THEORETISCHE PHYSIK 2 (ELEKTRODYNAMIK) WS 2018/2019
Technische Universität München
October 19, 2018

Introduction Problems
HARMONISCHER OSZILLATOR – ALTE UND NEUE LÖSUNGSMETHODEN*

Wir betrachten den harmonischen Oszillator und stellen verschieden wichtige Lösungsmethoden für diese Art von Problem vor.

1 Direkte Lösung

Die Differentialgleichung für einen harmonischen Oszillator in einer Dimension mit Reibungsterm und externer Kraft ist gegeben durch:

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\right)x(t)=F(t), \tag{1}$$

Dabei steht x für den Ort, t für die Zeit, γ kontrolliert die Reibung, ω_0 ist die Eigenfrequenz und $F(t)$ eine externe zeitabhängige Kraft.

- Lösen Sie Gleichung (1) für den Fall $F(t) = I\delta(t)$ mit Hilfe eines Exponentialansatzes.
- Unterscheiden Sie die Fälle $\gamma > \omega_0$,$\gamma = \omega_0$ and $\gamma > \omega_0$.
- Nehmen Sie homogene Randbedingungen an, nänlich $x(0) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

2 Fouriertransformation

Lösen Sie das gleiche Problem, indem Sie mit Hilfe einer Fouriertransformation die Differentialgleichung auf eine algebraische Gleichung zurückführen.

3 Greensche Funktionen

Benutzen Sie die obigen Ergebnisse, um eine sogenannte Greensche Funktion für die einzelnen Fälle zu finden. D.h., bestimmen Sie $G(t,t')$, so daß

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\right)G(t,t')=\delta(t-t'). \tag{2}$$

*Diese Blatt wurde erstellt von Juan S. Cruz, Office 1112, juan.cruz@tum.de

3.1 Beispiele

i) **Harmonische externe Kraft** Wählen Sie nun $F(t) = F\cos(kt)$und finden Sie eine spezielle Lösung für diesen Fall welche die obigen homogenen Randbedingungen erfüllt. Betrachten Sie dabei den schwach gedämpften Fall ($\gamma < \omega_0$) und benutzen Sie die hergeleitete Greensche Funktion.

ii) Wählen Sie nun eine lineare Kraft, welche über ein endliches Zeitintervall (T_i, T_f) wirkt, d.h. $F(t) = Ft\Theta(T_f - t)\Theta(t - T_i)$, agwiederum für den schwach gedämpften Fall $\gamma < \omega_0$.

4 Einige Aussagen der Funktionentheorie

4.1 Definitionen

Wir betrachten hier einige Definitionen aus der Funktionentheorie, welche erlauben, den Residuensatz zu formulieren.

Def: Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch* in einem Gebiet D wenn sie in allen Punkten in D komplex differenzierbar ist. (D.h. für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} = -i\frac{\partial f(x+iy)}{\partial y}$.)

Def: Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt isolierte Singularität genau dann wenn $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht analytisch in diesem Punkt ist während eine Umgebung U von z_0 existiert, so daß $f(z)$ analytisch für alle $z \in U \setminus z_0$ ist.

Def: Ein singulärer Punkt z_0 einer komplexen Funktion $f(z)$ heißt Pol der Ordnung m genau dann wenn $f(z)$ in der Form

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \tag{3}$$

geschrieben werden kann, wobei $\phi(z)$ in z_0 analytisch ist und nicht verschwindet.

Residuum: Gegeben sei eine komplexe Funktion $f(z)$ mit einem singulären Punkt z_0 und C einer geschlossenen Kontur um z_0, welche keine weitere Singulartiät einschließt. Die Größe

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z \tag{4}$$

heißt Residuum von f in z_0.

4.2 Berechnung der Residuen

Wir nehmen an, $f(z)$ hat einen singulären Punkt z_0

- Ist z_0 ein Pol der Ordnung m, dann isy

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z - z_0)^m f(z) \tag{5}$$

- Für einen Pol erster Ordnung kann man $f(z)$ auch in einer sogenannten Laurent-Reihe um z_0 entwickeln und das Residuum direkt vom Koeffizienten des Terms z^{-1} ablesen.

- Liegt der singuläre Pukt im Unendlichen, dann gilt:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}(f) = \operatorname*{Res}_{z=0}\left(-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right) \tag{6}$$

4.3 Cauchy's Residuensatz

Theorem: Sei C eine geschlossene, positiv orientierte Kurve, welche sich nicht selbst schneidet. Ist die Funktion f im Inneren von C analytisch außer an singulären Punkten z_k, $(k = 1, ..., n)$, dann ist

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z)) \tag{7}$$

4.4 Lemma von Jordan

Theorem: Wenn gilt:

i.) Die Funktion $f(z)$ ist analytisch in allen Punkten z in der oberen komplexen Halbebene und außerhalb eines Kreise vom Radius R_0, d.h. $|z| > R_0$, für ein $R_0 > 0$.

ii.) Sei C_R ein Halbkreis in der oberen Halbebene, welcher durch $z = Re^{i\theta}$ parametrisiert wird, mit $0 \geq \theta \geq \pi$ und $R > R_0$.

iii.) Es existiert eine positive Konstante M_R, so daß für alle Punkte $z \in C_R$ gilt $|f(z)| \geq M_R$, und $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$.

Dann ist für alle $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\mathrm{d}z = 0. \tag{8}$$