Theoretische Physik 2 (Elektrodynamik) WS 2018/2019
Technische Universität München
October 26, 2018

Exercise Sheet 2*

Deadline: Sheet to be turned in by Friday 2nd of November 2018 by 12 pm in the mailbox next to PH3218.

Exercise 1:
Identitäten für Vektorfelder **3 Points**

Gegeben seien zwei glatte Vektorfelder $\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$. Verifizieren Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\mathrm{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \mathrm{rot}\vec{A} - \vec{A} \cdot \mathrm{rot}\vec{B}$,

(b) $\mathrm{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}\,\mathrm{div}\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$,

Hinweis: Benutzen Sie die Regel $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ für doppelte Kreuzprodukte. Beachten Sie, daß der Nablaoperator auf alle Felder zu seiner Rechten wirkt.

(c) $\mathrm{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \mathrm{rot}\vec{B} + \vec{B} \times \mathrm{rot}\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$

Hinweis: Benutzen Sie die Formel für doppelte Kreuzprodukte, um $\vec{A} \times \mathrm{rot}\vec{B} + \vec{B} \times \mathrm{rot}\vec{A}$ umzuschreiben.

Exercise 2:
Satz von Stokes **3 Points**

Verifizieren Sie den Satz von Stokes für das Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = \left(\frac{4x}{3} - 2y\right)\vec{e}_x + (3y - x)\vec{e}_y$$

auf der Ellipsenfläche $(x/3)^2 + (y/2)^2 \leq 1$, $z = 0$.

Exercise 3:
Quellenfrei **2 Points**

Betrachte Sie das zylindersymmetrische Vektorfeld

$$\vec{V}(\vec{r}) = v(\rho)\vec{e}_\rho, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0, \;\; \vec{e}_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^t.$$

Finden Sie $v(\rho)$, so daß $\vec{V}(\vec{r})$ divergenzfrei ist.

Exercise 4:
Mittelwertsatz der Potentialtheorie **2 Points**

---

*Responsible for the sheet: Juan S. Cruz, Office 1112, juan.cruz@tum.de

Beweisen Sie den Mittelwertsatz: Im ladungdsfreien Raum ($\Delta\Phi = 0$) ist der Wert des elektrostatischen Potential in jedem Punkt gleich dem Mittelwert des Potentials auf den Kugeln mit beliebigen Radius, deren Mittelpunkt in diesem Punkt liegt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Identität für Mittelwerte

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint_{|\vec{r}' - \vec{r}| = R} dF' \, \Phi(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \iint_{S^2} d\Omega \, \Phi(\vec{r} + \vec{n}R),$$

mit $\vec{n}$ dem nach außen zeigenden Einheitsvektor auf der Kugel vom Radius R. Benutzen Sie den Gauß'schen Satz und $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Phi) = \Delta\Phi = 0$, um zu zeigen, daß die Ableitung des Ausdrucks auf der rechten Seite nach R verschwindet.