



Technische Universität München (TUM)

Fakultät für Physik

## Zentralübung zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik) [PH0006] Mitschrift

**Erstellt von:** Yonathan Ascanio Hecker  
Aylin Gelle

**Stand:** Wintersemester 2017/18

**Dozent:** Herr Prof. Dr. Norbert Kaiser

**Achtung:** Dies ist eine im Wintersemester 2017/18 angefertigte Mitschrift und nicht als Ersatz für die Zentralübung gedacht, sondern lediglich als unterstützendes Skript. Es besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Fehlerfreiheit. Abweichungen und Ergänzungen sind möglich.

**Inhaltsverzeichnis**

## 1 grad, div und rot in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

$u_1, u_2, u_3$  seien krummlinige Koordinaten des  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} x(u_1, u_2, u_3) \\ y(u_1, u_2, u_3) \\ z(u_1, u_2, u_3) \end{pmatrix}$$

Betrachte das infinitesimale Bogenelement

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 \right)^2,$$

das eine quadratische Form in  $du_1, du_2, du_3$  ergibt. Die Definition der Tangentialvektoren lautet

$$\vec{t}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3$$

Orthogonale Koordinaten liegen vor, wenn

$$\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = 0 = \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_3 = \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_3, \quad \vec{t}_i \cdot \vec{t}_j = 0 \text{ für } i \neq j$$

Die Längen der Tangentialvektoren sind

$$t_i = |\vec{t}_i| = \sqrt{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Damit gilt für das infinitesimale Bogenelement

$$\boxed{ds^2 = t_1^2 du_1^2 + t_2^2 du_2^2 + t_3^2 du_3^2}$$

mit den zusätzlichen Maßfaktoren  $t_i^2$ . Die normierten Basisvektoren lauten somit

$$\boxed{\vec{e}_i(u_1, u_2, u_3) = \frac{\vec{t}_i}{t_i}}$$

Diese Einheitsvektoren ergeben (nach eventueller Ummummerierung von  $u_1, u_2, u_3$ ) ein rechtshändiges Dreibein. Alle Vektorfelder  $\vec{V}$  werden bzgl. dieser normierten Basisvektoren entwickelt.

$$\boxed{\vec{V}(\vec{r}) = \vec{e}_1 V_1(u_1, u_2, u_3) + \vec{e}_2 V_2(u_1, u_2, u_3) + \vec{e}_3 V_3(u_1, u_2, u_3)}$$

$$\boxed{V_i = \vec{V} \cdot \vec{e}_i}$$

## Der Gradient

Betrachte das totale Differential des Skalarfeldes

$$dF = d\vec{r} \cdot \text{grad } F = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F}{\partial u_i} du_i = \sum_{i=1}^3 \vec{t}_i \cdot \text{grad } F du_i.$$

Per Vergleich ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{t}_i \cdot \text{grad } F &= \frac{\partial F}{\partial u_i}, \quad \text{grad } F = \sum_{i=1}^3 (\text{grad } F)_i \vec{e}_i \\ (\text{grad } F)_i &= (\text{grad } F) \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{t_i} (\text{grad } F \cdot \vec{t}_i) = \frac{1}{t_i} \frac{\partial F}{\partial u_i} \end{aligned}$$

## Die Divergenz

ist über den Gauß'schen Satz definiert als

$$\text{div } \vec{V} = \lim_{\text{Vol} \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}} \oint_{\partial \text{Vol}} d\vec{F} \cdot \vec{V}$$

Der infinitesimale Quader hat 6 Flächenelemente, diejenigen in Richtung  $\mp \vec{e}_1$  sind

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= -\vec{e}_1 t_2 t_3 du_2 du_3 \\ d\vec{F} &= \vec{e}_1 t_2 (u_1 + du_1, u_2, u_3) t_3 (u_1 + du_1, u_2, u_3) du_2 du_3 \end{aligned}$$

Das Volumenelement ist  $dV = t_1 t_2 t_3 du_1 du_2 du_3$ . Damit ergibt sich für die Divergenz

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{V} &= \frac{1}{t_1 t_2 t_3 du_1 du_2 du_3} \cdot \\ &\{ [V_1(u_1 + du_1, \dots) t_2(u_1 + du_1, \dots) t_3(u_1 + du_1, \dots) - V_1(u_1) t_2(u_1) t_3(u_1)] du_2 du_3 \\ &+ [V_2(u_2 + du_2, \dots) t_1(u_2 + du_2, \dots) t_3(u_2 + du_2, \dots) - V_2(u_2) t_1(u_2) t_3(u_2)] du_1 du_3 \\ &+ [V_3(u_3 + du_3, \dots) t_1(u_3 + du_3, \dots) t_2(u_3 + du_3, \dots) - V_3(u_3) t_1(u_3) t_2(u_3)] du_1 du_2 \} \end{aligned}$$

Ergebnis: div in orthogonalen krummlinigen Koordinaten

$$\boxed{\text{div } \vec{V} = \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} (V_1 t_2 t_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (V_2 t_1 t_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (V_3 t_1 t_2) \right\}}$$

Der Laplaceoperator angewandt auf ein Skalarfeld  $F(u_1, u_2, u_3)$  lautet folglich

$$\boxed{\Delta F = \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{t_2 t_3}{t_1} \frac{\partial F}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{t_1 t_3}{t_2} \frac{\partial F}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{t_1 t_2}{t_3} \frac{\partial F}{\partial u_3} \right) \right\}}$$

wobei auch erste Ableitungen von  $F$  auftreten. Diese Formel gilt **nicht** für Vektorfelder, denn  $\Delta \vec{e}_i \neq 0$ .

### Die Rotation

Der Stokes'sche Satz besagt für ein infinitesimales Rechteck

$$d\vec{F} \cdot \text{rot } \vec{V} = \oint d\vec{r} \cdot \vec{V}$$

Es sei

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \vec{e}_3 t_1 t_2 du_1 du_2 \\ d\vec{F} \cdot \text{rot } \vec{V} &= t_1 t_2 du_1 du_2 (\text{rot } \vec{V})_3 \\ &= [V_1(u_2 \dots) t_1(u_2 \dots) - V_1(u_2 + du_2 \dots) t_1(u_2 + du_2 \dots)] du_1 \\ &\quad + [-V_2(u_1 \dots) t_2(u_1 \dots) + V_2(u_1 + du_1 \dots) t_2(u_1 + du_1 \dots)] du_2 \\ &= \boxed{(\text{rot } \vec{V})_3 = \frac{1}{t_1 t_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (V_2 t_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (V_1 t_1) \right]} \end{aligned}$$

wobei die vier Beiträge von den Rechtecksseiten kommen. Weitere Komponenten von  $\text{rot } \vec{V}$  erhält man durch zyklische Vertauschung von (123) [d.h. (231) oder (312)]. Die Rotation kann kompakt als "Determinante" geschrieben werden:

$$\text{rot } \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ t_2 t_3 & t_1 t_3 & t_1 t_2 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ V_1 t_1 & V_2 t_2 & V_3 t_3 \end{vmatrix}$$

Zur Kontrolle

$$\begin{aligned} (\text{rot grad } F)_1 &= \frac{1}{t_2 t_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} \left( t_3 \frac{1}{t_3} \frac{\partial F}{\partial u_3} \right) - \frac{\partial}{\partial u_3} \left( t_2 \frac{1}{t_2} \frac{\partial F}{\partial u_2} \right) \right] = 0 \\ \text{div rot } \vec{V} &= \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (V_3 t_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (V_2 t_2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (V_1 t_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (V_3 t_3) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (V_2 t_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (V_1 t_1) \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Im Fall der Zylinderkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{t}_\rho &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_\rho, \quad t_\rho = 1, \quad \vec{t}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \vec{e}_\varphi, \\ t_\varphi &= \rho, \quad \vec{t}_z = \vec{e}_z, \quad t_z = 1 \end{aligned}$$

Das Vektorfeld  $\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\varphi \vec{e}_\varphi + V_z \vec{e}_z$  hat die Divergenz

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (V_\rho \rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} V_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} (V_z \rho) \right] = \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{V_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Im Fall der Kugelkoordinaten hat man die Maßfaktoren

$$\begin{aligned} t_r &= 1, & t_\vartheta &= r, & t_\varphi &= r \sin \vartheta \\ \operatorname{div} \vec{V} &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \vartheta V_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta V_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r V_\varphi) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta V_\vartheta) + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

Der Laplaceoperator in Kugelkoordinaten lautet somit

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left[ \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right] \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

wobei der Winkelanteil den Laplaceoperator auf der Einheitskugel  $S^2$  bezeichnet. Es gilt die Darstellung als „Drehimpulsquadrat“

$$\Delta_{S^2} = (\vec{r} \times \vec{\nabla})^2$$

Rotation in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{V} &= \vec{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta V_\varphi) - \frac{\partial V_\vartheta}{\partial \varphi} \right] + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \right] \\ &\quad + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r V_\vartheta) - \frac{\partial V_r}{\partial \vartheta} \right] \end{aligned}$$

Berechne in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \Psi &= \vec{r} \cdot \operatorname{rot} [\vec{r} \times \operatorname{grad} \Psi] \\ &= \vec{r} \cdot \operatorname{rot} \left[ \vec{e}_\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} V_\varphi &= \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, & V_\vartheta &= -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \\ (\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 \Psi &= r \left[ \operatorname{rot} (\vec{r} \times \vec{\nabla} \Psi) \right]_r = \frac{1}{\sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right] = \Delta_{S^2}(\vartheta, \varphi) \Psi \end{aligned}$$

## 2 Helmholtz'sches Theorem

Ein (hinreichend schnell für  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$  abfallendes) Vektorfeld  $\vec{W}(\vec{r})$  kann aus seiner Quelledichte  $\rho(\vec{r}) = \operatorname{div} \vec{W}(\vec{r})$  und seiner Wirbeldichte  $\vec{g}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{W}(\vec{r})$  folgendermaßen **eindeutig** berechnet werden:

$$\begin{aligned}\vec{W}(\vec{r}) &= -\operatorname{grad}_{\vec{r}} \left[ \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] + \operatorname{rot}_{\vec{r}} \left[ \int d^3 r' \frac{\vec{g}(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] \\ &= \vec{W}_1(\vec{r}) + \vec{W}_2(\vec{r}), \\ \vec{W}_1(\vec{r}) &= -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}), \quad \vec{W}_2(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})\end{aligned}$$

Ausgangspunkt für die Ableitung ist die Formel:

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

und die „triviale“ Darstellung

$$\vec{W}(\vec{r}) = \int d^3 r' \vec{W}(\vec{r}') \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') = -\Delta_{\vec{r}} \int d^3 r' \frac{\vec{W}(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Mit  $-\Delta = -\operatorname{grad} \operatorname{div} + \operatorname{rot} \operatorname{rot}$  erhält man:

$$\varphi(\vec{r}) = \operatorname{div}_{\vec{r}} \int d^3 r' \frac{\vec{W}(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int \frac{d^3 r'}{4\pi} \vec{W}(\vec{r}') \cdot \operatorname{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Mit  $\vec{\nabla}_{\vec{r}} |\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} |\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$  und der Formel

$$\operatorname{div}(\vec{u}f) = (\operatorname{div} \vec{u})f + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} f$$

wird hieraus

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{d^3 r'}{4\pi} \left\{ \operatorname{div}_{\vec{r}'} \frac{\vec{W}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \operatorname{div}_{\vec{r}'} \left( \frac{\vec{W}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right\}$$

Mit dem Gaußschen Satz ergibt der zweite Term ein Oberflächenintegral, welches verschwindet, wenn  $r'^2 \left| \vec{W}(\vec{r}') \right| \frac{1}{r'} \xrightarrow{r' \rightarrow \infty} 0$ , d.h.  $\vec{W}(\vec{r}') \approx r'^{-1-\varepsilon}$ . Ebenso erhalten wir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \operatorname{rot}_{\vec{r}} \int \frac{d^3 r'}{4\pi} \frac{\vec{W}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int \frac{d^3 r'}{4\pi} \vec{W}(\vec{r}') \times \operatorname{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

und mit der Formel

$$\operatorname{rot}(f\vec{u}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{u} + f \operatorname{rot} \vec{u}$$

bezüglich  $\vec{r}'$  folgt hieraus

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{d^3 r'}{4\pi} \left[ \operatorname{rot}_{\vec{r}'} \frac{\vec{W}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \operatorname{rot}_{\vec{r}'} \left( \frac{\vec{W}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right]$$

Der zweite Term kann in ein (verschwindendes) Oberflächenintegral überführt werden.

$$\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{e}) = \vec{e} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} \quad \text{für jeden konstanten Vektor } \vec{e}$$

$$\int dV \operatorname{rot} \vec{u} = \oint_{\partial V} d\vec{F} \times \vec{u}$$

### Variante des Helmholtz'schen Satzes

Im Volumen  $V$  seien die Quelledichte  $\rho = \operatorname{div} \vec{W}$  und die Wirbeldichte  $\vec{g} = \operatorname{rot} \vec{W}$  gegeben. Zudem seien die Werte des Vektorfeldes  $\vec{W}$  auf der Randfläche  $F = \partial V$  vorgegeben. Dann ist das Vektorfeld  $\vec{W}(\vec{r})$  für  $\vec{r} \in V$  eindeutig bestimmt.

$$\vec{W}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) + \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \quad \vec{r} \in V$$

mit

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} - \oint_F d\vec{F}' \cdot \frac{\vec{W}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und

$$\vec{A}(\vec{r}') = \int_V dV'' \frac{\vec{g}(\vec{r}'')}{4\pi} - \oint_F d\vec{F}'' \times \frac{\vec{W}(\vec{r}'')}{4\pi |\vec{r}' - \vec{r}''|}$$

## 3 Aufgabe 1: Potential, Feld, Energie einer radialsymmetrischen Ladungsverteilung

Die Gesamtladung  $Q$  sei radialsymmetrisch und exponentiell abfallend  $\sim e^{-r/a}$  im Raum verteilt. Berechnen Sie das elektrostatische Potential  $\varphi(\vec{r})$ , das elektrische Feld  $E(r)\vec{e}_r$  und die im Feld gespeicherte Energie  $W$ .

$$Q = 4\pi\rho_0 \int_0^\infty dr r^2 e^{-r/a} = 4\pi\rho_0 a^3 \underbrace{\int_0^\infty d\xi \xi^2 e^{-\xi}}_{=2!}$$

nach der Substitution  $r = \xi a$ .

$$\rho_0 = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^3}$$



Mit dem Gaußschen Satz ergibt sich

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^r dr' r'^2 \rho_0 e^{-r'/a}$$

$$E(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^3 r^2} \left[ -a(r'^2 + 2ar' + 2a^2)e^{-r'/a} \right]_{r'=0}^{r'=r}$$

Somit lautet die elektrische Feldstärke

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{r}{a} + \frac{r^2}{2a^2} \right) e^{-r/a} \right]$$

Das zugehörige Potential  $E(r) = -\varphi'(r)$  ergibt sich zu

$$\varphi(r) = \int_r^\infty dr' E(r') = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{r}{2a} \right) e^{-r/a} \right]$$

Alternativ kann man die Poissongleichung lösen  $(r\varphi' + \varphi)' = r\varphi'' + 2\varphi'$

$$\Delta\varphi = \varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\varphi(r)) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} e^{-r/a} \quad \Big| \cdot r$$

$$\frac{d}{dr}(r\varphi(r)) = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} (r+a)e^{-r/a}, \quad r\varphi(r) = -\frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0} \left[ (2a+r)e^{-r/a} - 2a \right]$$

Damit  $\varphi(0)$  endlich ist, muss die Konstante  $2a$  subtrahiert werden. Man erhält:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{r}{2a} \right) e^{-r/a} \right]$$

Die im  $\vec{E}$ -Feld gespeicherte Arbeit berechnet sich aus der Energiedichte  $w(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2$

$$W = 2\pi\varepsilon_0 \int_0^\infty dr r^2 E(r)^2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty dr \frac{1}{r} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{r}{a} + \frac{r^2}{2a^2} \right) e^{-r/a} \right]^2 \quad (\text{subst.: } r = ax)$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2} \left[ 1 - \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} \right) e^{-x} \right]^2$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \left\{ -\frac{1}{x} + \left( 1 + \frac{2}{x} \right) e^{-x} + \left( x^2 + 5x + \frac{21}{2} + \frac{8}{x} \right) \frac{e^{-2x}}{8} \right\}_0^\infty$$

Die Auswertung bei  $x = \infty$  und  $x = 0$  ergibt

$$0 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ -1 + 2e^{-x} - e^{-2x} \right] - 1 + \frac{21}{16} = \frac{5}{16}$$

Die L'Hospital Regel bestimmt den Grenzwert als  $\frac{-2+2}{1} = 0$ .

$$W = \frac{5Q^2}{128\pi\epsilon_0 a} = \frac{\alpha Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{5}{32} = 0,15625 \quad \alpha_{\text{Vollkugel}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

**Nebenrechnung:**

$$\int_0^{\infty} d\xi \xi^2 e^{-\xi} = -\xi^2 e^{-\xi} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} d\xi 2\xi e^{-\xi} = -2\xi e^{-\xi} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} d\xi 2e^{-\xi} = 2!$$

allgemein:  $\int_0^{\infty} d\xi \xi^n e^{-\xi} = n!$

## 4 Aufgabe 2: Homogen geladener, dünner Stab

Die Ladungsdichte eines dünnen, homogen geladenen Stabs (Ladung  $q$  und Länge  $2a$ ) ist

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{2a} \delta(x) \delta(y) \vartheta(a - |z|)$$

Wegen der axialen Symmetrie hängt  $\varphi(\vec{r})$  nur von  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $z$  ab:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, z) &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \int_{-a}^a dz' [x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \left[ -\ln \left( \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} + z - z' \right) \right]_{z'=-a}^{z'=a} \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(\rho, z) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + (z + a)^2} + z + a}{\sqrt{\rho^2 + (z - a)^2} + z - a}}$$

Auf den Äquipotentialflächen gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^2 + (z+a)^2} + z + a &= c \left( \sqrt{\rho^2 + (z-a)^2} + z - a \right), \\ \left( \sqrt{\rho^2 + (z+a)^2} - c\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2} \right)^2 - [z - (c-1) - a(c+1)]^2 &= 0, \\ \sqrt{\rho^2 + (z+a)^2} \sqrt{\rho^2 + (z-a)^2} &= z^2 - a^2 + \frac{\rho^2}{2c}(1+c^2), \quad \left| \frac{1}{\rho^2} \right. \\ a^2 \left( c + 2 + \frac{1}{c} \right) &= \frac{\rho^2}{4} \left( c^2 - 2 + \frac{1}{c^2} \right) + z^2 \left( c - 2 + \frac{1}{c} \right), \\ \left[ a \left( \sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) \right]^2 &= \left[ \frac{\rho}{2} \left( c - \frac{1}{c} \right) \right]^2 + \left[ z \left( \sqrt{c} - \frac{1}{\sqrt{c}} \right) \right]^2, \\ \frac{c - \frac{1}{c}}{\sqrt{c} + \frac{1}{c}} = \sqrt{c} - \frac{1}{c}, \quad \frac{\sqrt{c} - \frac{1}{\sqrt{c}}}{\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}} &= \frac{c-1}{c+1} \\ \boxed{\left( \frac{c-1}{2a\sqrt{c}\rho} \right)^2 + \left( \frac{c-1}{a(c+1)} z \right)^2} &= 1 \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt Rotationsellipsoide mit der Halbachse  $b_\rho = 2a\sqrt{c}/|c-1|$  in  $\rho$ -Richtung und der Halbachse  $b_z = a(c+1)/|c-1|$  in  $z$ -Richtung

$$\begin{aligned} b_\rho < b_z, \quad \text{denn } 2\sqrt{c} < c+1, \quad 4c < c^2 + 2c + 1 \\ \Rightarrow 0 < c^2 - 2c + 1 &= (c-1)^2 \end{aligned}$$

Wegen  $b_z^2 - b_\rho^2 = a^2$  handelt es sich um konfokale Ellipsen.

Für Feldlinien gilt  $d\vec{r} \parallel \vec{E}(\vec{r})$ . Das elektrische Feld hat die Komponenten:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= 0 \\ E_\rho &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \left[ \frac{\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2} + z - a} - (a \rightarrow -a) \right] \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a\rho} \left[ \frac{\rho^2 + (z-a)^2 - (z-a)^2}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2} \left( \sqrt{\rho^2+(z-a)^2} + z - a \right)} - (a \rightarrow a) \right] \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a\rho} \left[ \frac{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2} - z + a}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} - (a \rightarrow -a) \right] \\ \boxed{E_\rho} &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a\rho} \left[ \frac{z+a}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}} - \frac{z-a}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} \right] \end{aligned}$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \left[ \frac{\frac{z-a}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} + 1}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2} + z-a} - (a \rightarrow -a) \right]$$

$$E_z = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}} \right]$$

Längs der Feldlinien gilt  $(d\rho, dz) \parallel (E_\rho, E_z)$  oder  $E_z d\rho - E_\rho dz = 0$

Wir werden diese DGL durch Multiplikation mit einem integrierenden Faktor  $g(\rho)$  lösen:

$$dF(\rho, z) = g(\rho)E_z d\rho - g(\rho)E_\rho dz = 0, \quad \Rightarrow F(\rho, z) = \text{const.}$$

Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial z} [g(\rho)E_z] + \frac{\partial}{\partial \rho} [g(\rho)E_\rho] = 0,$$

$$g(\rho)\frac{\partial E_z}{\partial z} + g'(\rho)E_\rho + g(\rho)\frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} = 0$$

Mit  $\text{div } \vec{E} = 0 = \frac{\partial E_\rho}{\partial \rho} + \frac{E_\rho}{\rho} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$  vereinfacht sich zu

$$g'(\rho)E_\rho - g'(\rho)\frac{E_\rho}{\rho} \quad \text{oder} \quad \frac{g'(\rho)}{g(\rho)} = \frac{1}{\rho}$$

mit der Lösung  $g(\rho) = \rho$ . Setze nun  $F(\rho, z) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} f(\rho, z)$  und es folgt mit  $g(\rho) = \rho$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z-a}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} - \frac{z+a}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}}$$

Der zweite Term entsteht durch die Ergänzung  $-(a \rightarrow -a)$ . Die zugehörige Stammfunktion ist

$$f(\rho, z) = \sqrt{\rho^2+(z-a)^2} - \sqrt{\rho^2+(z+a)^2}$$

Die Gleichung der Feldlinien in der  $\rho z$ -Ebene lautet

$$\sqrt{\rho^2-(z-a)^2} - \sqrt{\rho^2+(z+a)^2} = -2ad, \quad \text{mit } |d| < 1$$

$$\sqrt{\rho^2+(z+a)^2} = -\frac{z}{d} - ad \quad \Bigg|^2$$

$$\rho^2 + z^2 \left(1 - \frac{1}{d^2}\right) = a^2(d^2 - 1)$$

$$\left[ \left(\frac{z}{ad}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{a(\sqrt{1-d^2})}\right)^2 \right] = 1$$

Es handelt sich um Hyperbeln.

Die im  $\vec{E}$ -Feld gespeicherte Energie berechnet sich zu

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \vec{E}^2 = 2\pi\varepsilon_0 \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^\infty dz [E_\rho^2 + E_z^2] \\ &= \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 a} \left[ \underbrace{4 \ln 2}_{\text{von } z>a, \rho>0} + 4 \underbrace{(\ln 2 - 1 - \ln \kappa)}_{\text{von } 0<z<a, \rho>\kappa a} \right] \quad (\text{numerisch berechnet}) \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} (2 \ln 2 - 1 - \ln \kappa) \end{aligned}$$

Der Term  $\ln \kappa$  divigiert logarithmisch bei radialer Annäherung an den Stab bis  $\rho_{\min} = a\kappa$ . Alternativ kann  $W$  aus der Ladungsdichte berechnet werden:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 a} \int_{-1}^1 d\xi \int_{-1}^1 d\xi' \frac{1}{|\xi - \xi'|}$$

Der Überlapp bei Verschiebung der beiden Intervalle  $[-1, 1]$  um  $b$  ist  $2 - |b|$  mit  $-2 < b < 2$ . Man erhält die Reduktionsformel:

$$\int_{-1}^1 d\xi \int_{-1}^1 d\xi' f(|\xi - \xi'|) = 2 \int_0^2 db (2 - b) f(b)$$

In unserem Fall ergibt sich

$$2 \int_{\kappa}^2 db \frac{2-b}{b} = 4(\ln 2 - 1 - \ln \kappa + \kappa)$$

, was konsistent mit dem Ergebnis der vorherigen Rechnung ist. Die Coulombenergie eines homogen geladenen Zylinders ist gegeben durch

$$\begin{aligned} W &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(\pi h R^2)^2} \int_{\text{Zylinder}} d^3r \int_{\text{Zylinder}} d^3r' |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \\ W(s) &= \frac{4Q^2}{\pi^2\varepsilon_0 h} \int_0^1 dx x (\arccos x - x\sqrt{1-x^2}) \left[ sx - \sqrt{1+s^2x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{1+s^2x^2}}{sx} \right] \end{aligned}$$

mit dem Verhältnis  $s = 2\frac{R}{h}$  von Radius  $R$  und Höhe  $h$ . Für kleine  $s$  hat das Integral die Entwicklung

$$\frac{\pi}{16} \left\{ 2 \ln 2 - \frac{3}{4} - \ln s + \frac{64s}{45\pi} - \frac{s^2}{16} + O(s^4) \right\}$$

Welche sphärischen Multipolmomente hat die vorgegebene Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q}{2a} \delta(x) \delta(y) \Theta(a - |z|) ?$$

$$\begin{aligned} Q_{lm} &= \int d^3r \rho(\vec{r}) r^l Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = \frac{q}{2a} \delta_{m0} \int_{-a}^a dz |z|^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\text{sign}(z)) \\ &= \frac{q}{2a} \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_{-a}^a dz z^l \end{aligned}$$

wobei  $P_l(1) = 1$ ,  $P_l(-1) = (-1)^l$  benutzt wurde. Für ungerade  $l$  verschwindet das Integral und für gerade  $l$  erhält man

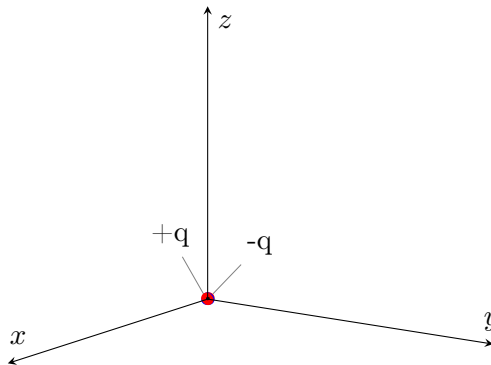
$$Q_{2l,0} = \frac{q \sqrt{4l+1} a^{2l}}{\sqrt{4\pi} (2l+1)}$$

Die Fernfeldentwicklung des Potentials des geladenen Stabs schreibt sich in der Form

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{2l}}{r^{2l+1}} \frac{P_{2l}(\cos \vartheta)}{2l+1} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{r \cos \vartheta + a + \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \vartheta}}{r \cos \vartheta - a + \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \vartheta}}$$

### 5 Aufgabe 3: Potential eines Würfels

An den 8 Ecken eines Würfels der Kantenlänge  $2a$  sind abwechselnd Punktladungen  $+q$  und  $-q$  angebracht. Berechnen Sie das asymptotische Verhalten des Potentials in großer Entfernung. Was ergibt sich umgekehrt in der Umgebung des Würfelmittelpunkts?



$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\nu=1}^8 \frac{q_{\nu}}{|\vec{r} - \vec{r}_{\nu}|} \\ |\vec{r} - \vec{r}_{\nu}|^2 &= r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_{\nu} + 3a^2 = r^2 - 2ar s_{\nu} + 3a^2 \end{aligned}$$

Der reziproke Abstand ist

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_\nu|} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2a}{r} s_\nu + \frac{3a^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

und die Taylorentwicklung

$$(1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} - \frac{5t^3}{16} + \dots$$

ergibt

$$\frac{q_\nu}{|\vec{r} - \vec{r}_\nu|} = \frac{q_\nu}{r} \left\{ 1 + s_\nu \frac{a}{r} + \frac{3}{2} (s_\nu^2 - 1) \frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{2} (5s_\nu^3 - 9s_\nu) \frac{a^3}{r^3} + \dots \right\}.$$

Nach den Summationen

$$\sum_{\nu=1}^8 q_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^8 q_\nu s_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^8 q_\nu s_\nu^2 = 0, \quad \sum_{\nu=1}^8 q_\nu s_\nu^3 = 48q \frac{xyz}{r^3}$$

erhalten wir

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{5 \cdot 48q \cdot xyz \cdot a^3}{2 \cdot r^3 \cdot r^4} = \frac{30qa^3}{\pi\epsilon_0} \frac{xyz}{r^7}$$

in Kugelkoordinaten:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{30qa^3}{\pi\epsilon_0} \frac{\sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi}{r^4}$$

Wir drücken nun die Winkelabhängigkeit durch Kugelflächenfunktionen aus und erkennen  $|m| = 2$  und  $l = 3$

$$\begin{aligned} P_3(\xi) &= \frac{1}{2} (5\xi^3 - 3\xi), \quad P_3^{(2)}(\xi) = 15\xi \\ \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi &= \frac{1}{30} P_3^{(2)}(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi \\ &= \frac{i}{60} P_3^{(2)}(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta (e^{-2i\varphi} - e^{2i\varphi}) \\ &= \frac{i}{60} \sqrt{\frac{4\pi \cdot 5!}{7 \cdot 1!}} [Y_{3,-2}(\vartheta, \varphi) - Y_{3,2}(\vartheta, \varphi)] \\ &= i \sqrt{\frac{2\pi}{105}} [Y_{3,-2}(\vartheta, \varphi) - Y_{3,2}(\vartheta, \varphi)] \end{aligned}$$

Das Potential schreibt sich

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{7\epsilon_0 r^4} 2iqa^3 \sqrt{\frac{210}{\pi}} [Y_{3,-2}(\vartheta, \varphi) - Y_{3,2}(\vartheta, \varphi)]$$

und die führenden sphärischen Multipolmomente sind somit

$$Q_{32} = -Q_{3,-2} = -2iqa^3 \sqrt{\frac{210}{\pi}}$$

In der Nähe des Würfelmittelpunkts gilt die Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}|} &= \frac{1}{\sqrt{3}a} \left( 1 - \frac{2r}{3a} s_\nu + \frac{r^2}{3a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{q_\nu}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}|} &= \frac{q_\nu}{\sqrt{3}a} \left\{ 1 + s_\nu \frac{r}{3a} + \frac{1}{6} (s_\nu^2 - 1) \frac{r^2}{a^2} + \frac{1}{54} (5s_\nu^3 - 9s_\nu) \frac{r^3}{a^3} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für  $|\vec{r}| \ll a$ :

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{5}{54\sqrt{3}a^4} 48qxyz = \frac{10\sqrt{3}q}{27\pi\epsilon_0 a^4} xyz$$

## 6 Aufgabe 4: Zweidimensionales Potential und Summation einer Fourierreihe

Wir suchen Lösungen der zweidimensionalen Laplacegleichung

$$\Delta_2 \Phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y) = 0$$

durch einen Separationsansatz.

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = X(x)Y(y), \quad X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= 0 \end{aligned}$$

$X''(x) = -\alpha^2 X(x)$  wird von  $X(x) = e^{\pm i\alpha x}$  und  $Y''(y) = \alpha^2 Y(y)$  von  $Y(y) = e^{\pm \alpha y}$  gelöst. Die Randbedingung  $\Phi(0, y) = 0 = \Phi(a, y)$  schränken die  $X(x)$  ein auf  $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ .

Der Ansatz zur Lösung des Randwertproblems  $\Phi(x, 0) = U$  lautet

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$



Die Koeffizienten  $c_n$  sind bestimmt durch

$$\begin{aligned}\Phi(x, 0) = U &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\pi n x}{a} \\ -\frac{Ua}{\pi m} \cos \frac{\pi m x}{a} \Big|_{x=0}^{x=a} &= \frac{Ua}{\pi m} (1 - (-1)^m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^a dx \left[ \cos \frac{\pi(n-m)x}{a} - \cos \frac{\pi(n+m)x}{a} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n a}{2} \delta_{mn} = \frac{a}{2} c_m\end{aligned}$$

Es gilt:  $c_n = \frac{4U}{\pi n}$  für ungerades  $n$ ,  $c_n = 0$  für gerades  $n$ . Es ergibt sich für  $0 < z < \pi$  die Identität

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)z}{2n+1}$$

Setze für den Nachweis  $e^{iz} = \zeta$ .

$$\operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n - (-\zeta)^n}{n}$$

was jeweils eine logarithmische Reihe darstellt. Dies ergibt weiterhin

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \operatorname{Im} [-\ln(1-\zeta) + \ln(1+\zeta)] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \ln \frac{1 + \cos \zeta + i \sin \zeta}{1 - \cos \zeta - i \sin \zeta} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \ln \frac{\sin^2 \zeta - \sin^2 \zeta + 2i \sin \zeta}{(1 - \cos \zeta)^2 + \sin^2 \zeta} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \ln \frac{i \sin \zeta}{1 - \cos \zeta} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \ln (e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \text{reell positiv}) = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Nun können wir die Reihe für das Potential im Bereich  $0 < x < a, y > 0$  aufsummieren, wobei  $z = e^{\pi n(ix-y)/a}$  gesetzt wird.

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \frac{4U}{\pi} \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n} \operatorname{Im} e^{\pi(ix-y)/a} = \frac{4U}{\pi} \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{z^n}{n} = \frac{2U}{\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{1+z}{1-z} \\ &= \frac{2U}{\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{(1+z)(1-z^*)}{|1-z|^2}\end{aligned}$$

Mit der folgenden Nebenrechnung

$$1 - |z|^2 + 2i \operatorname{Im} z = 1 - e^{-2\pi y/a} + 2i \sin \frac{\pi x}{a} e^{-\pi y/a} = 2e^{-\pi y/a} \left[ \sinh \frac{\pi y}{a} + i \sin \frac{\pi x}{a} \right]$$

erhält man das Ergebnis

$$\Phi(x, y) = \frac{2U}{\pi} \arctan \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\sinh \frac{\pi y}{a}}$$

Auf Äquipotentiallinien gilt  $\Phi(x, y) = \text{const.}$ , somit

$$y = \frac{a}{\pi} \operatorname{arsinh} \left( c \sin \frac{\pi x}{a} \right) = \frac{a}{\pi} \ln \left[ c \sin \frac{\pi x}{a} + \sqrt{c^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} + 1} \right]$$

Die elektrischen Feldkomponenten berechnen sich zu

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{2U}{\pi} \frac{\frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} / \sinh \frac{\pi y}{a}}{1 + \sin^2 \frac{\pi x}{a} / \sinh^2 \frac{\pi y}{a}}$$

$$E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2U}{\pi} \frac{-\frac{\pi}{a} \cosh \frac{\pi y}{a} \sin \frac{\pi x}{a} / \sinh^2 \frac{\pi y}{a}}{1 + \sin^2 \frac{\pi x}{a} / \sinh^2 \frac{\pi y}{a}}$$

Längs der Feldlinien gilt die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = -\frac{\tan \frac{\pi x}{a}}{\tanh \frac{\pi y}{a}}$$

Diese DGL hat getrennte Variablen

$$\frac{\pi}{a} \tanh \frac{\pi y}{a} dy = -\frac{\pi}{a} \tan \frac{\pi x}{a} dx$$

$$\ln \cosh \frac{\pi y}{a} = \ln \left| \cos \frac{\pi x}{a} \right| + \text{const.}$$

$$\cosh \frac{\pi y}{a} = \gamma \left| \cos \frac{\pi x}{a} \right| \quad \text{mit } \gamma > 1$$

$$y = \frac{a}{\pi} \ln \left[ \gamma \left| \cos \frac{\pi x}{a} \right| + \sqrt{\gamma^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} - 1} \right]$$

Die Influenzladungsdichten auf den Metallplatten sind ( $U > 0$ ):

i) auf der Bodenplatte bei  $y = 0$  ( $\vec{n} = \vec{e}_y$ ):

$$\sigma_{\text{Boden}}(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \varepsilon_0 E_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon_0 U}{a} \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \cosh \frac{\pi y}{a}}{\sin^2 \frac{\pi x}{a} + \sinh^2 \frac{\pi y}{a}} = \frac{2\varepsilon_0 U}{a \sin \frac{\pi x}{a}} > 0$$

ii) auf der linken Seitenplatte bei  $x = 0$  ( $\vec{n} = \vec{e}_x$ ):

$$\sigma_{\text{links}}(y) = \varepsilon_0 E_x(0, y) = -\frac{2\varepsilon_0 U}{a \sinh \frac{\pi y}{a}} < 0$$

iii) auf der rechten Seitenplatte bei  $x = a$  ( $\vec{n} = -\vec{e}_x$ ):

$$\sigma_{\text{rechts}}(y) = -\varepsilon_0 E_x(a, y) = -\frac{2\varepsilon_0 U}{a \sinh \frac{\pi y}{a}} = \sigma_{\text{links}}(y)$$

## 7 Aufgabe 5: Felder in der Nähe von Spitzen, Kanten und Ecken

Bekanntlich sind elektrische Felder in der Nähe von Spitzen besonders stark. Zum qualitativen Verständnis betrachten wir zwei geladene Metallkugeln, die miteinander verbunden sind. Das Innere der Kugeln ist  $\vec{E}$ -feldfrei. Die Oberfläche ist eine Äquipotentialfläche. Sei  $R_b \ll R_a$ .

$$\Phi_a = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 R_a} = \Phi_b = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 R_b} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_a}{R_a} = \frac{Q_b}{R_b}$$

Es sei noch die Gesamtladung  $Q = Q_a + Q_b$  vorgegeben.

$$Q = Q_a \left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right), \quad Q_a = \frac{QR_a}{R_a + R_b}, \quad Q_b = \frac{QR_b}{R_a + R_b}$$

Die Feldstärken auf den Oberflächen sind

$$E_a = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 R_a^2}, \quad E_b = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 R_b^2}$$

$$\frac{E_b}{E_a} = \frac{Q_b}{Q_a} \left(\frac{R_a}{R_b}\right)^2 = \frac{R_a}{R_b} \gg 1$$

Die Feldstärke in der Nähe der kleinen Kugel ist sehr groß. Nicht berücksichtigt wurde in dieser rein qualitativen Betrachtung die gegenseitige Beeinflussung der geladenen Kugeln. Bei zwei gleichen Kugeln vom Radius  $a$  mit Mittelpunkten  $(0, 0, \pm a)$  lautet der Ansatz für das axialsymmetrische Potential

$$\Phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{r^{2l+1}} P_{2l}(\cos \vartheta)$$

Die Koeffizienten  $a_l$  sind aus der Randbedingung (bei  $r = 2a \cos \vartheta$ ) zu bestimmen.

Nun soll das  $\vec{E}$ -Feld in der Nähe von Kanten bestimmt werden. In Polarkoordinaten hat der Laplaceoperator die Form

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Wir wählen zur Lösung der Laplacegleichung  $\Delta_2 \Phi = 0$  einen Separationsansatz:  $\Phi(\rho, \varphi) = R(\rho)\Psi(\varphi)$

$$\frac{\rho^2}{R} \left( R'' + \frac{R'}{\rho} \right) + \frac{\Psi''}{\Psi} = 0$$

Die Lösungen lauten  $\Psi(\varphi) = \alpha_\nu \cos(\nu\varphi) + \beta_\nu \sin(\nu\varphi)$ . Mit dem Potenzansatz  $R(\rho) = \rho^\mu$  erhalten wir

$$\rho^{2-\mu} \rho^{\mu-2} [\mu(\mu-1) + \mu] = \nu^2$$

und es folgt

$$R(\rho) = a_\nu \rho^\nu + b_\nu \rho^{-\nu}$$

Im Spezialfall  $\mu = 0$  hat man die Lösungen  $R(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho$ .  
Der Winkelbereich ist auf  $0 \leq \varphi \leq \beta$  eingeschränkt und die Randbedingung für Metallplatten lautet  $\Phi(\rho, 0) = \Phi(\rho, \beta)$ . Ferner soll sich am Ursprung keine Ladung befinden.

$$b_\nu = 0, \quad \nu = \frac{\pi n}{\beta}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\Phi(\rho, \varphi) = U + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^{\pi n/\beta} \sin \frac{\pi n \varphi}{\beta} = U + a_1 \rho^{\pi/\beta} \sin \frac{\pi \varphi}{\beta} + \dots$$

wobei die ersten zwei Terme für kleine  $\rho$  dominieren. Die zugehörigen Felder sind

$$E_\rho = -\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\pi/\beta-1} \sin \frac{\pi \varphi}{\beta}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\pi/\beta-1} \cos \frac{\pi \varphi}{\beta}$$

Die Flächenladungsdichten bei  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \beta$

$$\sigma(\rho, 0) = \varepsilon_0 E_\varphi(\rho, 0) = -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\pi/\beta-1}, \quad \sigma(\rho, \beta) = -\varepsilon_0 E_\varphi(\rho, \beta) = -\frac{\pi a_1}{\beta} \rho^{\pi/\beta-1}$$

sind gleich.

Bei verschiedenen Winkeln nimmt die Feldstärke in der Kante unterschiedlich stark zu:

| Winkel           | Stärke des Feldes                 |
|------------------|-----------------------------------|
| $\frac{\pi}{4}$  | $\rho^3$                          |
| $\frac{\pi}{2}$  | $\rho$                            |
| $\pi$            | 1 (bekannt von der ebenen Platte) |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $\rho^{-\frac{1}{3}}$             |
| $2\pi$           | $\rho^{-\frac{1}{2}}$             |

Für die Kante eines gefalteten Blatts ( $\beta = 2\pi$ ) hat man das singuläre Verhalten

$$E_\rho \sim \rho^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad E_\varphi \sim \rho^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\varphi}{2}$$

Die Influenzladung pro Länge in endlichem Abstand  $\rho$  von der Kante ist wegen

$$\int_0^{\rho_0} d\rho \rho^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\rho_0}$$

endlich. Das  $\vec{E}$ -Feld wird für jede Konfiguration mit  $\beta > \pi$  sehr groß an der Kante:  $E_{\rho,\varphi} \sim \rho^{\pi/\beta-1}$ . In der Nähe der Kante des gefalteten Blatts (mit  $\beta = 2\pi$ ) gilt:

$$\Phi(\rho, \varphi) = U + a_1 \sqrt{\rho} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Auf den Äquipotentiallinien gilt folglich

$$\rho = \frac{c}{\sin^2 \varphi/2} = \frac{2c}{1 - \cos \varphi} \quad \text{Das sind Parabeln}$$

Die Feldlinien sind bestimmt durch

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho d\varphi} &= \frac{E_\rho}{E_\varphi} = \tan \frac{\varphi}{2} & \frac{d\rho}{\rho} &= \tan \frac{\varphi}{2} d\varphi \\ \ln \rho &= \text{const.} - 2 \ln \cos \frac{\varphi}{2} \\ \rho &= \frac{c'}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2c'}{1 + \cos \varphi} \quad \text{und das sind ebenfalls Parabeln.} \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall hat man mit  $\lambda = \frac{\pi}{\beta}$

$$\rho^\lambda \sin \lambda \varphi = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \text{Äquipotentiallinien } \rho = c |\sin \lambda \varphi|^{-1/\lambda}$$

Daraus ergeben sich die Feldlinien über

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= \tan \lambda \varphi d\varphi, \quad \ln \rho = \text{const.} - \frac{1}{\lambda} \ln \cos \lambda \varphi \\ \rho &= c' |\cos \lambda \varphi|^{-1/\lambda} \end{aligned}$$

## 8 Aufgabe 6: Thomson'scher Satz

Es seien  $n$  Leiter mit Volumina  $V_i$  vorhanden, deren räumliche Anordnung und Ladungen  $Q_i$  vorgegeben seien.

Außerhalb der Leiter befinde sich eine feste äußere Ladungsdichte  $\rho_a(\vec{r})$ , welche das Potential  $\Phi_a(\vec{r})$  erzeugt.

Die potentielle Energie dieser Anordnung ist gegeben durch:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^n \int_{V_i} dV \int_{V_j} dV' \frac{\rho_i(\vec{r})\rho_j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \sum_{i=1}^n \int_{V_i} dV \rho_i(\vec{r}) \Phi_a(\vec{r})$$

Die vorgegebenen Gesamtladungen in den einzelnen Leitern sind:

$$Q_i = \int_{V_i} dV \rho_i(\vec{r})$$

Wir minimieren die Energie  $W$  durch Variation der Ladungsdichten  $\rho_i(\vec{r})$  bei festgehaltenen Ladungen  $Q_i$ . Die zu den Nebenbedingungen gehörenden Lagrange-Multiplikatoren seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Variation:  $\rho_i(\vec{r}) \mapsto \rho_i(\vec{r}) + \varepsilon_i \eta_i(\vec{r})$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \left( W - \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i \right) \Bigg|_{\text{alle } \varepsilon_l = 0} \\ &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i,j=1}^n \int_{V_i} dV \int_{V_j} dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} [\delta_{ik} \eta_i(\vec{r}) \rho_j(\vec{r}') + \delta_{jk} \rho_i(\vec{r}) \eta_j(\vec{r}')] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{V_i} dV \delta_{ik} \eta_i(\vec{r}) \Phi_a(\vec{r}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{V_i} dV \delta_{ik} \eta_i(\vec{r}) \\ &= \int_{V_k} dV \eta_k(\vec{r}) \left[ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^n \int_{V_j} dV' \frac{\rho_j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \Phi_a(r) - \lambda_k \right] \end{aligned}$$

Die Bedingung für  $\vec{r} \in V_k, k = 1, \dots, n$  lautet:

$$\Phi_a(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^n \int_{V_j} dV' \frac{\rho_j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \lambda_k \quad (\text{konstant})$$

Das äußere Potential in  $V_k$  plus das Potential aller Ladungsdichten  $\rho_j$  in  $V_j$  ist konstant. Die Konfiguration minimaler (potentieller) Energie ist also diejenige, bei der sich die Ladungen in den Leitern so verteilen, dass in jedem Leiter ein konstantes Potential vorherrscht.

Die ist physikalisch einleuchtend, denn die Ladungen innerhalb der Leiter werden sich so verteilen, dass diese kräftefrei sind.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \quad \text{für } \vec{r} \in V_i, \\ \rho(\vec{r}) &= \text{div } \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \in V_i \end{aligned}$$

Die Ladungen  $Q_i$  sammeln sich auf den Oberflächen  $F_i = \partial V_i$

## 9 Aufgabe 7: Draht neben geerdetem Zylinder

Vor einem geerdeten Metallzylinder befinde sich (parallel ausgerichtet) ein gerader, homogener geladener Draht. Der Draht habe von der Symmetrieachse des Zylinders (der  $z$ -Achse) den

Abstand  $r_0$  und der Zylinder habe den Radius  $R$ . Es bezeichne  $\lambda_s$  die Spiegelladung pro Länge mit dem Ansatz  $\lambda_s = \alpha\lambda$ . Der Abstand der Spiegelladung von der Symmetrieachse sei  $r_s$  mit  $r_s < R < r_0$ .

Für das  $\vec{E}$ -Feld in Abwesenheit des Metallzylinders ergibt der Gauß'sche Satz für einen Zylinder mit Radius  $r$  und Höhe  $h$  den Zusammenhang:

$$2\pi r h E_0(r) = \frac{h\lambda}{\varepsilon_0}, \quad E_0(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Nach Verschiebung auf der  $x$ -Achse um  $r_0$ :

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \begin{pmatrix} x - r_0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(x - r_0)^2 + y^2}$$

Nach Addition des  $\vec{E}$ -Feldes des mit  $\lambda_s = \alpha\lambda$  geladenen Spiegeldrahts im Abstand  $r_s$  ergibt sich

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{(x - r_0, y, 0)}{(x - r_0)^2 + y^2} + \alpha \frac{(x - r_s, y, 0)}{(x - r_s)^2 + y^2} \right\}$$

Auf dem Zylinder hat man den Tangentialvektor

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \frac{1}{R}$$

und den Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \frac{1}{R}$$

Es gilt die Bedingung  $\vec{t} \cdot \vec{E} = 0$  auf  $x^2 + y^2 = R^2$

$$\frac{1}{R} \left\{ \frac{-xy + r_0 y + xy}{R^2 + r_0^2 - 2r_0 x} + \alpha \frac{-xy + r_s y + xy}{R^2 + r_s^2 - 2r_s x} \right\} = 0,$$

$$r_0 (R^2 + r_s^2 - 2xr_s) + \alpha r_s (R^2 + r_0^2 - 2xr_0) = 0$$

Letzteres gilt für alle  $-R < x < R$ , somit

$$-2r_0 r_s (\alpha + 1) = 0 \quad \boxed{\alpha = -1}$$

Es verbleibt eine quadratische Gleichung für  $r_s$  zu lösen

$$r_0 (R^2 + r_s^2) = r_s (R^2 + r_0^2)$$

$$r_s^2 - r_s \frac{R^2 + r_0^2}{r_0} + R^2 = 0,$$

$$\left( r_s - \frac{R^2 + r_0^2}{2r_0} \right)^2 = \frac{R^4 + 2R^2 r_0^2 + r_0^4 - 4R^2 r_0^2}{4r_0^2}$$

$$r_s = \frac{R^2 + r_0^2 \pm (R^2 - r_0^2)}{2r_0} \quad \boxed{r_s = \frac{R^2}{r_0} < R} \quad r_0 r_s = R^2$$

Die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \frac{R^2}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{komplex } z \mapsto \frac{R^2}{z^*},$$

ist eine „Spiegelung“ am Kreis. Die auf dem geerdeten Metallzylinder influenzierte Flächenladungsdichte berechnet sich zu

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi R} \left\{ \frac{R^2 - xr_0}{R^2 + r_0^2 - 2xr_0} - \frac{R^2 - 2xr_s}{R^2 + r_s^2 - 2xr_s} \right\}$$

Mit der Umformung

$$R^2 + r_s^2 - 2xr_s = R^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2x \frac{R^2}{r_0} = \frac{R^2}{r_0^2} (r_0^2 + R^2 - 2xr_0)$$

wird der gesamte Zähler zu

$$R^2 - r_0x - \frac{r_0^2}{R^2} \left( R^2 - x \frac{R^2}{r_0} \right) = R^2 - r_0^2$$

Man setze noch  $x = R \cos \varphi$  und das Ergebnis lautet

$$\sigma(\varphi) = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{R - r_0^2/R}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \varphi}$$

Die influenzierte Ladung pro Länge berechnet sich durch Integration über den Kreis zu

$$\tilde{\lambda} = \int_0^{2\pi} d\varphi R \sigma(\varphi) = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{(R^2 - r_0^2) 2\pi}{\sqrt{(R^2 + r_0^2) - (2Rr_0)^2}} = -\lambda$$

wobei zur Lösung des Integrals

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{A + B \cos \varphi} = \frac{2\pi \operatorname{sign}(A)}{\sqrt{A^2 - B^2}}$$

benutzt wurde. Wenn der Metallzylinder **isoliert** wird, müssen wir nur die homogene Flächenladungsdichte  $\frac{\lambda}{2\pi R}$  addieren

$$\bar{\sigma}(\varphi) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{R - r_0 \cos \varphi}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \varphi}$$



Das resultierende gesamte  $\vec{E}$ -Feld ist nun:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \frac{(x - r_0, y, 0)}{(x - r_0)^2 + y^2} + \frac{\left(x - \frac{R^2}{r_0}, y, 0\right)}{\left(x - \frac{R^2}{r_0}\right)^2 + y^2} - \frac{(x, y, 0)}{x^2 + y^2} \right\}$$

Die Kraft pro Länge, die vom isolierten Metallzylinder auf den geladenen Draht ausgeübt wird, errechnet sich über

$$\begin{aligned} \frac{\vec{F}}{L} &= - \int_0^{2\pi} d\varphi R \bar{\sigma}(\varphi) \vec{E}_0(x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi) \\ &= \frac{\lambda^2 R}{2\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(r_0 \cos \varphi - R)(R \cos \varphi - r_0, R \sin \varphi, 0)}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \varphi)^2} \sim \vec{e}_x \end{aligned}$$

denn

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(\sin \varphi, \sin \varphi \cos \varphi)}{(a - \cos \varphi)^2} = (0, 0)$$

weil  $\varphi$  und  $2\pi - \varphi$  genau entgegengesetzte Beiträge liefern.

Mittels Partialbruchzerlegung des Integranden bezüglich  $\cos \varphi$  erhält man schließlich

$$\boxed{\frac{\vec{F}}{L} = \frac{\lambda^2}{2\pi \epsilon_0} \frac{-R^2}{r_0 (r_0^2 - R^2)} \vec{e}_x}$$

welche für alle Abstände  $r_0 > R$  anziehend ist. Die verwendete Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{(r_0 \cos \varphi - R)(R \cos \varphi - r_0)}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \varphi)^2} = \frac{1}{4Rr_0} \left[ 1 - \frac{(r_0^2 - R^2)^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \varphi)^2} \right]$$

und das Integral über den zweiten Term wird mit folgender Formel berechnet

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(a - \cos \varphi)^2} = -\frac{d}{da} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{a - \cos \varphi} = -\frac{d}{da} \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi a}{(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

wobei  $a > 1$  ist.

## 10 Aufgabe 8: Potential einer Kugelschale

Auf der Kugelschale  $|\vec{r}| = R$  wird das Potential vorgegeben als

$$\Phi(R, \theta, \varphi) = U_0 \sin \theta \cos \varphi$$

In den Raumbereichen  $r < R$  und  $r > R$  soll keine Ladung vorhanden sein. Man bestimme das elektrostatische Potential  $\Phi(r, \theta, \varphi)$  im ganzen Raum.

$\Delta\Phi = 0$  hat in Kugelkoordinaten die Lösungen

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Die Randwerte für  $r < R$  hat man  $a_{lm} \neq 0, b_{lm} = 0$  und für  $r > R$  hat man  $a_{lm} = 0, b_{lm} \neq 0$ .

Die Randwerte bei  $r = R$  liefern

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} R^l Y_{lm}(\theta, \varphi) &= U_0 \sin \theta \cos \varphi = \frac{U_0}{2} \sin \theta (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} (-Y_{11} + Y_{1,-1}) \\ \Rightarrow a_{11} &= -\frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{2\pi}{3}}, \quad a_{1,-1} = \frac{U_0}{R} \sqrt{\frac{2\pi}{3}}, \quad a_{lm} = 0 \text{ sonst} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi_{<}(r, \theta, \varphi) = U_0 \frac{r}{R} \sin \theta \cos \varphi}$$

Für  $r > R$  erhält man ganz analog

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{b_{lm}}{R^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= U_0 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (-Y_{11} + Y_{1,-1}) \\ b_{11} &= -b_{1,-1} = -U_0 R^2 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

und

$$\boxed{\Phi_{>}(r, \theta, \varphi) = U_0 \frac{R^2}{r^2} \sin \theta \cos \varphi}$$

Die auf der Kugelschale vorhandene Flächenladungsdichte ist

$$\begin{aligned}\sigma &= \varepsilon_0 \vec{e}_r \cdot (\vec{E}_> - \vec{E}_<) \\ \sigma &= -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} (\Phi_> - \Phi_<)_{r=R} = -\varepsilon_0 U_0 \sin \theta \cos \varphi \left( -\frac{2R^2}{r^3} - \frac{1}{R} \right)_{r=R}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma = 3\varepsilon_0 \frac{U_0}{R} \sin \theta \cos \varphi}$$

Die Gesamtladung auf der Kugel ist demnach

$$Q = R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sigma = 0$$

und das elektrische Dipolmoment hat den Wert:

$$\vec{p} = 3\varepsilon_0 U_0 R^2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \cos \varphi \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = 4\pi \varepsilon_0 U_0 R^2 \vec{e}_x$$

wobei für die Lösung des nicht verschwindenden Integrals die Identität

$$\pi \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi^2) = \pi \left( 2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4\pi}{3}$$

verwendet wurde.

## 11 Aufgabe 9: Axialsymmetrische Stromverteilungen und Helmholtzspule

Gegeben sei die axialsymmetrische Stromdichte in Kugelkoordinaten

$$\vec{j}(\vec{r}) = j(r, \theta) \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man zeige:  $\text{div } \vec{j}(\vec{r}) = 0$  und das Vektorpotential hat dieselbe Form  $\vec{A}(\vec{r}) = A(\vec{r}, \theta) \vec{e}_\varphi$ .

Die Divergenz in Kugelkoordinaten für ein Vektorfeld  $\vec{V} = V_\varphi \vec{e}_\varphi$  lautet:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{V} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \\ \text{div } \vec{j} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} j(r, \theta) = 0\end{aligned}$$

Man bestimmt das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  über das Faltungsintegral

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{A} \cdot \begin{cases} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \end{cases} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' j(r', \theta') \left[ r^2 + r'^2 - 2rr'\xi \right]^{-\frac{1}{2}} \sin(\varphi - \varphi') \begin{cases} \sin \theta \\ \cos \theta \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

mit der Abkürzung  $\xi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi' - \varphi)$  und den Skalarprodukten

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_{\varphi'} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \varphi' \\ \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} = \sin \theta \sin(\varphi - \varphi')$$

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_{\varphi'} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \varphi' \\ \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \theta \sin(\varphi - \varphi')$$

Mit der Stammfunktion bezüglich der  $\varphi'$ -Integration erhalten wir

$$-\frac{2\sqrt{r^2 - r'^2 - 2rr'\xi(\varphi')}}{2rr' \sin \theta \sin \theta} \Bigg|_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi} = 0, \text{ da } \xi(\varphi') \text{ } 2\pi\text{-periodisch}$$

somit ist  $\vec{A} \sim \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta$ ,  $\vec{A} = A(r, \theta)\vec{e}_\varphi$

$$A(r, \theta) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^\infty dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \int_0^\pi d\varphi'' j(r', \theta') \cos \varphi'' \cdot \left[ r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi'') \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Dies ist bezüglich der  $\varphi''$ -Integration ein elliptisches Integral. Zur Vereinfachung benutzen wir:

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_{\varphi'} = \cos(\varphi' - \varphi)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \dots = \int_\varphi^{2\pi+\varphi} d\varphi' \dots = \int_0^{2\pi} d\varphi'' \dots = 2 \int_0^\pi d\varphi'' \dots$$

Wie lautet die Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen  $A(r, \theta)$  und  $j(r, \theta)$

$$\Delta_3 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad \vec{A} = A(r, \theta) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

Die zweite Ableitung nach  $\varphi$  liefert ein Vorzeichen bei der Wirkung auf  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$ . Es ergibt sich die folgende Differentialgleichung:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) A(r, \theta) - \frac{A(r, \theta)}{r^2 \sin^2 \theta} = -\mu_0 j(r, \theta)$$

Eine sogenannte Helmholtzspule besteht aus zwei parallelen kreisförmigen Leiterschleifen (Radius  $R$ , Strom  $I$ ) im Abstand  $2b$ . Man entwickle das Vektorpotential  $\vec{A} = A(\rho, z) \vec{e}_\varphi$  in der Nähe des Koordinatenursprungs bis zur fünften Ordnung in  $\rho = r \sin \theta$  und  $z = r \cos \theta$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_1+L_2} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad d\vec{r}' = R \begin{pmatrix} -\sin \varphi' \\ \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi'$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \rho^2 + R^2 + (z \pm b)^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \varphi')$$

$$A(\rho, z) = \frac{\mu_0 I R}{2\pi} \int_0^\pi d\varphi' \left\{ \cos \varphi' [\rho^2 + R^2 + (z + b)^2 - 2\rho R \cos \varphi']^{-\frac{1}{2}} + (b \rightarrow -b) \right\}$$

Man entwickle für  $\rho \ll R, z \ll b$

$$\left[ R^2 + b^2 + \underbrace{2zb - 2\rho \cos \varphi'}_H + \rho^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + b^2}} - \frac{H}{2(R^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3H^2}{8(R^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{5H^3}{16(R^2 + b^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{35H^4}{128(R^2 + b^2)^{\frac{9}{2}}} - \frac{63H^6}{256(R^2 + b^2)^{\frac{11}{2}}}$$

Die Winkelintegrale

$$\int_0^\pi d\varphi' (\cos \varphi')^n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{16} & \text{für } n = 2, 4, 6 \end{cases}$$

liefern als Ergebnis für das Vektorpotential

$$A(\rho, z) = \frac{\mu_0 I R}{2} \frac{\rho R}{(R^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 + \frac{3(R^2 - 4b^2)}{8(R^2 + b^2)^2} (\rho^2 - 4z^2) + \frac{15}{64} (R^2 + b^2)^{-4} (R^4 - 12R^2b^2 + 8b^4) (\rho^4 - 12\rho^2z^2 + 8z^4) \right]$$

Das Magnetfeld ist

$$\vec{B} = \text{rot} [A(\rho, z) \vec{e}_\varphi] \quad (\text{in Zylinderkoordinaten})$$

$$= -\vec{e}_\rho \frac{\partial A}{\partial z} + \vec{e}_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A)$$

Das  $\vec{B}$ -Feld ist möglichst homogen in der Nähe des Ursprungs, wenn der (zweite) kubische Term im Ausdruck für  $A(\rho, z)$  verschwindet

$$\Rightarrow b = \frac{R}{2}$$

In diesem Fall erhält man

$$A(\rho, z) = \frac{4\mu_0 I}{5\sqrt{5}R} \rho \left[ 1 - \frac{18}{125R^4} (\rho^4 - 12\rho^2 z^2 + 8z^4) \right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}R} \vec{e}_z + O(\rho^4, \rho^3 z, \rho^2 z^2, \rho z^3, z^4)$$

das Magnetfeld ist homogen mit führenden quartischen Korrekturen.

## 12 Aufgabe 10: Magnetfeld einer Leiterschleife

Zeigen Sie für das Magnetfeld einer vom Strom  $I$  durchflossenen Leiterschleife  $C$ :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{grad } \Omega(\vec{r})$$

wobei  $\Omega(\vec{r})$  der Raumwinkel ist, unter dem die von  $C$  berandete Fläche  $F$  vom Punkt  $\vec{r}$  aus gesehen wird. Dabei gilt die Vorzeichenkonvention  $\Omega(\vec{r}) > 0$ , wenn  $\vec{r}$  auf der Unterseite von  $F$  liegt.

Das Biot-Savart-Gesetz besagt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Wir arbeiten mit Komponenten von Vektoren und benutzen die Abkürzungen  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $\partial'_j = \frac{\partial}{\partial x'_j}$ .

$$\frac{x_j - x'_j}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\partial_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \partial'_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\frac{4\pi}{\mu_0 I} B_j(\vec{r}) = \oint_C dx'_k \varepsilon_{ikj} \left( -\partial_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \oint_C dx'_k \varepsilon_{ijk} \partial_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Summen über zweimal auftretende Indizes werden nicht explizit ausgeschrieben. Das Kreuzprodukt wurde durch den Levi-Civita-Tensor  $\varepsilon_{ijk}$  dargestellt. In Komponenten besagt der Stokes'sche Satz:

$$\oint_{\partial F} dx'_k V_k = \iint_F dF'_l \varepsilon_{lmk} \partial'_m V_k$$

Nun gilt für die l-te Komponente dieser Rotation

$$\varepsilon_{lmk} \varepsilon_{ijk} \partial'_m \partial'_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = (\delta_{il} \delta_{mj} - \delta_{jl} \delta_{im}) \partial'_m \partial'_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \delta_{il} 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') - \partial_i \partial'_l \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Der  $\delta^3$ -Term **verschwindet**, wenn  $\vec{r}$  **nicht** auf der Fläche  $F$  liegt. Somit verbleibt

$$-\partial_i \partial'_l \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \partial_i \frac{x'_l - x_l}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

und man erhält für die i-te Komponente des Magnetfeldes

$$\frac{4\pi}{\mu_0 I} B_i(\vec{r}) = \partial_i \iint_F dF'_l \frac{x'_l - x_l}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Dies liefert das Ergebnis

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{grad} \Omega(\vec{r}), \quad \Omega(\vec{r}) = \iint_F d\vec{F}' \cdot \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$d\Omega = \frac{dF'_\perp}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} = \frac{d\vec{F}' \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} > 0 \quad \text{für } \vec{r} \text{ auf der Unterseite von } F$$

Man bemerke, dass  $\Omega(\vec{r})$  unabhängig von der Wahl der Fläche  $F$  mit  $C = \partial F$  ist, denn

$$\text{div}_{\vec{r}'} \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} = -\text{div}_{\vec{r}'} \text{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = 0$$

für  $\vec{r} \neq \vec{r}' \in V$  wobei  $\partial V = F_1 - F_2$

Beim Durchgang von  $\vec{r}$  durch die Fläche  $F$  springt  $\Omega(\vec{r})$  um  $4\pi$ .

### 13 Aufgabe 11: Vektorpotential und Magnetfeld einer (endlich langen) Zylinderspule

Die Stromdichte der dicht gewickelten Zylinderspule (mit Radius  $R$  und Länge  $L$ ) ist gegeben durch

$$\vec{j}(\vec{r}) = \vec{e}_\varphi \frac{NI}{L} \delta(\rho - R) \Theta\left(\frac{L}{2} - |z|\right)$$

Aufgrund der axialen Symmetrie hat das Vektorpotential die Form

$$\vec{A}(\vec{r}) = A(\rho, z)\vec{e}_\varphi$$

$$A(\rho, z) = \frac{\mu_0 N I}{4\pi L} \int_{-L/2}^{L/2} dz' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty d\rho' \rho' \delta(\rho' - R) \cos \varphi' \left[ \rho^2 + \rho'^2 + (z - z')^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi' \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$A(\rho, z) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi L} \int_0^\pi d\varphi' \cos \varphi' R \left\{ \ln \left| z + \frac{L}{2} + \sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \varphi' + \left( z + \frac{L}{2} \right)^2} \right| - (L \rightarrow -L) \right\}$$

Das zugehörige Magnetfeld  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = B_\rho \vec{e}_\rho + B_z \vec{e}_z$  errechnet sich zu

$$B_\rho = -\frac{\partial A(\rho, z)}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho A(\rho, z)]$$

Wir entwickeln  $\{ \dots \}$  für große  $L$  und erhalten (bei Weglassen des Strichs an  $\varphi'$ ):

$$2 \ln L - \ln(\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \varphi) + \frac{2}{L^2} [R^2 + \rho^2 - 2z^2 - 2\rho R \cos \varphi]$$

$$+ \frac{1}{L^4} [\dots + 12\rho R (\rho^2 + R^2 - 4z^2) \cos \varphi - 6\rho^2 R^2 \cos 2\varphi] + \dots$$

Wir benutzen die Winkelintegrale

$$\int_0^\pi d\varphi (\cos \varphi, \cos^2 \varphi, \cos \varphi \cos 2\varphi) = \left( 0, \frac{\pi}{2}, 0 \right)$$

und berechnen das Integral

$$\int_0^\pi d\varphi [-\cos \varphi \ln(\rho^2 + R^2 - 2\rho r \cos \varphi)]$$

mit partieller Integration und Partialbruchzerlegung

$$= -\sin \varphi \ln(\dots) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} + \int_0^\pi d\varphi \frac{2\rho R (1 - \cos^2 \varphi)}{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \varphi}$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \left\{ \frac{\rho^2 + R^2}{2\rho R} + \cos \varphi - \frac{(\rho^2 - R^2)^2 / 2\rho R}{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \varphi} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2\rho R} (\rho^2 + R^2 - |\rho^2 - R^2|) = \begin{cases} \pi\rho/R & \text{für } 0 < \rho < R \\ \pi R/\rho & \text{für } \rho > R \end{cases}$$



Wir erhalten bis zur Ordnung  $L^{-5}$  für das Vektorpotential

$$A(\rho, z) = \frac{\mu_0 N I}{2L} \left\{ \rho \Theta(R - \rho) + \frac{R^2}{\rho} \Theta(\rho - R) - \frac{2\rho R^2}{L^2} + \frac{6\rho R^2}{L^4} (\rho^2 + R^2 - 4z^2) \right\}$$

Dies ergibt die Magnetfeldkomponenten

$$\begin{aligned} B_\rho &= 24\mu_0 N I \frac{R^2}{L^5} \rho z \\ B_z &= \frac{\mu_0 N I}{L} \left[ \Theta(R - \rho) - \frac{2R^2}{L^2} + \frac{6R^2}{L^4} (R^2 + 2\rho^2 - 4z^2) \right] \end{aligned}$$

Wie bei der unendlich langen Zylinderspule springt  $B_z$  beim Durchgang durch  $\rho = R$  um  $\mu_0 N I / L$ .

## 14 Aufgabe 12: Magnetisierbare Kugelschale

Berechnen Sie das Verhältnis  $B_i/B_0$ , um das ein äußeres Magnetfeld  $B_0$  im Inneren einer magnetisierbaren Kugelschale (innerer Radius  $R_1$ , äußerer Radius  $R_2$ ) mit hoher Permeabilitätskonstante  $\mu$  abgeschwächt wird.

Da keine freien Ströme vorhanden sind und  $\vec{B}$  jeweils proportional zu  $\vec{H}$  ist, kann man (wegen  $\text{rot } \vec{H} = 0$  und  $\text{div } \vec{B} = 0$ ) ein magnetisches Potential  $\Psi$  benutzen:

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \text{grad } \Psi$$

wobei  $\Psi$  in allen Bereichen die Laplacegleichung  $\Delta\Psi = 0$  erfüllt.

Wir machen die Ansätze:

$$\begin{aligned} \text{außen } r > R_2 & \quad \Psi_a = -B_0 r \cos\theta + \frac{\alpha}{r^2} \cos\theta \\ \text{dazwischen } R_1 < r < R_2 & \quad \Psi_s = \left(\beta r + \frac{\gamma}{r^2}\right) \cos\theta \\ \text{innen } r < R_1 & \quad \Psi_i = \delta r \cos\theta \end{aligned}$$

mit unbestimmten Parametern  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta = -B_i$

Die Stetigkeit der Normalkomponente von  $\vec{B}$  bei  $r = R_2$  und  $r = R_1$  ergibt mit  $\vec{n} = \vec{e}_r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \Psi_a \Big|_{R_2} &= \mu \frac{\partial}{\partial r} \Psi_s \Big|_{R_2}, & \mu \frac{\partial}{\partial r} \Psi_s \Big|_{R_1} &= \frac{\partial}{\partial r} \Psi_i \Big|_{R_1} \\ -B_0 - \frac{2\alpha}{R_2^3} &= \mu\beta - \frac{2\mu\gamma}{R_2^3}, & \mu\beta - \frac{2\mu\gamma}{R_1^3} &= \delta \end{aligned}$$

Des Weiteren sind wegen der Abwesenheit freier Ströme die Tangentialkomponenten von  $\vec{H}$  bei  $r = R_1$  und  $R_2$  stetig. Mit dem Tangentialvektor  $\vec{t} = \vec{e}_\theta$  erhält man

$$-B_0 R_2 + \frac{\alpha}{R_2^2} = \beta R_2 + \frac{\gamma}{R_2^2}, \quad \beta R_1 + \frac{\gamma}{R_1^2} = \delta R_1$$

Das lineare Gleichungssystem für  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  lautet

$$\begin{aligned} \alpha - R_2^3 \beta - \gamma &= B_0 R_2^3, & 2\alpha + R_2^3 \mu \beta - 2\mu\gamma &= -B_0 R_2^3 \\ R_1^3 \beta + \gamma - R_1^3 \delta &= 0, & \mu R_1^3 \beta - 2\mu\gamma - R_1^3 \delta &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung für den Parameter  $\delta$

$$-\delta = B_i = \frac{9\mu R_2^3 B_0}{R_2^3(2\mu + 1)(\mu + 2) - 2R_1^3(\mu - 1)^2}$$

Der gesuchte Abschwächungsfaktor ist

$$\boxed{\frac{B_i}{B_0} = 9\mu \left[ (2\mu + 1)(\mu + 2) - 2 \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^3 (\mu - 1)^2 \right]^{-1}}$$

Für  $\mu \gg 1$  vereinfacht sich dieses Verhältnis zu

$$\boxed{\frac{B_i}{B_0} = \frac{9}{2\mu} \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^3 \right]^{-1}}$$

Zahlenbeispiele:

$$\begin{aligned} \mu = 10000, \quad R_2 = 1,05R_1 &\Rightarrow \frac{B_i}{B_0} = 3,3 \cdot 10^{-3} \\ \mu = 10^6, \quad R_2 = 1,01R_1 &\Rightarrow \frac{B_i}{B_0} = 1,53 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Das innere Feld  $B_i$  ist proportional zu  $\frac{1}{\mu}$ . Ein Schirm aus hochpermeablem Material mit  $\mu = 10^3 \dots 10^6$  bewirkt eine starke Reduzierung des Magnetfelds selbst bei relativ dünnen Schirmwänden.

## 15 Aufgabe 13: Gerader linienförmiger Strom parallel zu magnetisierbarem Medium

Gegeben sei ein gerader linienförmiger Strom der Stärke  $I$  in  $z$ -Richtung, der im Abstand  $d$  parallel zu einem magnetisierbaren Medium (mit der Permeabilitätskonstante  $\mu$ ) verläuft, welches den linken Halbraum  $x < 0$  ausfüllt.

Bestimmen Sie das Magnetfeld im ganzen Raum sowie die Kraft pro Länge auf den Stromleiter.

In Analogie zum Problem der Punktladung vor einem dielektrischen Halbraum machen wir für  $x < 0$  einen Ansatz mit einem modifizierten Strom  $I''$  und für  $x > 0$  mit einem zusätzlichen (fiktiven) Bildstrom  $I'$  im Medium.

$$\vec{B}_{<} = \frac{\mu_0 I''}{2\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(x-d)^2 + y^2}$$

$$\vec{B}_{>} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(x-d)^2 + y^2} + \frac{\mu_0 I'}{2\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x+d \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(x+d)^2 + y^2}$$

Die Normalkomponente  $B_x$  und die Tangentialkomponente  $H_y$  sind jeweils stetig bei  $x = 0$ . Somit erhalten wir

$$I'' = I + I', \quad \frac{1}{\mu} I'' = I - I'$$

mit der Lösung

$$2I = I'' \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = I'' \frac{1 + \mu}{\mu}$$

$$\boxed{I'' = \frac{2\mu}{1 + \mu} I, \quad I' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I}$$

Als nächstes bestimmen wir die Flächendichte des Magnetisierungsstroms auf der Grenzfläche. Die Feldgleichungen liefern mit  $\text{rot } \vec{H} = 0$  (es sind keine freien Ströme vorhanden)

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \text{rot} (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \text{rot } \vec{M} = \mu_0 \vec{j}_{\text{mag}}$$

Folglich springt die Tangentialkomponente  $B_y$  bei  $x = 0$  um  $\mu_0$  mal der Flächendichte des Magnetisierungsstroms  $J_z^{\text{mag}}$ , wobei dessen Richtung durch  $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$  festgelegt ist.

$$J_z^{\text{mag}} = \frac{1}{\mu_0} [B_y^> - B_y^<]_{x=0} = \frac{(I' - I + I'') d}{2\pi(d^2 + y^2)} = \frac{I d}{2\pi(d^2 + y^2)} \frac{\mu - 1 - \mu - 1 + 2\mu}{\mu + 1},$$

$$\vec{J}_{\text{mag}} = \frac{I(\mu - 1)d}{\pi(d^2 + y^2)(\mu + 1)} \vec{e}_z$$

Die Kraft des magnetischen Mediums auf den Stromleiter ist die Gegenkraft zu der des Stromleiters (mit  $I$ ) auf die Magnetisierungsflächenstromdichte.

$$\frac{\vec{F}}{l} = - \int_{-\infty}^{\infty} dy \vec{J}_{\text{mag}} \times \vec{B}_I \Big|_{x=0} = - \frac{I(\mu-1)d}{\pi(\mu+1)} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy (d^2 + y^2)^{-2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ -d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{F}}{l} = - \frac{\mu_0 I^2 d^2 (\mu-1)}{2\pi^2 (\mu+1)} \vec{e}_x \frac{1}{d^3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \cos^2 \psi$$

$$\boxed{\frac{\vec{F}}{l} = \frac{\mu_0 I^2 (1-\mu)}{4\pi d (1+\mu)} \vec{e}_x}$$

wobei sich die  $y$ -Komponente zu Null integriert hat. Für  $\mu < 1$  erhält man eine Abstoßung, was bei Diamagneten und Supraleitern ( $\mu = 0$ ) auftritt. Für  $\mu > 1$  erhält man eine Anziehung, was bei paramagnetischen Materialien auftritt.

Für das Feld eines Stromleiters vor einem Supraleiter (mit  $\mu = 0$ ) gilt  $\vec{B}_{<} = 0$  wegen  $I'' = 0$ . Mit  $I' = -I$  erhält man für  $x > 0$  folgende Magnetfeldkomponenten:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{y}{(x+d)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-d)^2 + y^2} \right\} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{x-d}{(x-d)^2 + y^2} - \frac{x+d}{(x+d)^2 + y^2} \right\} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Längs der Magnetfeldlinien gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} \quad \text{oder} \quad B_x dy - B_y dx = 0 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx$$

mit der Funktion

$$\Psi(x, y) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2}$$

Somit sind die Magnetfeldlinien durch  $\Psi(x, y) = \text{const.}$  bestimmt. Die weitere Umformung

$$(x+d)^2 + y^2 = (c+1)^2 [(x-d)^2 + y^2]$$

$$\boxed{\left[ x - d \left( 1 + \frac{2}{c} \right) \right]^2 + y^2 = \left( \frac{2d}{c} \sqrt{1+c} \right)^2}$$

zeigt, dass die Feldlinien nicht-konzentrische Kreise sind. Für die Mittelpunktsverschiebung  $x_0 = d(1 + \frac{2}{c})$  und den Radius  $r = \frac{2d}{c}\sqrt{1+c}$  eines jeden Kreises gilt der Zusammenhang

$$r^2 + d^2 = x_0^2, \text{ wegen } \frac{4}{c^2}(1+c) + 1 = \left(1 + \frac{2}{c}\right)^2$$

oder

$$r = \sqrt{x_0^2 - d^2}$$

## 16 Aufgabe 14: Starr rotierende geladene Kugel

In einer starr rotierenden Kugel vom Radius  $R$  mit homogener Massendichte liegt eine Ladungsdichte proportional zu  $r^n$  vor. Welchen Wert hat das anomale gyromagnetische Verhältnis?

Der Drehimpuls berechnet sich zu

$$\vec{L} = \frac{3M}{4\pi R^3} \int_{|\vec{r}| < R} dV \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) = \Theta \vec{\omega}, \text{ mit } \Theta = \frac{2}{5}MR^2$$

Die gesamte Ladung in der Kugel beträgt

$$Q = \rho_0 4\pi \int_0^R dr r^{2+n} = 4\pi \rho_0 \frac{R^{n+3}}{n+3}$$

und das magnetische Moment hat den Wert

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{\rho_0}{2} \int_{|\vec{r}| < R} dV r^n \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) = \mu \vec{\omega} \\ \mu &= \rho_0 \pi \int_0^R dr r^{4+n} \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi^2) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \frac{R^{n+5}}{n+5} = QR^2 \frac{n+3}{3(n+5)} \end{aligned}$$

Das gyromagnetische Verhältnis lautet somit

$$\frac{|\vec{m}|}{|\vec{L}|} = \frac{\mu}{\Theta} = \frac{Q}{2M} \frac{5(n+3)}{3(n+5)}$$

Der Anomaliefaktor ist

$$g = \frac{5(n+3)}{3(n+5)} = \frac{5}{3} - \frac{10}{3(n+5)} < \frac{5}{3}$$

Den größtmöglichen Wert  $g_{\max} = \frac{5}{3}$  erhält man, wenn die Ladung  $Q$  homogen über die Kugel­fläche verteilt ist.

## 17 Aufgabe 15: Selbstinduktivität eines Stromblattes

Man berechne die Selbstinduktivität pro Länge eines sogenannten Stromblattes. Das quaderförmige Raumgebiet, in dem der homogen verteilte Strom  $I$  in  $z$ -Richtung fließt, hat die (große) Länge  $l$ , die Breite  $b$  und die (kleine) Dicke  $d$ .

Die Stromdichte hat die Form:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{bd} \vec{e}_z$$

für  $0 < x < b$ ,  $0 < y < d$ ,  $0 < z < l$ . Damit berechnet sich die Selbstinduktivität folgendermaßen:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi I^2} \int_V d^3r \int_V d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

wobei  $V$  ein Quader Volumen ist. Wir erinnern zuerst an die Reduktionsformel:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dx' f(|x - x'|) = 2 \int_0^1 d\xi (1 - \xi) f(\xi)$$

In der die Gewichtsfunktion  $1 - \xi$  vom Überlapp der Intervalle kommt:

$$1 - |\xi| \quad \text{mit} \quad -1 < \xi < 1$$

Nach Transformation auf Einheitsintervalle  $[0, 1]$  erhält man für die Selbstinduktivität

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0}{4\pi} l^2 \cdot 8 \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \int_0^1 d\zeta (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) [b^2\xi^2 + d^2\eta^2 + l^2\zeta^2]^{-1/2} \\ &= \frac{2}{\pi} \mu_0 \int_0^1 d\xi (1 - \xi) \int_0^1 d\eta (1 - \eta) \left[ l \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + b^2\xi^2 + d^2\eta^2}}{\sqrt{b^2\xi^2 + d^2\eta^2}} - \sqrt{l^2 + b^2\xi^2 + d^2\eta^2} + \sqrt{b^2\xi^2 + d^2\eta^2} \right] \end{aligned}$$

Wir betrachten nur noch die Terme, die mindestens linear in  $l$  sind und erhalten für die Selbstinduktivität pro Länge

$$\begin{aligned} \frac{L}{l} &= \frac{2\mu_0}{\pi} \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta (1 - \xi)(1 - \eta) \left\{ \ln(2l) - 1 - \frac{1}{2} \ln(b^2\xi^2 + d^2\eta^2) \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln(2l) - 1 + \frac{25}{12} - \frac{2d}{3b} \arctan \frac{b}{d} - \frac{2b}{3d} \arctan \frac{d}{b} + \frac{b^2}{12d^2} \ln \left( 1 + \frac{d^2}{b^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2}{12b^2} \ln \left( 1 + \frac{b^2}{d^2} \right) - \frac{1}{2} \ln(b^2 + d^2) \right\} \end{aligned}$$

Wir entwickeln diesen Ausdruck für  $d \ll b$  bis zur Ordnung  $d^2$  und erhalten

$$\boxed{\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{2l}{b} + \frac{1}{2} - \frac{\pi d}{3b} + \frac{d^2}{6b^2} \left( \ln \frac{b}{d} + \frac{25}{12} \right) \right\}}$$

Für  $d = 0$  wird die Rechnung einfacher:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} l^2 \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\zeta (1-\xi)(1-\zeta) [b^2\xi^2 + l^2\zeta^2]^{-1/2}$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \frac{l}{3b^2} (l - \sqrt{l^2 + b^2}) + \frac{l}{b} \ln \frac{b + \sqrt{l^2 + b^2}}{l} + \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + b^2}}{b} + \frac{b - \sqrt{l^2 + b^2}}{3l} \right\}$$

Nach Entwicklung bis zur Ordnung  $l^{-2}$  ergibt sich:

$$\boxed{\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{2l}{b} + \frac{1}{2} + \frac{b}{3l} - \frac{b^2}{24l^2} \right\}}$$

Bei der gegenseitigen Induktivität zweier paralleler Stromblätter (Dicke  $d = 0$ , Breite  $b$ , Länge  $l$ ) muss noch der Abstand  $a$  in  $y$ -Richtung mit berücksichtigt werden.

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{\pi} l^2 \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\zeta (1-\xi)(1-\zeta) [a^2 + b^2\xi^2 + l^2\zeta^2]^{-1/2}$$

Bei Beschränkung auf Terme mindestens linear in  $l$ :

$$\frac{L_{12}}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \int_0^1 d\xi (1-\xi) \left\{ \ln 2l - 1 - \frac{1}{2} (a^2 + b^2\xi^2) \right\}$$

lautet das Ergebnis:

$$\boxed{\frac{L_{12}}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \frac{2l}{a} + \frac{1}{2} - \frac{2a}{b} \arctan \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \ln \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \right\}}$$

Der (negative) Zusatzterm zur Selbstinduktivität pro Länge hängt vom Verhältnis  $\lambda = \frac{b}{a}$  folgendermaßen ab:

$$\boxed{\frac{L_{12}}{l} = \frac{L}{l} + \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \left( \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) \ln (1 + \lambda^2) + 2 \ln \lambda - \frac{4}{\lambda} \arctan \lambda \right]}$$

Bei großem beziehungsweise geringem Abstand  $a$  der beiden Blätter gelten die Näherungsformeln

$$a \gg b: \quad \frac{L_{12}}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{a} - 1 - \frac{b^2}{12a^2} \right)$$

$$a \ll b: \quad \frac{L_{12}}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{b} + \frac{1}{2} - \frac{\pi a}{b} \right)$$

## 18 Aufgabe 16: Greensche Funktion zur Wellengleichung

Man leite die retardierte Greensche Funktion zur Wellengleichung durch zeitliche und räumliche Fouriertransformation her.

Die inhomogene Wellengleichung zwischen Potential und Ladungsdichte lautet:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \Phi(t, \vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(t, \vec{r})$$

Wir machen einen Lösungsansatz mit der Greenschen Funktion

$$\Phi(t, \vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3r' G(t - t', \vec{r} - \vec{r}') \rho(t', \vec{r}')$$

und dieser verlangt

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) G(t - t', \vec{r} - \vec{r}') = \delta(t - t') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

Mit den Abkürzungen  $\tau = t - t'$  und  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  folgt

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta \right) G(\tau, \vec{R}) = \delta(\tau) \delta^3(\vec{R})$$

Die Fourierdarstellung

$$G(\tau, \vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k e^{i(\omega\tau - \vec{k} \cdot \vec{R})} \hat{G}(\omega, \vec{k})$$

eingesetzt in die Wellengleichung liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 \right) e^{i(\omega\tau - \vec{k} \cdot \vec{R})} \hat{G}(\omega, \vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^4} e^{i(\omega\tau - \vec{k} \cdot \vec{R})}$$



und somit findet man

$$\hat{G}(\omega, \vec{k}) = \left[ (2\pi)^4 \left( \vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right]^{-1}$$

Die Rücktransformation vom  $(\omega, \vec{k})$ -Raum in den  $(\tau, \vec{R})$ -Raum berechnet sich wie folgt

$$G(\tau, \vec{R}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-c^2}{\omega^2 - c^2 \vec{k}^2} e^{i\omega\tau}$$

Bei Auswertung des  $\omega$ -Integrals mit dem Residuensatz muss man für  $\tau > 0$  oben schließen und für  $\tau < 0$  unten schließen. Die Kausalität verlangt zusätzlich:

$$G(\tau, \vec{R}) = 0 \quad \text{für } \tau \leq 0,$$

denn das Potential zur Zeit  $t$  darf nur von Ladungsdichten zu früheren Zeiten  $t' < t$  herrühren.

Daher müssen die Pole bei  $\omega = \pm c|\vec{k}|$  infinitesimal in die obere Halbebene verschoben werden. Der Residuensatz liefert nun für das  $\omega$ -Integral:

$$\begin{aligned} & -ic^2 \left\{ \text{Res}_{c|\vec{k}|} \frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega - c|\vec{k}|)(\omega + c|\vec{k}|)} + \text{Res}_{-c|\vec{k}|} \frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega + c|\vec{k}|)(\omega - c|\vec{k}|)} \right\} \\ & = -ic^2 \left( \frac{e^{ic\tau|\vec{k}|}}{2c|\vec{k}|} + \frac{e^{-ic\tau|\vec{k}|}}{-2c|\vec{k}|} \right) = \frac{c}{|\vec{k}|} \sin(c\tau|\vec{k}|) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Kugelkoordinaten im  $\vec{k}$ -Raum und der Substitution  $\zeta = -\cos\theta$ ,  $d\zeta = \sin\theta d\theta$  erhält man:

$$G(\tau, \vec{R}) = \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{4\pi^2} \frac{c}{k} \sin(c\tau k) \int_{-1}^1 d\zeta e^{ikR\zeta}$$

wobei  $R = |\vec{R}|$  ist. Das hintere Integral hat den Wert  $\frac{1}{ikR} (e^{ikR\zeta} - e^{-ikR\zeta}) \Big|_{\zeta=-1}^{\zeta=1} = \frac{2}{kR} \sin(kR)$ .

Das verbleibende Integral wird unter Zuhilfenahme von einer trigonometrischen Formel gelöst.

$$\begin{aligned}
 G(\tau, R) &= \frac{c}{2\pi^2 R} \int_0^\infty dk \sin(kc\tau) \sin(kR) \\
 &= \frac{c}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^\infty dk [\cos k(c\tau - R) - \cos k(c\tau + R)] \\
 &= \frac{1}{8\pi^2 R} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty dk c \left[ e^{ikc(\tau - R/c)} - e^{ikc(\tau + R/c)} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi R} \operatorname{Re} \left[ \delta\left(\tau - \frac{R}{c}\right) - \delta\left(\tau + \frac{R}{c}\right) \right]
 \end{aligned}$$

Der zweite Term verschwindet, da  $\tau > 0$  und  $R > 0$ . Mit dieser Greenschen Funktion

$$G_{\text{ret}}(\tau, \vec{R}) = \frac{\delta(\tau - |\vec{R}|/c)}{4\pi R}$$

erhalten wir das bekannte Ergebnis für das retardierte Potential

$$\Phi_{\text{ret}}(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

## 19 Aufgabe 17: Elektrodynamik linearer anisotroper Medien

Man bestimme für die makroskopische Elektrodynamik in linearen, anisotropen Medien die Energiedichte  $w$ , die Energiestromdichte  $\vec{S}$ , die Impulsdichte  $\vec{g}$  und den Spannungstensor  $\vec{T}$ .

Die an den freien Ladungen geleistete Arbeit ist

$$\frac{dE_{\text{lad}}}{dt} = \int d^3r \vec{j}_{\text{frei}}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Die Leistungsdichte  $\vec{j}_{\text{frei}} \cdot \vec{E}$  schreiben wir mit den makroskopischen Maxwellgleichungen um:

$$\begin{aligned}
 \vec{j}_{\text{frei}} \cdot \vec{E} &= \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) + (\operatorname{rot} \vec{E}) \cdot \vec{H} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
 &= -\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Für lineare, anisotrope Medien gilt

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j \quad (\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \text{ ist der symmetrische Dielektrizitätstensor})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} E_i D_i \right) = \frac{\varepsilon_0}{2} \varepsilon_{ij} \left( \frac{\partial E_i}{\partial t} E_j + E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial D_j}{\partial t} E_j + E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} \right) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j \quad (\mu_{ij} = \mu_{ji} \text{ ist der symmetrische Permeabilitätstensor})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} B_i H_i \right) = \frac{\mu_0}{2} \mu_{ij} \left( \frac{\partial H_j}{\partial t} H_i + H_j \frac{\partial H_i}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_i}{\partial t} H_i + H_j \frac{\partial B_j}{\partial t} \right) = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

wobei Summen über doppelt auftretende Indizes nicht ausgeschrieben wurden. Somit erhalten wir

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \right) + \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{j}_{\text{frei}} \cdot \vec{E}}$$

und identifizieren die Größen:

$$\text{Energiedichte:} \quad W = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

$$\text{Energiestromdichte:} \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Die zeitliche Änderung des Impulses der freien Ladungen ist

$$\frac{d\vec{P}_{\text{lad}}}{dt} = \int d^3r \left[ \rho_{\text{frei}} \vec{E} + \vec{j}_{\text{frei}} \times \vec{B} \right]$$

Die Kraftdichte  $\rho_{\text{frei}} \vec{E} + \vec{j}_{\text{frei}} \times \vec{B}$  schreiben wir wieder mit den makroskopischen Maxwellgleichungen um:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{frei}} \vec{E} + \vec{j}_{\text{frei}} \times \vec{B} &= \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) + \vec{E} \operatorname{div} \vec{D} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \times \vec{D} + \vec{H} \operatorname{div} \vec{B} + (\operatorname{rot} \vec{H}) \times \vec{B} \end{aligned}$$

Neben  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  wurden die folgenden Terme ergänzt:

$$-\vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\operatorname{rot} \vec{E}) \times \vec{D} = \left( \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \times \vec{D} = 0$$

welche gleich 0 sind, da die rechte Klammer gemäß einer Maxwellgleichung verschwindet.

Wir definieren als Impulsdichte:  $\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B}$

und als Spannungstensor:  $T_{ij} = D_i E_j + B_i H_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H})$

Es ist zu zeigen, dass  $\partial_i T_{ij}$  die  $j$ -te Komponente des Vektors aus vier Summanden ist. Für den elektrischen Anteil ergibt sich:

$$\partial_i \left( D_i E_j - \frac{\delta_{ij}}{2} D_k E_k \right) = (\operatorname{div} \vec{D}) E_j + D_i \partial_i E_j - \frac{1}{2} (\partial_j D_k) E_k - \frac{1}{2} D_k \partial_j E_k$$

Falls die beiden letzten Terme rechts gleich sind, haben wir die Übereinstimmung mit

$$\begin{aligned} \left[ (\operatorname{rot} \vec{E}) \times \vec{D} \right]_j &= \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{ilm} (\partial_l E_m) D_k = (\delta_{kl} \delta_{jm} - \delta_{km} \delta_{jl}) (\partial_l E_m) D_k \\ &= D_k \partial_k E_j - D_k \partial_j E_k \end{aligned}$$

Es muss also gelten:

$$\partial_j \left( \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \right) = \vec{D} \cdot \partial_j \vec{E}$$

Diese Identität gilt bei einem linearen Zusammenhang der Form  $D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} E_k$  (mit  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ ).

$$\partial_j \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \varepsilon_{ik} E_k E_i \right) = \frac{\varepsilon_0}{2} \varepsilon_{ik} ((\partial_j E_k) E_i + E_k \partial_j E_i) = \frac{1}{2} ((\partial_j E_k) D_k + (\partial_j E_i) D_i) = \vec{D} \cdot \partial_j \vec{E}$$

Der Anteil der Magnetfelder im Spannungstensor  $T_{ij}$  ergibt sich einfach durch die Ersetzungen  $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$  und  $\vec{D} \rightarrow \vec{B}$ .

## 20 Aufgabe 18: Strahlungscharakteristik des Dipols

Welche differentielle Strahlungsleistung eines Dipols hat die geringste Anisotropie?

Es gilt die Formel

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} \chi \quad \text{mit} \quad \chi = |\vec{p} \times \vec{e}_r|^2$$

Da  $\vec{p} = \vec{p}_1 + i\vec{p}_2$  ein komplexer Vektor ist, hat man  $\chi = (\vec{p}_1 \times \vec{e}_r)^2 + (\vec{p}_2 \times \vec{e}_r)^2$ . Dies stellt zwei verschieden gewichtete  $\sin^2$ -Keulen dar, welche einen beliebigen Winkel einschließen. Wir können jedoch vereinfachen, indem wir ausgehen von

$$\vec{p}^2 = |\vec{p}|^2 e^{i\gamma}, \quad \vec{p}_2 + i\vec{p}_1 = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) e^{i\frac{\gamma}{2}}$$

dann ist

$$\left(|\vec{b}_1 + i\vec{b}_2|\right)^2 = \vec{b}_1^2 - \vec{b}_2^2 + 2i\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2$$

reellwertig und  $\vec{b}_1$  und  $\vec{b}_2$  stehen aufeinander senkrecht. Nun lautet die Winkelverteilung

$$\chi = \left| e^{i\frac{\pi}{2}} (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) \times \vec{e}_r \right|^2 = (\vec{b}_1 \times \vec{e}_r)^2 + (\vec{b}_2 \times \vec{e}_r)^2$$

Wir wählen  $\vec{b}_1 = b_1 \vec{e}_z$  und  $\vec{b}_2 = b_2 \vec{e}_x$ . Mit dem Verhältnis  $r = (b_2/b_1)^2$  erhalten wir

$$\chi = b_1^2 [1 - \cos^2 \theta + r(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)] = b_1^2 \tilde{\chi}$$

Die mittlere quadratische Abweichung berechnet sich mit der Substitution  $\xi = \cos \theta$  zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \tilde{\chi}^2 - \left( \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \tilde{\chi} \right)^2 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi [1 - \xi^2 + r(1 - (1 - \xi^2) \cos^2 \varphi)]^2 \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi [1 - \xi^2 + r(1 - (1 - \xi^2) \cos^2 \varphi)] \right\}^2 \\ &= \frac{1}{16} \int_{-1}^1 d\xi [8 + 8r + 3r^2 + 2(r^2 - 8)\xi^2 + (8 - 8r + 3r^2)\xi^4] \\ &\quad - \frac{1}{16} \left[ \int_{-1}^1 d\xi [2 + r + (r - 2)\xi^2] \right]^2 = \frac{4}{45}(1 - r + r^2) \end{aligned}$$

Das relevante Verhältnis

$$\frac{\text{Varianz}}{(\text{Mittelwert})^2} = \frac{1 - r + r^2}{5(1 + r)^2} \quad \text{ist invariant unter } r \rightarrow \frac{1}{r}$$

wir leiten nach  $r$  ab:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1 - r + r^2}{5(1 + r)^2} \right] = \frac{(1 + r)(2r - 1) - 2(1 - r + r^2)}{5(1 + r)^3} = \frac{3(r - 1)}{5(r + 1)} = 0$$

Das Minimum liegt also bei  $r = 1$  und hat den Wert  $\frac{1}{20}$ . Der zugehörige komplexe Dipolmomentenvektor ist in diesem Fall

$$\vec{p} = b_1 \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und er wird von einer auf einem Kreis rotierenden Ladung realisiert.

$$\vec{p}(t) = Rq \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ 0 \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left[ Rq \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \right]$$

## 21 Aufgabe 19: Thomson-Streuung

Man berechne den differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung langwelliger Strahlung an freien geladenen Teilchen (Masse  $m$ , Ladung  $e$ ).

Wir erinnern an die Formel

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{pol} = \frac{k^4 \alpha'^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} |\vec{\epsilon}^* \cdot \vec{\epsilon}_0|^2$$

die von einem induzierten Dipolmoment proportional zum elektrischen Feld der Welle ausgeht

$$\vec{p} = \alpha' \vec{E}_0$$

Wir stellen zuerst die Bewegungsgleichung des geladenen Teilchens auf:

$$\begin{aligned} m\dot{\vec{r}} &= e \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \operatorname{Re} \left[ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right], \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t), \\ |\vec{B}| &\sim \frac{1}{c} |\vec{E}| \end{aligned}$$

Die Wirkung des Magnetfeldes ist um einen Faktor  $v/c$  unterdrückt und für kleine Wellenzahlen  $kR_0 \ll 1$  erhalten wir näherungsweise

$$m\ddot{\vec{r}} \simeq e \operatorname{Re} \left( \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \right)$$

Der oszillierende Anteil der Bewegung ist

$$\vec{r}(t)_{osz} = \operatorname{Re} \left[ \vec{r}_0 e^{-i\omega t} \right]$$

mit der Amplitude

$$-m\omega^2 \vec{r}_0 e^{-i\omega t} = e \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \vec{r}_0 = -\frac{e}{m\omega^2} \vec{E}_0$$

Das induzierte elektrische Dipolmoment ist dann

$$\vec{p} = e\vec{r}_0 = -\frac{e^2}{m\omega^2}\vec{E}_0$$

und man erkennt den Proportionalitätsfaktor  $\alpha' = -\frac{e^2}{m\omega^2}$ . Gemittelt über die Anfangspolarisationen  $\vec{\varepsilon}_0 = \vec{e}_x, \vec{e}_y$  und summiert über die Endpolarisationen

$$\vec{\varepsilon}_{\parallel} = \frac{\vec{e}_z - \cos\theta\vec{e}_r}{\sin\theta}, \quad \vec{\varepsilon}_{\perp} = \frac{\vec{e}_r \times \vec{e}_z}{\sin\theta}$$

erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 m^2 c^4 k^4} \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta) = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}\right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta)$$

Um den Vorfaktor zu vereinfachen, vergleicht man mit dem Coulombpotential

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\alpha\hbar c}{r}, \quad \alpha = \frac{1}{137,036} \quad \text{und} \quad \hbar c = 197,327 \text{ MeV fm}$$

Die Größe  $\lambda = 2\pi\frac{\hbar}{mc}$  heißt Comptonwellenlänge. Somit kann man schreiben

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{Thomson}} = \left(\frac{\alpha\hbar}{mc}\right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta)$$

Für Elektronen mit  $m = 511 \text{ keV}$  ist  $\frac{\lambda_e}{2\pi} = 386,16 \text{ fm}$  und  $\alpha\frac{\lambda_e}{2\pi} = r_e = 2,818 \text{ fm}$  wird „klassischer Elektronenradius“ genannt. Der zugehörige totale Wirkungsquerschnitt ist

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{r_e^2}{2} 2\pi \int_{-1}^1 d\zeta (1 + \zeta^2) = \frac{8\pi}{3} r_e^2.$$

Man erhält für leichte Elektronen

$$\sigma_{\text{tot}}^{(e)} = 66,52 \text{ fm}^2 = 66,52 \cdot 10^{-30} \text{ m}^2 = 0,665 \text{ barn}$$

Die Einheit barn =  $10^{-28} \text{ m}^2 = 1 \text{ barn}$  wird in der Teilchenphysik häufig benutzt. Schwere Protonen haben eine Masse von etwa  $M_p = 938,28 \text{ MeV}$  und der totale Thomsonquerschnitt reduziert entsprechend zu

$$\sigma_{\text{tot}}^{(p)} = \left(\frac{m_e}{M_p}\right)^2 \cdot 0,665 \text{ barn} = 0,197 \mu\text{barn}$$