Theoretische Physik 2 (Elektrodynamik) WS 2018/2019
Technische Universität München
January 18, 2019

Exercise Sheet 11*

Deadline: Sheet to be turned in by Friday 25th of January 2019 by 12 pm in the mailbox next to PH3218.

Exercise 1:
Kreisantenne **6 Points**

Ein dünner zu einem Kreis vom Radius R geformter Draht liege in der Ebene $z = 0$. Der Mittelpunkt des Kreises falle mit dem Ursprung zusammen. Ein Strom $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ fließe in diesem Draht.

(a) (0.5 P.) Notieren Sie die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ im Grenzfall eines unendlich dünnen Drahtes mittels der Diracschen δ-Function.

(b) (0.5 P.) Wie groß ist das magnetische Moment $\boldsymbol{\mu}$ dieser Antenne im Falle eines konstanten Stroms $I = I_0$?

(c) (1 P.) Betrachten Sie nun den zeitabhängigen Fall $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$. Bestimmen Sie das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ in Lorenzeichung. Führen Sie die Zeitintegration durch und lassen Sie das Volumenintegral zunächst stehen.

(d) (1 P.) Nehmen Sie an, daß $c/\omega \gg R$ und betrachten Sie die Strahlung in der Fernzone $|\mathbf{x}| \gg c/\omega \gg R$. Werten Sie die verbleibenden Integrationen für das Vektorpotential zur führenden Ordnung im inversen Abstand $1/|\mathbf{x}|$ aus.

(e) (1 P.) Bestimmen Sie das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ in obiger Näherung zur führenden Ordnung.

(f) (1 P.) Bestimmen Sie das Magnetfeld $\mathbf{B}$, indem Sie das magnetische Moment $\boldsymbol{\mu}$ aus Teil (b) benutzen, d.h. zeigen Sie, daß $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = k^2(\mathbf{x} \times \boldsymbol{\mu}) \times \mathbf{x} \sin(\omega t - k|\mathbf{x}|)/|\mathbf{x}|^3$, wobei $k = \omega/c$.

(g) (1 P.) Drücken Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ durch das magnetische Moment $\boldsymbol{\mu}$ aus Teil (b) aus, und zwar zur führenden Ordnung in $1/|\mathbf{x}|$. (Hinweis: Sie können diese Frage auch beantworten, indem Sie das Vektorpotential $\mathbf{B}$ aus Teil (f), benutzen, auch wenn Sie nicht die korrekten Lösungen in (a)-(f) erhalten haben.)

Exercise 2:
Diracscher Monopol **4 Points**

In dieser Aufgabe wird die theoretische Konstrultion eines magnetischen Monopols behandelt. Nehmen Sie an, im Ursprung befinde sich eine magnetische Ladung vom Betrag g. Die entsprechende Maxwellgleichung wird dann modifiziert zu:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 4\pi g \delta^3(\vec{r}) \tag{1}$$

---

*Responsible for the sheet: Juan S. Cruz, Office 1112, juan.cruz@tum.de

(a) Bestimmen Sie $\vec{B}$ sowie den Fluß durch eine Kugeloberfläche vom Radius R.

(b) Nehmen Sie an, es gebe ein eindeutiges Vektorpotential $\vec{A}$, so daß $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, und benutzen Sie das Gauß'sche Gesetz um zu zeigen, daß dies im Widerspruch zum Ergebnis aus (a) steht.

(c) Gehen Sie nun von einer leicht modifizierten Geometrie aus, in der ein unendlich dünnes Kabel L, welches sich bei $x = 0, y = 0, z < 0$ befindet, einen Strom der Stärke g trägt. Benutzen Sie dann das die Integralform

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi} \int_L \frac{\mathrm{d}\vec{l}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \tag{2}$$

um das Vektorpotential $\vec{A}$ explizit zu bestimmen und um zu zeigen, daß es in Kugelkoordinaten die Komponenten

$$A_r = 0, \qquad A_\theta = 0, \qquad A_\phi = \frac{g(1 - \cos\theta)}{4\pi r \sin\theta} = \left(\frac{g}{4\pi r}\right) \tan\frac{\theta}{2} \tag{3}$$

hat.

(d) Verifizieren Sie, daß $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ die Form eines Coulombfeldes für eine Punktladung hat, außer wenn $\theta = \pi$ (d.h. fast das Feld, welches wir in (a) gesucht haben).

(e) Mit $\vec{B}$ dem im Teil (d) bestimmten Feld berechnen Sie nun den totalen magnetischen Fluß furch den Kreis mit Radius $R \sin\theta$, welcher in Fig. 1 dargestellt is. Betrachten Sie $\theta < \pi/2$ und $\theta > \pi/2$ separat, aber geben Sie jeweils den nach oben gerichteten Fluß an.

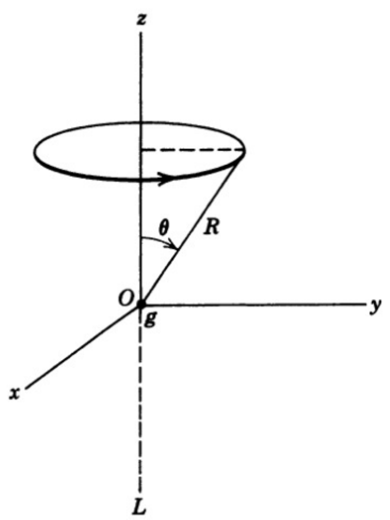

Figure 1: Loop for problem 2.

(f) Bestimmen Sie nun mittels des Integrals $\oint \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ entlang der Schleife den magnetischen Fluß durch diese. Vergleichen Sie das Resultat mit dem Ergebnis aus Teil (e). Zeigen Sie, daß dieses im oberen Halbraum übereinstimmt, während im unteren Halbraum eine konstante Differenz besteht. Interpretieren Sie diesen Unterschied