

THEORETISCHE PHYSIK 2 (ELEKTRODYNAMIK) WS 2018/2019
Technische Universität München
November 30, 2018

EXERCISE SHEET 7*

Deadline: Sheet to be turned in by Friday 7th of December 2018 by 12 pm in the mailbox next to PH3218.

Exercise 1:

Leitende Hemisphären auf konstantem Potential

5 Points

Zwei konzentrische Sphären mit Radien a, b ($b > a$) sind durch die gleiche Ebene in jeweils zwei Halbsphären geteilt. Die obere Hemisphäre der inneren Sphäre und die untere Hemisphäre der äußeren Sphäre werden auf dem gleichen Potential V gehalten. Auf den beiden anderen Hemisphären ist das Potential gleich null. Bestimmen Sie das Potential in der Region $a \leq r \leq b$ als eine Reihe in Legendrepolyomen. Berücksichtigen Sie die Term bis einschließlich der Ordnung $l = 3$. Überprüfen Sie die Resultate anhand der bekannten Grenzfälle $b \rightarrow \infty$ sowie $a \rightarrow 0$.

Hinweis: Es treten die Integrale $\int_0^1 \mathcal{P}_l(x) dx$ auf. Dazu können Sie zunächst die erzeugende Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{P}_l(x) t^l$$

von $x = 0$ bis 1 integrieren. Die der Koeffizient von t^l in der Entwicklung in Potenzen von t führt dann zum gesuchten Integral.

Alternativ dazu können Sie die Identität

$$(2\ell + 1)P_\ell(x) = \frac{d}{dx}(P_{\ell+1}(x) - P_{\ell-1}(x)) \quad \text{for } \ell \geq 1 \quad (1)$$

sowie die Tatsache, daß

$$P_\ell(1) = 1 \quad \forall \ell \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

benutzen.

Exercise 2:

Green'sche Funktion: Geklebt oder summiert

5 Points

Betrachten Sie den Differentialoperator $-\Delta = \partial_x^2$ auf dem eindimensionalen Intervall $[0, L]$.

- (a) Finden Sie die Green'sche Funktion $G(x, y)$ für verschwindende Randbedingungen, d.h. diese soll erfüllen:

$$-\Delta_x G(x, y) = \delta(x - y) \quad \text{with} \quad G(0, y) = G(x, 0) = G(L, y) = G(x, L) = 0 \quad (3)$$

Halten Sie dazu zunächst y fest und finden Sie eine Lösung für $x < y$ und eine weitere für $x > y$, welche jeweils die Randbedingungen erfüllen, und "kleben" Sie diese dann zusammen.

*Responsible for the sheet: Juan S. Cruz, Office 1112, juan.cruz@tum.de

- (b) Finden Sie die Eigenfunktionen des Operators $-\Delta$, welche die o.g. Randbedingungen erfüllen. Drücken Sie die Green'sche Funktion als eine Spektralsumme aus und verifizieren Sie, daß diese den Gleichungen für die Green'sche Funktion genügt. Werten Sie die Summe für $y = L/2$ aus und verifizieren Sie, daß diese mit dem in (a) erhaltenen Resultat (ebenso bei $y = L/2$ auszuwerten) übereinstimmt.