten ungefähr gleich.

Attraktives Potential ($\alpha > 0$)



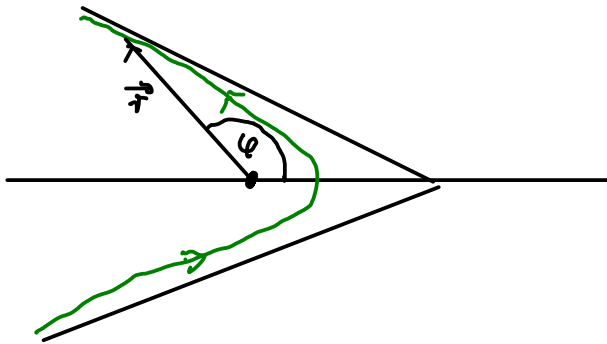
Repulsives Potential ($\alpha < 0$)



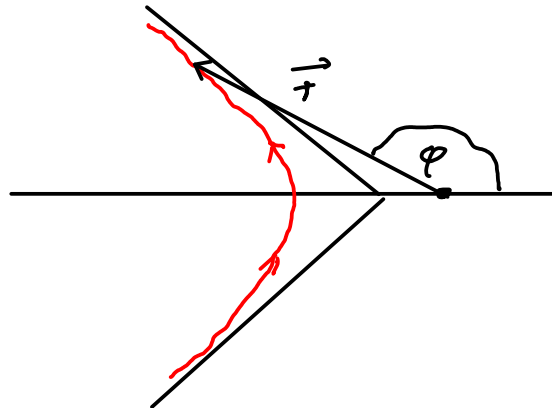
Nachdem wir die Ellipsen eingehend diskutiert haben, diskutieren wir noch die Hyperbeln

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

$$\alpha > 0 \rightarrow p > 0$$



$$\alpha < 0 \rightarrow p < 0 \quad p = \frac{l^2}{\alpha \mu}$$



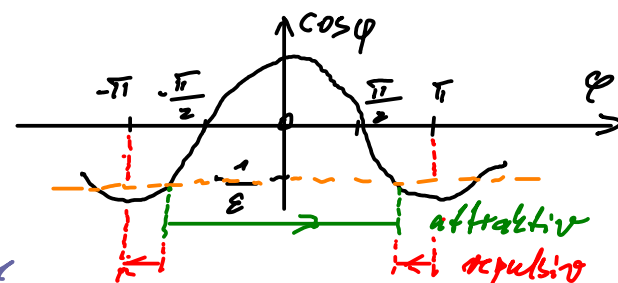
$$1 + \varepsilon \cos \varphi > 0 \rightarrow \text{damit } r > 0 \leftarrow 1 + \varepsilon \cos \varphi < 0$$

$$\cos \varphi > -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\cos \varphi < -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{Grenzwinkel: } \cos \varphi_{\text{co}} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

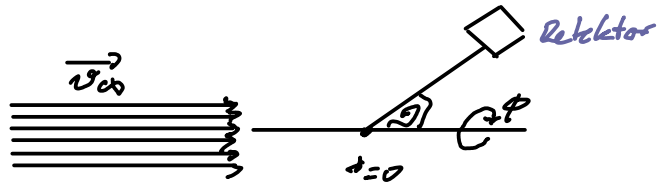
Nebenan skizzieren wir den Verlauf von φ entlang der Bahnkurven (beachte den Sprung von φ beim Überqueren der Achse im repulsiven Fall).



1.10 Rutherfordstreuung

Betrachte $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ zunächst für ein ortsfestes Potential

Strahlquerschnitt



Einfallende Teilchen werden von $U(r)$ gestreut — wir nehmen hier ein sphärisch symmetrisches Potential an, so daß insgesamt das Problem unabhängig vom Azimutwinkel φ ist.

Strahndichte: $j = \frac{\text{Zahl der einfallenden Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} = \frac{\Delta N}{\Delta A \Delta t}$

Geschwindigkeit weit vor dem Streuzentrum:

$$\vec{v}_{\infty} \parallel \hat{e}_z$$

$$E = \frac{m}{2} \vec{v}_{\infty}^2$$

Ein herausgegriffenes Teilchen werde um den Winkel ϑ gestreut. Im großen Abstand R stehe ein Detektor welcher alle Teilchen nachweist, die die Detektorfläche dA_D treffen. Diese entspricht dem Raumwinkelenelement

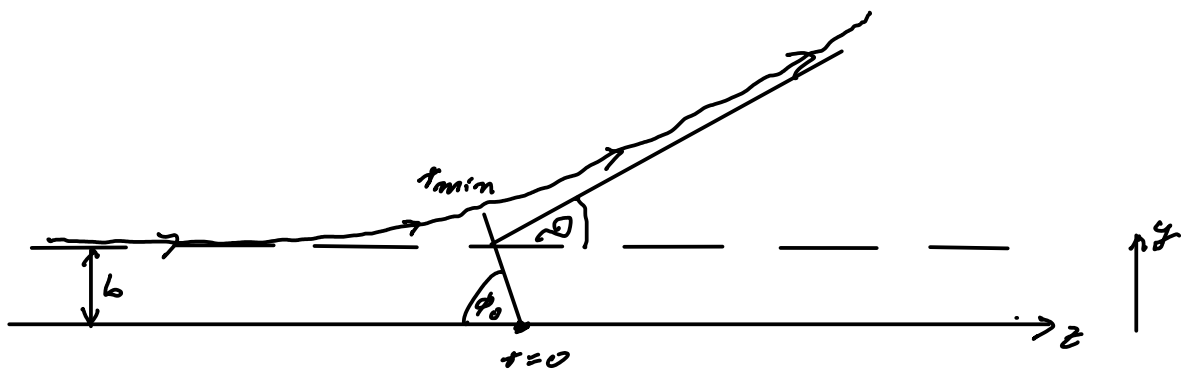
$$d\Omega = \frac{dA_D}{R^2} = d\varphi \sin\vartheta d\vartheta$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{\Delta N(\vartheta)}{\Delta t}}{j d\Omega} = \frac{\text{Anzahl gestreuter Teilchen pro Zeit und Raumwinkel}}{\text{Anzahl einfallender Teilchen pro Zeit und Fläche}}$$

Totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta)$$



$$l = m v_{\infty} b \quad \rightarrow \text{Stoßparameter} \quad = \sqrt{2mE} b \quad \text{da} \quad E = \frac{1}{2} m v_{\infty}^2$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Big|_{t \rightarrow -\infty} = m \vec{r} \times \vec{v}_{\infty} = m \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ v_{\infty} t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m v_{\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m v_{\infty} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist jetzt $\vartheta(b) \leftrightarrow b(\vartheta)$

Aufgrund der Symmetrie streuen wir von einem Kreisring $[b, b+db]$ nach $[\vartheta, \vartheta+d\vartheta]$. Erhaltung der Teilchenzahl führt zu

$$j 2\pi b |db| = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\vartheta}^{\vartheta+d\vartheta} \sin \vartheta' d\vartheta' j \frac{d\vartheta}{d\Omega}(\vartheta') = j 2\pi \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\Omega}(\vartheta) |d\vartheta|$$

Es ist dabei angebracht, Beträge zu setzen, da i.A. größere ϑ kleinere b bedingen.

→

$$\frac{d\vartheta}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{\sin \vartheta} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right|$$

Wir benutzen nun unser voriges Resultat für Zentralpotentiale

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{l}{m r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r)) - \frac{l^2}{2m r^2}}}$$

Für den positiven Winkel φ_0 erhalten wir

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} dr \frac{b}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{b^2}{r^2}}}$$

→

$$\vartheta(b) = \pi - 2\phi_0$$

Die Integrationsgrenze $r_{\min}$ ergibt sich dabei aus

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r_{\min}} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{b^2}{2mr^2} \right)} \Big|_{r_{\min}} = 0$$

$$\rightarrow E - U(r_{\min}) - \frac{2mEb^2}{2mr_{\min}^2} = 0 \iff 1 = \frac{U(r_{\min})}{E} + \frac{b^2}{r_{\min}^2}$$

Beachte, daß der Integrand zwar divergiert, das Integral jedoch endlich ist.

Der Rutherfordquerschnitt ergibt sich für

$$U(r) = -\frac{q}{r} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

e : Elementarladung

$Z_{1,2}$: Kernladungszahlen, z.B. 2 für He, 79 für Au

Beachte: Aufgrund ihrer geringen Masse lenken Elektronen die Atomkerne kaum ab.

Wir benutzen nun unser Resultat

$$r = \frac{P}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad \text{mit } P = \frac{b^2}{r_m} \quad \text{und } q = -Z_1 Z_2 e^2$$

Im abstoßenden Potential ist $1 + \epsilon \cos \varphi < 0$, also schreiben wir

$$\frac{|p|}{r} = -1 - \varepsilon \cos \varphi$$

Außerdem benutzen wir die Exzentrizität

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\alpha^2 m}} = \sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{\alpha} \right)^2}$$

Der Grenzwinkel ist mit $\cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon}$ gegeben, und es ist

$$\varphi_\infty - \vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} \iff \vartheta = 2\varphi_\infty - \pi$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} = \pi - \varphi_\infty \quad \vartheta = \pi - 2\varphi_0$$

$\implies$

$$\cos \varphi_0 = \cos(\pi - \varphi_\infty) = -\cos \varphi_\infty = \frac{1}{\varepsilon}$$

$\longrightarrow$

$$\tan \varphi_0 = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon^2}} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{2Eb}{|\alpha|}$$

$$= \cot \frac{\vartheta}{2}$$

$\uparrow$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

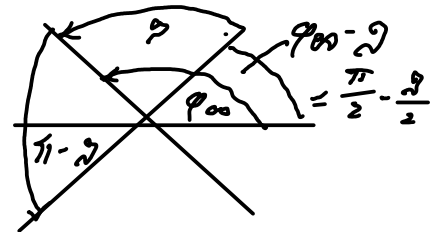
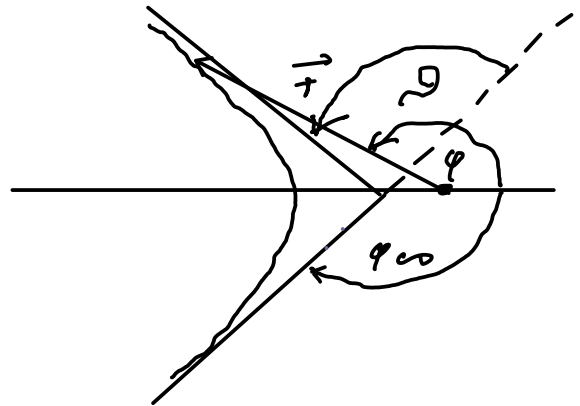
$$\implies b = \frac{|\alpha|}{2E} \cot \frac{\vartheta}{2}$$

$\longrightarrow$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{\sin \vartheta} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{\cot \frac{\vartheta}{2}}{\sin \vartheta} \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right|$$

$$= \frac{\alpha^2}{8E^2} \frac{\cot \frac{\vartheta}{2}}{\sin \vartheta \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{\alpha^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

$$\sin \vartheta = 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}$$



Rutherford - Formel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

Wir haben hier ein ortsfestes Potential angenommen. Bei der Streuung von Teilchen mit ähnlicher Masse gelten diese Formeln für den Relativzustand und mit m ersetzt durch die reduzierte Masse μ im Schwerpunktsystem (SS). Dann ist es allerdings von Interesse, die Resultate ins Laborsystem (LS) rückzutransformieren.

Wir betrachten den Streuquerschnitt für die Streuung von Teilchen 1 an Teilchen 2. Letzteres befindet sich im LS in Ruhe und im Ursprung von LS.

Mit gestrichenen Koordinaten im LS gilt der Zusammenhang

$$\vec{r}_1' = \vec{R}' + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}' , \quad \vec{r}_2' = \vec{R}' - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}' = \vec{0} , \quad \vec{r} = \vec{r}' .$$

Die Strahldichte ist in beiden Systemen gleich:

$$j_{LS} = \frac{\Delta N}{\Delta A \Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta V} \left| \frac{\vec{r}_1'}{r_1'}(-\infty) \right| = \frac{\Delta N}{\Delta V} \left| \frac{\vec{r}}{r}(-\infty) \right| = j_{SS}$$

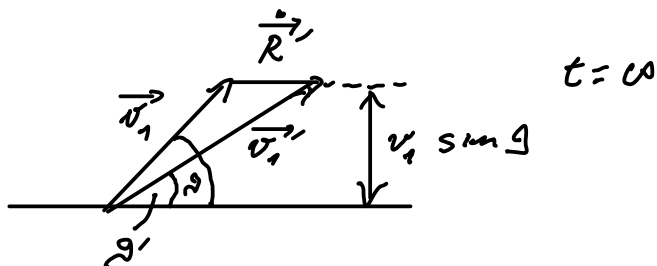
aufgrund der unveränderten Relativgeschwindigkeit,

Da die Galileitransformation Zeitintervalle invariant läßt, muß für die Streuung in die transformierten Raumwinkelbereiche gelten (Teilchen pro Zeit im Winkelbereich):

$$j_{SS} \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = j_{LS} \frac{d\sigma'}{d\Omega'} 2\pi \sin \vartheta' d\vartheta'$$

→

$$\frac{d\vartheta'}{d\Omega'} = \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta'} \frac{d\vartheta}{d\vartheta'}$$



Zur Herleitung der Winkelbeziehung betrachten wir die Geschwindigkeiten nach dem Stoß für $t = \infty$.

Im SS ist $\dot{\vec{R}} = 0$, so daß

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{für alle Zeiten } t,$$

während

$$\vec{v}_1' = \dot{\vec{R}}' + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{R}}' + \vec{v}_1 \quad (\text{siehe Skizze})$$

$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}'$

Aufgrund der Erhaltung des Schwerpunktsimpuls ist

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}}'(t) &= \dot{\vec{R}}'(-\infty) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1(-\infty) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}(-\infty) \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}(\infty) \end{aligned}$$

Dabei ist $\dot{\vec{r}}(\infty) = \dot{\vec{r}}(-\infty)$ wegen Energieerhaltung

→

$$\begin{aligned} \tan \vartheta' &= \frac{v_1(\infty) \sin \vartheta}{v_1(\infty) \cos \vartheta + \dot{\vec{R}}'} = \frac{\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}(\infty) \sin \vartheta}{\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}(\infty) \cos \vartheta + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{r}(\infty)} \\ &= \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta + \frac{m_1}{m_2}} \end{aligned}$$

Im Falle gleicher Massen $m_1 = m_2$ ergibt sich die besonders

einfache Beziehung $\tan \vartheta' = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta + 1} = \tan \frac{\vartheta}{2}$

$$\Rightarrow \vartheta' = \frac{\vartheta}{2}$$

→

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{\sin \vartheta}{\sin \frac{\vartheta}{2}} * 2 = 4 \cos \frac{\vartheta}{2} \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$\quad \quad \quad \underbrace{\sin \frac{\vartheta}{2}}_{= 2 \cos \frac{\vartheta}{2}}$$

In $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ tritt noch die Energie der Relativbewegung

$$E = \frac{M}{2} \dot{r}^2(\pm\infty) = \frac{m}{4} \vec{v}_1^2(-\infty) = \frac{1}{2} E_1$$

d.h. die halbe kinetische Energie von Teilchen 1.

→

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} 4 \cos \frac{\vartheta}{2} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \vartheta'}{\sin^4 \vartheta'}$$