

Theoretische Physik 2

Elektrodynamik

Korbinian Eschbaum, Michael Haimerl
Nach der Vorlesung von Prof. Dr. Björn Garbrecht

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitungen	5
1.1	Einleitung	5
1.2	Tensorfelder	6
1.3	Integralsätze	10
1.4	Zur δ -Funktion	14
1.5	Helmholtz'scher Zerlegungs- und Eindeutigkeitssatz	16
2	Elektrostatik	19
2.1	Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik	19
2.2	Energiedichte des elektrischen Feldes	24
2.3	Randwertprobleme der Elektrostatik	26
2.4	Entwicklung nach orthogonalen Funktionen	31
2.5	Variablenseparation	33
2.6	Randwertprobleme in Kugelkoordinaten	34
2.7	Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen	39
2.8	Green'sche Funktion in Kugelkoordinaten für Randbedingungen auf der Sphäre	40
2.9	Entwicklung Green'scher Funktionen nach Eigenfunktionen	42
2.10	Multipolentwicklung	44
3	Magnetostatik	47
3.1	Stromdichte	47
3.2	Kraftgesetze	48
3.3	Feldgleichungen der Magnetostatik	50
3.4	Magnetischer Fluss	51
3.5	Magnetischer Dipol	53
3.6	Kräfte auf lokalisierte Stromverteilungen	55
4	Elektrische und magnetische Felder in polarisierbarer Materie	57
4.1	Gemittelte elektrische Felder	57
4.2	Phänomenologische Dielektrika und Randbedingungen	59
4.3	Randwertprobleme mit Dielektrika	60
4.4	Magnetfelder in Materie	63
5	Maxwell-Gleichungen	67
5.1	Faraday'sches Induktionsgesetz	67
5.2	Maxwell'scher Verschiebungsstrom	69
5.3	Elektromagnetische Feldenergie	70
5.4	Eichpotentiale	72
5.5	Das retardierte Potential	74
5.6	Strahlung zeitlich veränderlicher Ladungs- und Stromdichten	76
6	Elektromagnetische Wellen	81
6.1	Ebene Wellen	81
6.2	Reflexion und Brechung	83
6.3	Hohlraumwellen	85
6.4	Streuung von Licht	88

7	Spezielle Relativitätstheorie	91
7.1	Spezielles Relativitätsprinzip, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und Lorentz-Transformation . .	92
7.2	Kovariante Formulierung	93
7.3	Lorentz-Gruppe	96
7.4	Relativistische Stöße	96
7.5	Kovariante Maxwellgleichungen	98
7.6	Punktmasse im Feld	100
7.7	Beschleunigte Punktladungen	102

Kapitel 1

Vorbereitungen

1.1 Einleitung

Die Elektrodynamik ist eine *lokale Feldtheorie* im Gegensatz zur z.B. Newton'schen Gravitation, welche auch als *Fernwirkung* aufgefasst werden kann. Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ sind dynamisch und physikalisch real und üben auf eine Ladung q , welche sich am Ort $\mathbf{x}(t)$ aufhält und sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ bewegt, folgende Kraft aus:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t) = q\mathbf{E}(\mathbf{x}(t), t) + \frac{q}{c}\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)$$

mit Lichtgeschwindigkeit c .

Die Bewegungsgleichungen der Felder sind die Maxwellgleichungen (1864)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{aligned}$$

Dabei ist $\rho(\mathbf{x}, t)$ die Ladungsdichte und $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ die Stromdichte. Wir haben hier die Argumente \mathbf{x}, t unterdrückt und benutzen das Gauß'sche Einheitensystem. Die hier notierten Gleichungen beschreiben nicht allein die Wechselwirkungen zwischen Ladungen. Maxwell fand auch Wellenlösungen, stellte die Koinzidenz von deren Ausbreitungsgeschwindigkeit mit der experimentell gefundenen Lichtgeschwindigkeit fest und erkannte somit, dass Licht ein elektromagnetisches Phänomen ist.

Die Elektrodynamik bildet somit zusammen mit der – ggf. quantisierten – Mechanik die Grundlage der Beschreibung eines wichtigen Teils der Naturphänomene (also neben direkt erkenntlichen elektrischen und magnetischen Phänomenen auch von Strahlung und chemischen Bindungen).

Die Bedeutung von Maxwells Gleichungen reicht jedoch noch weiter. Sie sind forminvariant nicht unter den Galilei-Transformationen der klassischen Mechanik, sondern unter den Lorentz-Transformationen und führen so zur Relativitätstheorie.

Desweiteren sind diese Gleichungen das einfachste Beispiel einer Eichtheorie. In der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts wurde dann entdeckt, dass sowohl starken (Bindung von Protonen und Neutronen, . . .) als auch schwachen (β -Zerfall, Myonen-Zerfall, . . .) Wechselwirkungen zu dieser Kategorie gehören und dass die schwachen Wechselwirkungen sich mit dem Elektromagnetismus vereinheitlichen lassen (Higgs-Mechanismus, Glashow-Weinberg-Salam-Modell).

1.2 Tensorfelder

Tensoren sind zunächst durch ihre Wirkung auf einen Vektor definiert: $\mathbf{x} \xrightarrow{R} \mathbf{x}'$

Die Rotation ist eine lineare Transformation, lässt sich also durch eine Matrix darstellen: $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = R\mathbf{x}$

Darüber hinaus erhält sie die Länge der Vektoren:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \stackrel{!}{=} (R\mathbf{x}) \cdot (R\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad R^T R = I$$

R ist also eine orthogonale Matrix (im kartesischen Koordinatensystem). Wir können um die drei Raumachsen drehen mit

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Drehungen erfolgen durch Hintereinanderausführen und ergeben $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ mögliche Reihenfolgen.¹ Die Standardkonvention erfolgt über die Euler'schen Winkel $R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma)R_x(\beta)R_z(\alpha)$.

Summenkonvention

In der Einstein'schen Summenkonvention schreibt man z.B.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \equiv x_i y_i, \quad \mathbf{x}' = R\mathbf{x}' \Leftrightarrow x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j \equiv R_{ij} x_j$$

D.h. über Paare gleicher Indizes wird summiert und das Summenzeichen dabei unterdrückt.

Neben den Vektoren kategorisiert man Größen folgendermaßen nach ihren Transformationseigenschaften:

- Eine Größe S heißt (kartesischer) *Skalar*, wenn sie sich bei Rotationen nicht ändert: $S' = S$
- Ein Satz von Größen v_i , $i = 1, 2, 3$, heißt (kartesischer) *Vektor*, falls er sich unter Rotationen folgendermaßen transformiert (definierende Eigenschaft der Rotationen): $v'_i = R_{ij} v_j$
- Ein Satz von Größen $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$, $i_1, \dots, i_n = 1, 2, 3$, heißt (kartesischer) *Tensor* der Stufe n , falls er sich unter Rotationen folgendermaßen transformiert: $T'_{i_1 \dots i_n} = R_{i_1 j_1} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}$

Bemerkungen

- Die Geschwindigkeit ist ein Vektor:

$$v'_i = \frac{d}{dt} x'_i = \frac{d}{dt} (R_{ij} x_j) = R_{ij} \frac{d}{dt} x_j = R_{ij} v_j$$

- Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist ein Skalar (Rotationen erhalten Längen und Winkel):

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{w}' = v'_i w'_i = R_{ij} v_j R_{ik} w_k = v_j (R^T R)_{jk} w_k = v_j \delta_{jk} w_k = v_i w_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

- $aS_{i_1 \dots i_n} + bT_{i_1 \dots i_n}$ mit Tensoren S, T n -ter Stufe und $a, b \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) ist ein Tensor der Stufe n .
- $S_{i_1 \dots i_n} T_{j_1 \dots j_m}$ ist ein Tensor der Stufe $n + m$.
- Falls S ein Tensor der Stufe $n + r$ und T ein Tensor der Stufe $m + r$ ist, so ist U ein Tensor der Stufe $n + m$ (*Kontraktion*, gilt auch für Permutationen der Indizes).

$$S_{i_1 \dots i_n k_1 \dots k_r} = U_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} T_{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_r} \quad (1.1)$$

Pseudotensoren

$P_{ij} = -\delta_{ij}$ führt zu Spiegelungen ($\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$) und es gilt $\det P = -1$. P kann mit eigentlichen Drehungen verknüpft werden, d.h. $R^{(2)} = R^{(1)} P$.

Dann ist $T_{i_1 \dots i_n}$ ein *Pseudovektor*, wenn folgende Transformationseigenschaft gilt:

$$T'_{i_1 \dots i_n} = \det(R) R_{i_1 j_1} \dots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \quad (1.2)$$

Als Spezialfälle ergeben sich Pseudoskalar und Pseudovektor als Pseudotensoren der Stufe 0 bzw. 1.

¹Dies setzt voraus, dass nicht zwei gleiche Rotationen hintereinander ausgeführt werden.

Invariante Tensoren

Das Kroneckersymbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (1.3)$$

ist ein *invarianter Tensor*, da es in sich selbst transformiert:

$$\delta'_{ij} = R_{ik}R_{jl}\delta_{kl} = R_{ik}R_{jk} = R_{ik}R_{kj}^T = (RR^T)_{ij} = \delta_{ij}$$

Bemerkung:

Wir können das Skalarprodukt auch schreiben als $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_j \delta_{ij}$. Dabei sind dann $x_i y_j$ und δ_{ij} jeweils Tensoren 2. Stufe und nach Gl. (1.1) ist das Resultat ein Tensor 0. Stufe, also ein Skalar.

Das Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{für } (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.4)$$

ist ein Pseudotensor 3. Stufe:

$$\varepsilon'_{ijk} = \det(R)R_{ir}R_{js}R_{kt}\varepsilon_{rst} = \det(R)\varepsilon_{ijk}\det(R) = \varepsilon_{ijk}$$

Man nennt ε_{ijk} auch den *total antisymmetrischen Tensor*.

Wir können den ε -Tensor verwenden zur Definition des *Kreuzprodukts*: $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \varepsilon_{ijk}x_i y_j \mathbf{e}_k$

Bemerkung:

Sind \mathbf{x}, \mathbf{y} Vektoren, dann ist $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ ein Pseudovektor, da ε_{ijk} ein Pseudotensor 3. Stufe und $x_i y_j$ ein Tensor zweiter Stufe ist. Dies liefert einen Pseudotensor 1. Stufe, also einen Pseudovektor.

Ist dazu \mathbf{z} ein weiterer Vektor, dann ist $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ ein Pseudoskalar (Spatprodukt).

Nützliche Identitäten

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \quad (\text{Graßmann-Identität}) \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \quad (1.7)$$

Man kann diese anhand der verschiedenen Spezialfälle leicht nachweisen.

Beispiel: BAC-minus-CAP-Theorem

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \varepsilon_{ijk}a_i\varepsilon_{lmj}b_l c_m \mathbf{e}_k = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{lmj}a_i b_l c_m \mathbf{e}_k = (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{li})a_i b_l c_m \mathbf{e}_k \\ &= a_i c_i b_k \mathbf{e}_k - a_i b_i c_k \mathbf{e}_k = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Beispiel: Lagrange-Identität

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \varepsilon_{ijk}a_i b_j \varepsilon_{lmk}c_l d_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})a_i b_j c_l d_m = a_i c_i b_j d_j - a_i d_i b_j c_j \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \end{aligned}$$

Tensorfelder

Ein Satz von Funktionen $T_{i_1 \dots i_n}(x_k)$ heißt *Tensorfeld (der Stufe n)*, falls unter (aktiven) Rotationen gilt:

$$T'_{i_1 \dots i_n}(x'_k) = R_{i_1 j_1} \cdots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}(x_k) \quad (1.8)$$

d.h. das Ortsargument transformiert mit. Wegen $x_k = [R^{-1}]_{kl} x'_l$ kann man auch schreiben:

$$T'_{i_1 \dots i_n}(x_k) = R_{i_1 j_1} \cdots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}([R^{-1} \mathbf{x}]_k) \quad (1.9)$$

Betrachte nun die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} = \frac{\partial x_l}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x'_k} [R^{-1}]_{lm} x'_m \frac{\partial}{\partial x_l} = R_{lm}^T \frac{\partial x'_m}{\partial x'_k} \frac{\partial}{\partial x_l} = R_{ml} \delta_{mk} \frac{\partial}{\partial x_l} = R_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

Die partielle Ableitung transformiert also wie ein Vektor. Damit folgt:

Ist $T_{i_1 \dots i_n}$ ein Tensorfeld der Stufe n , dann ist $\frac{\partial}{\partial x_k} T_{i_1 \dots i_n}$ ein Tensorfeld der Stufe $n + 1$.

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial x'_k} T'_{i_1 \dots i_n}(x'_k) = R_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} (R_{i_1 j_1} \cdots R_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}(x_l)) = R_{kl} R_{i_1 j_1} \cdots R_{i_n j_n} \frac{\partial}{\partial x_l} T_{j_1 \dots j_n}(x_l)$$

Den Vektor der partiellen Ableitungen nennen wir *Gradient* und stellen diesen durch den Nabla-Operator dar:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} \quad (\nabla)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.10)$$

Divergenz (oder *Quelldichte*) eines Vektorfeldes \mathbf{A} : $\nabla \cdot \mathbf{A}$

Rotation (oder *Wirbeldichte*) eines Vektorfeldes \mathbf{A} : $\nabla \times \mathbf{A}$

Die Begriffe *Quell-* und *Wirbeldichte* erklären sich mit der Betrachtung der Integralsätze der Vektoranalysis.

Bemerkungen

Wirbelfelder sind quellenfrei:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k + \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k) = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k - \varepsilon_{jik} \partial_i \partial_j A_k) \\ &\stackrel{i \rightarrow j}{=} \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j - \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_i) A_k = 0 \end{aligned}$$

Gradientenfelder sind wirbelfrei:

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j \Phi \mathbf{e}_k = \mathbf{0}$$

Tensoren eignen sich also zur mathematischen Darstellung physikalischer Größen. Sie ändern sich daher unter Drehungen in bestimmter Weise.

Beispiele:

Skalar: Arbeit $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, Masse m, \dots

Vektor: Ort \mathbf{x} , Impuls \mathbf{p} , Kraft \mathbf{F} , elektrisches Feld \mathbf{E}, \dots

Pseudoskalar: Magnetischer Fluss $\Phi = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}, \dots$

Pseudovektor: Drehimpuls \mathbf{L} , Magnetische Flussdichte \mathbf{B}, \dots

Tensor: Trägheitstensor Θ_{ij} , Quadrupoltensor Q_{ij}, \dots

Tensoren haben keine direkte geometrische Interpretation wie Vektoren, jedoch lässt sich ihr Transformationsverhalten auf die grundlegenden Vektortransformationen zurückführen, z.B.

$$\begin{aligned} L_i &= \Theta_{ij} \omega_j & \Leftrightarrow & & L'_i &= \Theta'_{ij} \omega'_j & \Leftrightarrow \\ R_{ik} L_k &= R_{il} R_{jm} \Theta_{lm} R_{jn} \omega_n = R_{il} [R^T R]_{mn} \Theta_{lm} \omega_n = R_{il} \delta_{mn} \Theta_{lm} \omega_n = R_{il} \Theta_{lm} \omega_m = R_{il} L_l \end{aligned}$$

Gleichungen physikalischer Gesetze müssen auf beiden Seiten in gleicher Weise transformieren, d.h. wie ein (Pseudo-)Tensor n -ter Stufe. Man sagt, die Gleichungen sind *forminvariant* oder *kovariant*.

Beispiele:

Vektor: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (m Skalar, \mathbf{a} Vektor), $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ (∇ Vektor, Φ Skalar), $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (q/c Skalar, \mathbf{E} Vektor, \mathbf{v} Vektor, \mathbf{B} Pseudovektor, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ Vektor)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (\text{Skalar}) & \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (\text{Pseudovektor}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Pseudoskalar}) & \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\text{Vektor}) \end{aligned}$$

1.3 Integralsätze

Die hier verwendeten Sätze nach Gauß und Stokes in drei Raumdimensionen sind Spezialfälle eines verallgemeinerten Satzes von Stokes. Zur Anschauung lohnt sich aber die Begründung der für die Elektrodynamik relevanten Fälle.

Satz von Gauß

Betrachte den Fluss Φ eines Vektorfeldes \mathbf{F} durch eine Fläche A . $d\mathbf{a}$ sei dabei ein Flächenelement orientiert in Richtung der Normalen:

$$\Phi = \iint_{\mathbf{x} \in A} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} \stackrel{\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(u,v)}{=} \iint \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) du dv \quad (1.11)$$

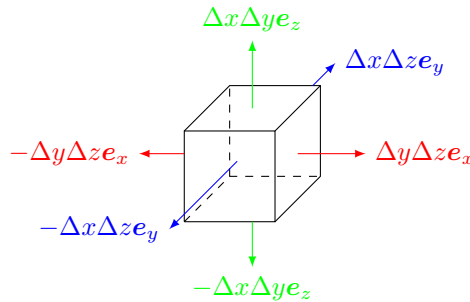
Für eine geschlossene Fläche ∂V um ein Volumen V gilt (wobei $\mathbf{x} \in \partial V$ bzw. $\mathbf{x} \in V$ gilt)

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV \quad (1.12)$$

Zur Begründung zerlegen wir V in viele (n) kleine Quader Q_i :

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \oiint_{\partial Q_i} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} \quad (1.13)$$

Dies ist so möglich, da aufgrund der gegensätzlichen Orientierung von $d\mathbf{a}$ Beiträge abstoßender Quader einander aufheben und nur die Außenfläche der Zerlegung beiträgt.

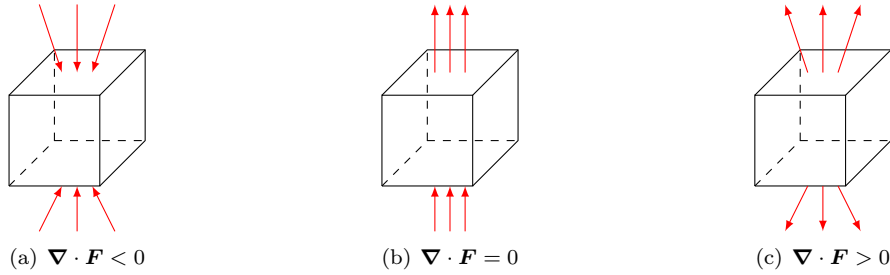


Für die einzelnen Quader gilt:

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial Q_i} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} &= (F_x(x + \Delta x, y, z) - F_x(x, y, z))\Delta y \Delta z + (F_y(x, y + \Delta y, z) - F_y(x, y, z))\Delta x \Delta z \\ &\quad + (F_z(x, y, z + \Delta z) - F_z(x, y, z))\Delta x \Delta y = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \nabla \cdot \mathbf{F} \Delta V \\ \Rightarrow \oiint_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} &= \sum_{i=1}^n \oiint_{\partial Q_i} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \Delta V_i = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV \end{aligned}$$

wobei dies im Grenzfall $\Delta V_i \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ gilt.

Zur Veranschaulichung des Begriffs *Quelldichte* skizzieren wir:



Satz von Stokes

Anstelle des Flusses betrachten wir nun die Zirkulation Γ eines Vektorfeldes entlang einer geschlossenen, eine Fläche A umschließenden Kurve ∂A .

$$\Gamma = \oint_{\mathbf{x} \in \partial A} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} \stackrel{\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt \quad (1.14)$$

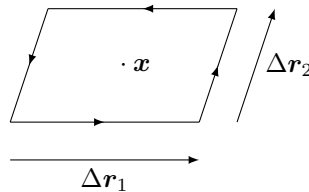
Das Flächenstück sei entsprechend der Rechte-Hand-Regel orientiert. Dann gilt

$$\oint_{\partial A} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{a} \quad (1.15)$$

Zur Begründung zerlegen wir A in viele (n) kleine Parallelegramme P_i , sodass

$$\oint_{\partial A} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \oint_{\partial P_i} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} \quad (1.16)$$

Dies gilt, da sich aufgrund der entgegengesetzten Orientierung von $d\mathbf{r}$ die Beiträge benachbarter Kanten einander aufheben.



In einem orientierten Flächenstück gilt:

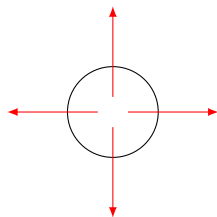
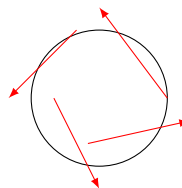
$$\Delta \mathbf{a} = \Delta \mathbf{r}_1 \times \Delta \mathbf{r}_2 \quad (1.17)$$

Damit folgt für den Satz von Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial P_i} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} &= \left(\mathbf{F} \left(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r}_2 \right) - \mathbf{F} \left(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r}_2 \right) \right) \cdot \Delta \mathbf{r}_1 + \left(\mathbf{F} \left(\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r}_1 \right) - \mathbf{F} \left(\mathbf{x} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r}_1 \right) \right) \cdot \Delta \mathbf{r}_2 \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} -((\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})) \cdot \Delta \mathbf{r}_2) \cdot \Delta \mathbf{r}_1 + ((\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})) \cdot \Delta \mathbf{r}_1) \cdot \Delta \mathbf{r}_2 \\ &= (\Delta \mathbf{r}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}})(\Delta \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})) - (\Delta \mathbf{r}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{x}})(\Delta \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x})) \\ &\stackrel{\text{Lagrange}}{=} (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})) \cdot (\Delta \mathbf{r}_1 \times \Delta \mathbf{r}_2) = (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})) \cdot \Delta \mathbf{a} \\ \Rightarrow \oint_{\partial A} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} &= \sum_{i=1}^n \oint_{\partial P_i} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})) \cdot \Delta \mathbf{a} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{a} \end{aligned}$$

Wiederum gilt dies im Grenzfall $\Delta \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$ und $n \rightarrow \infty$.

Zur Veranschaulichung des Begriffs *Wirbeldichte* skizzieren wir:

(d) $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (e) $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$

Spezialfälle

Satz von Gauß für Skalarfelder

Setze $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}\phi(\mathbf{x}) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{u} \cdot \nabla\phi$ (\mathbf{u} ist dabei ein ortsunabhängiger Vektor). Daraus folgt

$$\iiint_V \mathbf{u} \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}) \, d^3x = \iint_{\partial V} \mathbf{u}\phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} \quad (1.18)$$

Dies gilt für einen beliebigen Vektor \mathbf{u} und damit also komponentenweise:

$$\iiint_V \nabla\phi(\mathbf{x}) \, d^3x = \iint_{\partial V} \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{a} \quad (1.19)$$

Satz von Gauß für ein Kreuzprodukt

Setze $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{F} = \varepsilon_{ijk} \partial_i u_j b_k = -\varepsilon_{ijk} u_i \partial_j b_k = -\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$

Ebenso gilt²

$$\iint_{\partial V} (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{a} = \mathbf{u} \cdot \iint_{\partial V} \mathbf{b} \times d\mathbf{a} \quad (1.20)$$

Daraus folgt unmittelbar

$$-\mathbf{u} \cdot \iiint_V \nabla \times \mathbf{b} \, d^3x = \mathbf{u} \cdot \iint_{\partial V} \mathbf{b} \times d\mathbf{a} \quad (1.21)$$

Dies soll für beliebige \mathbf{u} gelten, also gilt

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{b}(\mathbf{x}) \, d^3x = - \iint_{\partial V} \mathbf{b} \times d\mathbf{a} \quad (1.22)$$

Green'sche Identitäten

Diese Aussagen ergeben sich als Anwendung des Satzes von Gauß und erweisen sich in der Elektrostatik als nützlich. In den folgenden Berechnungen betrachten wir die Skalarfelder $\varphi, \psi \in C^n(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, wobei $n \geq 2$, und ein Volumen V mit geschlossener Oberfläche ∂V , dessen Flächenelement $d\mathbf{a}$ sein soll.

Wir definieren $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})\nabla\psi(\mathbf{x})$ und berechnen

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = (\nabla\varphi) \cdot (\nabla\psi) + \varphi\Delta\psi \quad (1.23)$$

(wobei $\Delta = \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ der *Laplaceoperator* ist.)

Wir schreiben noch $d\mathbf{a} = \mathbf{n} \, da$ mit dem Normalenvektor \mathbf{n} sowie mit der *Normalenableitung*

$$(\nabla\psi) \cdot d\mathbf{a} = \frac{\partial\psi}{\partial n} \, da \quad (1.24)$$

Anwendung des Satzes von Gauß ergibt dann die

²Dies lässt sich leicht folgendermaßen nachweisen: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = a_i \varepsilon_{jki} b_j c_k = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

1. Green'sche Identität:

$$\iiint_V (\varphi \Delta \psi + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi)) \, d^3x = \iint_{\partial V} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, da \quad (1.25)$$

Vertauschen von φ und ψ und Bilden der Differenz ergibt die

2. Green'sche Identität:

$$\iiint_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \, d^3x = \iint_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \, da \quad (1.26)$$

Bemerkung

Mit $\varphi = 1$ folgt aus der 1. Green'schen Identität (1.25)

$$\iiint_V \Delta \psi \, d^3x = \iint_{\partial V} \frac{\partial \psi}{\partial n} \, da \quad (1.27)$$

1.4 Zur δ -Funktion

Die Dirac'sche δ -Funktion ist mathematisch eigentlich als Distribution zu behandeln. Für Anwendungen in der Physik ist es ausreichend, sich auf die vorteilhafte Eigenschaft zu berufen, dass die δ -Funktion unter dem Integral wie eine gewöhnliche Funktion manipuliert werden kann. Dies gilt insbesondere für Variablentransformationen und partielle Integrationen.

Anwendungen sind die Darstellung von Punktladungen und -massen, gehen aber auch weit darüber hinaus.

In einer Dimension soll gelten:³

$$\delta(x) = 0 \text{ für } x \neq 0 \quad \text{und} \quad \int \delta(x) \, dx = 1 \quad (1.28)$$

Also erhalten wir

$$\int \delta(x - a) f(x) \, dx = f(a) \quad (1.29)$$

Ist $g(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion mit nur einfachen Nullstellen x_n (also $g(x_n) = 0$, $g'(x_n) \neq 0$), dann gilt

$$\delta(g(x)) = \sum_{n=1}^k \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|} \quad (1.30)$$

Beweis:

In einer Umgebung von x_n schreibe

$$\int_{x_n - a}^{x_n + a} \delta(g(x)) f(x) \, dx \stackrel{y=g(x)}{=} \int_{y(x_n - a)}^{y(x_n + a)} \delta(y) f(x(y)) \frac{dx}{dy} \, dy$$

Ist $y(x_n + a) > y(x_n - a) \Rightarrow g'(x_n) > 0$. Falls dagegen $y(x_n + a) < y(x_n - a) \Rightarrow g'(x_n) < 0$. Allerdings ist die Richtung der dy -Integration umzukehren. In beiden Fällen ist somit durch $|g'(x_n)|$ zu teilen.

Ein wichtiger Spezialfall lautet

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \quad (1.31)$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

Die Ableitung der Stufenfunktion (1.32) ergibt die δ -Funktion, da

$$\int_{-\infty}^x \delta(x') \, dx' = \Theta(x)$$

Für die Ableitung der δ -Funktion gilt:

$$\int_p^q \delta'(x - a) f(x) \, dx = \left[\delta(x - a) f(x) \right]_{x=p}^{x=q} - \int_p^q \delta(x - a) f'(x) \, dx = -f'(a) \quad (1.33)$$

Für die dreidimensionale δ -Funktion schreiben wir mit $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ und $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$:

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (1.34)$$

In Kugelkoordinaten mit $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.35)$$

³Hier und auch in allen folgenden Kapiteln soll folgende Konvention (in beliebigen Dimensionen) gelten:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, d^n x \equiv \int f(\mathbf{x}) \, d^n x$$

Wir fassen (r, θ, φ) als Funktionen von (x, y, z) auf und gehen analog zur eindimensionalen Transformation vor. So gelangen wir zur Jacobi-Matrix:⁴

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \quad \det J = r^2 \sin \theta \quad (1.36)$$

Wir können die Abbildung $(r, \theta, \varphi) \mapsto \mathbf{r} = (x, y, z)^T$ analog zu $x \mapsto y(x) = g(x)$ im eindimensionalen Fall auffassen, wobei dann $|g'(x)| = \left| \frac{dy}{dx} \right|$ die Entsprechung $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right| = |\det J|$ hat. Daraus ergibt sich für die δ -Distribution

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin \theta_0} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (1.37)$$

Im Integrationsmaß ist wiederum die Jacobi-Determinante zu berücksichtigen, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \iiint \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}) \, d^3r &= f(\mathbf{r}_0) = \iiint \frac{1}{r_0^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) f(\mathbf{r}) \, d^3r \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{1}{r_0^2 \sin \theta_0} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) f(\mathbf{r}) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = f(\mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

Die δ -Funktion kann auch als Grenzfall von Folgen stetiger Funktionen erhalten werden. Zum Beispiel gilt für die Gaußfunktion

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-x/\sigma^2} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dx = 1 \quad (1.38)$$

und dass $g(x)$ für $x \neq 0$ für $\sigma \rightarrow \infty$ beliebig nach Null geht. Ein weiteres in der Physik wichtiges Beispiel ist die Lorentzkurve

$$L_\varepsilon(x - a) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x - a)^2 + \varepsilon^2} \quad \delta(x - a) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} L_\varepsilon(x - a) \quad (1.39)$$

Wir zeigen nun noch die wichtige Identität

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \quad (1.40)$$

Es ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit erlaubt, durch Verschieben des Koordinatenursprungs $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ zu wählen. Für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ erhalten wir mit $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$:

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = -\frac{3}{|\mathbf{x}|^3} + 3 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^5} \cdot \mathbf{x} = 0$$

Für \mathbf{x} gibt es allerdings noch einen singulären Anteil, welchen wir durch sein Verhalten unter dem Integral charakterisieren:

$$\iiint_V \Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} \, d^3x = \oiint_{\partial V} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \, da = \oiint_{\partial V} \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} \cdot d\mathbf{a} = - \oiint_{\partial V} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot d\mathbf{a}$$

Da der Integrand des Volumenintegrals nur im Ursprung verschieden von Null ist, können wir V als eine Kugel mit Radius R wählen, ohne den Wert der Integrale zu ändern.

$$= - \oiint_{\partial V} \frac{1}{R^2} \, da = -4\pi R^2 \frac{1}{R^2} = -4\pi$$

Insgesamt gilt also $\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = 0$ für $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}$ und

$$\iiint \Delta \left(-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \, d^3x = 1$$

d.h. wir finden die definierenden Eigenschaften der δ -Funktion.

⁴Eine Merkregel für die Jacobi-Matrix ist z.B. $J_{ij} = \partial x_i / \partial x_j$.

1.5 Helmholtz'scher Zerlegungs- und Eindeutigkeitsatz

Sei $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld, welches im Unendlichen hinreichend schnell gegen Null strebt. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung in $\mathbf{F} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ mit $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ und $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{V}$, wobei Φ ein Skalarfeld und \mathbf{V} ein Vektorfeld ist. Damit ist \mathbf{u} rotations- und \mathbf{v} divergenzfrei.

Zum Beweis der Zerlegung zeigen wir, dass wir wählen können:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \quad (1.41)$$

Wir bemerken noch, dass gilt

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{lmj} \frac{\partial}{\partial x_l} U_m \mathbf{e}_k = (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{li}) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_l} U_m \mathbf{e}_k = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \Delta \mathbf{U} \quad (1.42)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \iiint \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y &= \frac{1}{4\pi} \nabla_x \iiint \nabla_x \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y - \frac{1}{4\pi} \iiint \Delta_x \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \\ &= -\frac{1}{4\pi} \nabla_x \iiint \mathbf{F}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \iiint \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{F}(\mathbf{y}) d^3y \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \nabla_x \iiint \nabla_y \cdot \mathbf{F}(\mathbf{y}) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \frac{1}{4\pi} \nabla_x \iiint \frac{\nabla_y \cdot \mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \nabla_x \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \cdot d\mathbf{a} - \nabla\Phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Dabei geht der zweite Summand im Grenzfalle $\partial V \rightarrow \infty$ gegen $\mathbf{0}$, da nach Voraussetzung $|\mathbf{F}(\mathbf{y})|$ für $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$ schneller als $\frac{1}{|\mathbf{y}|}$ abfällt. Wir erhalten somit als Zwischenergebnis

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \iiint \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

Wobei hier gilt

$$\begin{aligned} \nabla_x \times \iiint \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y &= \iiint \mathbf{F}(\mathbf{y}) \times \nabla_y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \\ &= -\iiint \nabla_y \times \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \iiint \frac{\nabla_y \times \mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \stackrel{(1.22)}{=} \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \times d\mathbf{a} + 4\pi \mathbf{V}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Aus demselben Argument wie oben verschwindet das Oberflächenintegral und die Rotation des zweiten Summanden liefert $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Insgesamt folgt damit die Zerlegung.

Die Eindeutigkeit folgt, wenn wir zeigen: $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ist eindeutig festgelegt, wenn für alle Raumpunkte $\nabla \cdot \mathbf{F}$ und $\nabla \times \mathbf{F}$ bekannt sind.

Beweis:

Betrachte zwei Felder mit $\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = \nabla \cdot \mathbf{F}_2$ und $\nabla \times \mathbf{F}_1 = \nabla \times \mathbf{F}_2$. Definiere $\mathbf{D}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_2(\mathbf{x})$. Daraus folgt $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{0}$.

Aufgrund der Rotationsfreiheit können wir $\mathbf{D} = \nabla\psi$ schreiben und zusammen mit der Divergenzfreiheit folgt dann $\Delta\psi = 0$. Wir wenden nun die erste Green'sche Identität (1.25) für $\varphi = \psi$ an:

$$\iiint \underbrace{(\psi \Delta\psi)}_{=0} + (\nabla\psi) \cdot (\nabla\psi) d^3x = \oint_{\partial V} \psi \nabla\psi \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Das Oberflächenintegral verschwindet für hinreichend stark abfallendes ψ . Insgesamt gilt also

$$\iiint (\nabla\psi)^2 d^3x = 0$$

Und da der Integrand überall positiv ist, gilt auch $\mathbf{D} = \nabla\psi = \mathbf{0}$, sodass $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x}$.

Bemerkungen

- Ein rotationsfreies Feld ist damit ein Gradientenfeld, weil es sich eindeutig als $\mathbf{F} = \nabla\Phi$ schreiben lässt.
- Ein divergenzfreies Feld ist ein Rotationsfeld, da es sich eindeutig als $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{V}$ schreiben lässt.
- Wir bezeichnen $\Phi(\mathbf{x})$ als *Skalarpotential* und $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ als *Vektorpotential* von $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Diese erfüllen die Gleichungen

$$\Delta\Phi = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad \Delta\mathbf{V} = -4\pi \cdot \frac{1}{4\pi} \iiint (\nabla_y \times \mathbf{F}(\mathbf{y})) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d^3y = -\nabla \times \mathbf{F} \quad (1.43)$$

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik

Wir betrachten ruhenden Ladungen und nehmen an, externe Magnetfelder und Ströme sind abwesend. Die Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik ergeben sich aus der Messung der Coulomb-Kraft $\mathbf{F}_{1,2}$ zwischen zwei punktförmigen Ladungen q_1 und q_2 . Die *Coulomb-Kraft*

- ist direkt proportional zu q_1 und q_2 ,
- ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands der beiden Ladungen,
- wirkt entlang der Verbindungslinie der Ladungen,
- ist abstoßend für gleichnamig und anziehend für ungleichnamige Ladungen,
- erfüllt „Actio = reactio“.

Es gilt also das *Coulomb-Gesetz*.

Coulomb-Gesetz

<p>Coulomb-Gesetz</p> $\underbrace{\mathbf{F}_{1,2}}_{\text{Kraft auf } q_1} = kq_1q_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 ^3} = - \underbrace{\mathbf{F}_{2,1}}_{\text{Kraft auf } q_2} \quad (2.1)$
--

Dabei sind $\mathbf{x}_{1,2}$ die Positionen von $q_{1,2}$ und k ist eine positive Konstante.

Wir definieren nun das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ durch die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, welche eine punktförmige Testladung q am Ort \mathbf{x} erfährt. Für diese gilt der Zusammenhang $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = q\mathbf{E}(\mathbf{x})$.

Das von q_1 erzeugte Feld hat also die Form:

<p>Feld einer Punktladung</p> $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = kq_1 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 ^3} \quad (2.2)$
--

Wir wählen $k = 1$, sodass die Einheit der Ladung durch die Ladungsmenge definiert werden kann, welche eine Einheit der Kraft auf eine gleiche Ladung im Abstand von einer Längeneinheit ausübt. Es ist üblich als Basiseinheiten im *Gauß'schen System* Zentimeter, Gramm und Sekunde zu wählen. Daher rührt auch die Abkürzung *cgs-System*. Es ergeben sich somit bezüglich des SI-Systems neue Einheiten.

$$1 \text{ dyne} = 1 \frac{\text{g cm}}{\text{s}^2} = 10^{-5} \text{ N}$$
$$1 \text{ Fr} = 1 \text{ statC} = 1 \text{ cm} \sqrt{\text{dyne}} = 1 \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ s}^{-1} \approx 3,34 \cdot 10^{-10} \text{ C}$$

Hierbei ist die Einheit der Kraft dyne. Für Ladungen der Menge von 1 Franklin (Fr) gilt, dass diese im Abstand von 1 cm eine Kraft von 1 dyne aufeinander ausüben. Zum Vergleich geht man im SI-System von der zusätzlichen Basiseinheit Ampere aus und der Ladungseinheit 1 C=1 As. Die Kraft, welche zwei Ladungen von Q=1C im Abstand von r=1cm aufeinander ausüben, ist 1 Franklin.

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{r^2} \Rightarrow [\mathbf{F}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{m}^2}$$

In den Proportionalitätsfaktor geht dann die elektrische Feldkonstante, auch bekannt als Dielektrizitätskonstante, $\epsilon_0 = 8,854 \dots \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ ein. Für die Umrechnung der Einheiten gilt: $1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}} \rightarrow 1 \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = 1 \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{Nm}^2}$. In diesem Zusammenhang ist also $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$. Aufgrund der Wahl der Basiseinheiten m, kg, und A spricht man hier auch vom *MKSA-System*. Wir werden später noch die Maxwell-Gleichungen in den verschiedenen Einheitensystemen diskutieren, kehren nun aber zur Elektrostatik zurück.

Weiterhin beobachtet man, dass das *Superpositionsprinzip* gilt:

Die von einzelnen Punktladungen erzeugten Felder addieren sich vektoriell zum Gesamtfeld.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m q_i \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \quad (2.3)$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen finden wir im Volumenelement d^3x' die Ladung $dq = \rho(\mathbf{x}')d^3x'$, wobei $\rho(\mathbf{x}')$ die Ladungsdichte ist. Somit lässt sich das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ wie folgt schreiben.

$$d\mathbf{E}(\mathbf{x}) = dq \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \iiint \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'$$

Der Fluss des durch die Oberfläche ∂V eines Volumens V ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = \iiint_V \iiint \rho(\mathbf{x}') \nabla_x \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' d^3x = - \iiint_V \iiint \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' d^3x \\ &= 4\pi \iiint_V \iiint \rho(\mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3x' d^3x = 4\pi \iiint_V \rho(\mathbf{x}) d^3x \end{aligned}$$

Diese Beziehung nennt man das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik. Wenden wir darauf den Gauß'schen Satz an, so erhalten wir

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) - 4\pi\rho) d^3x = 0 \quad (2.4)$$

Da dies für beliebige V gilt, erhalten wir eine der Maxwell-Gleichungen, welche auch die differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes genannt wird:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (2.5)$$

Als Nächstes sehen wir, dass \mathbf{E} in der Elektrostatik ein Gradientenfeld ist.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \iiint \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' = - \iiint \rho(\mathbf{x}') \nabla_x \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = -\nabla \iiint \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'$$

Das Elektrische Feld ist in der Elektrostatik als rotationsfrei.

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

Während das Gauß'sche Gesetz auch für zeitabhängige Felder gültig ist, werden wir letztere Beziehung in der Elektrodynamik noch modifizieren müssen.

Es liegt nahe, nun den Helmholtz'schen Satz anzuwenden und das skalare Potential ϕ zu definieren.

$$\phi(\mathbf{x}) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (2.7)$$

Es besteht ein natürlicher Zusammenhang mit der mechanischen Arbeit, welche zu verrichten ist, eine Ladung q von einem Punkt A zu einem Punkt B entlang der Kurve \mathbf{l} zu bringen.

$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B d\phi = q(\phi_B - \phi_A) \quad (2.8)$$

Hier bezeichnen $\phi_{A,B}$ das Potential am jeweiligen Punkt. Damit hat $q\phi$ die Bedeutung der potentiellen Energie des Testteilchens im elektrostatischen Feld.

Weiterhin gilt für das Linienintegral

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \phi_A - \phi_B \quad (2.9)$$

und somit für geschlossenen Wege $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, wobei A die umschlossene Fläche sei. Dies folgt eben aus dem Stokes'schen Satz, der ebenso $\iint_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = 0$ liefert. Da A beliebig ist, finden wir wiederum $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Konservative Kraftfelder sind eben rotationsfrei.

Für vorgegebene Ladungsverteilungen können wir das skalare Potential sowie das elektrische Feld durch Berechnung eines Integrals bestimmen. Dazu betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel: Rotationssymmetrische Ladungsverteilung

$\rho(\mathbf{r}) \equiv \rho(r)$ mit $r = |\mathbf{r}|$. Integriere über d^3r' , $r' = |\mathbf{r}'|$ und mit den Winkeln φ und θ von \mathbf{r}' relativ zu \mathbf{r} . Somit lässt sich der Betrag des Differenzvektors wie folgt schreiben:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \int_0^\infty r'^2 \frac{\rho(r')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} dr' d\theta d\varphi &= 2\pi \int_0^\infty r'^2 \rho(r') \left[\frac{1}{rr'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta} \right]_{\cos \theta = -1}^{\cos \theta = 1} dr' = \\ &= 2\pi \int_0^\infty r' \frac{\rho(r')}{r} [(r + r') - |r - r'|] dr' = \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty r' \rho(r') dr' \begin{cases} 2r' & \text{für } r' < r \\ 2r & \text{für } r' > r \end{cases} = 4\pi \left(\frac{1}{r} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' + \int_r^\infty r' \rho(r') dr' \right) \end{aligned}$$

Die Ladungsdichte muss damit schneller als $\frac{1}{r^2}$ fallen, damit das Integral konvergiert.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) = - \underbrace{\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}}_{\hat{\mathbf{r}}} \frac{\partial}{\partial r} \phi(\mathbf{r}) = 4\pi \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'$$

Man beachte dabei, dass die Ableitungen, welche auf die Integrationsgrenzen wirken, sich herausheben. Alternativ können wir den Gauß'schen Satz mit Volumen V einer Kugel von Radius r anwenden:

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi r^2 |\mathbf{E}(\mathbf{r})| = 4\pi \int_0^r r'^2 \underbrace{4\pi \rho(r')}_{\nabla \cdot \mathbf{E}} dr' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'$$

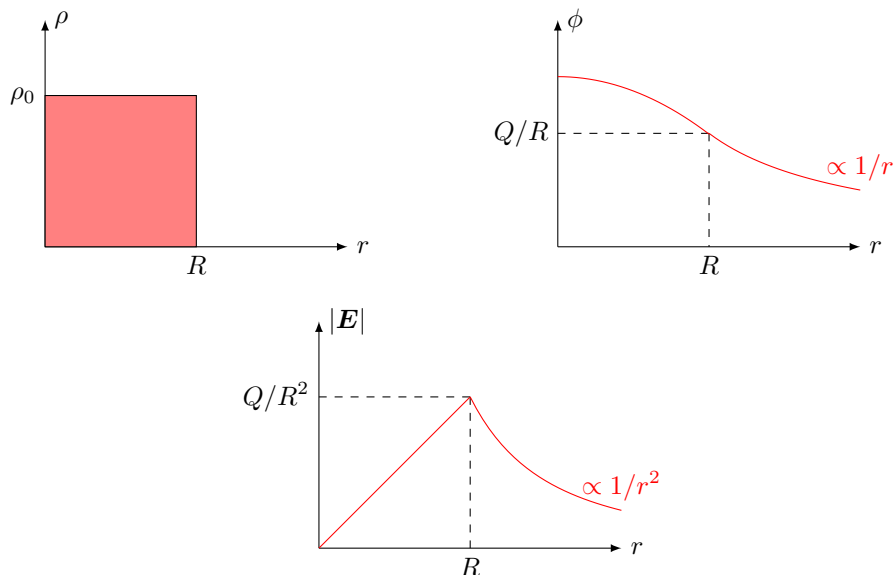
Wir illustrieren dieses Resultat für eine homogene Ladungsdichte innerhalb R mit der Gesamtladung Q .

Die Ladungsdichte sieht wie folgt aus: $\rho(r) = \rho_0 \Theta(R - r)$, $\rho_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

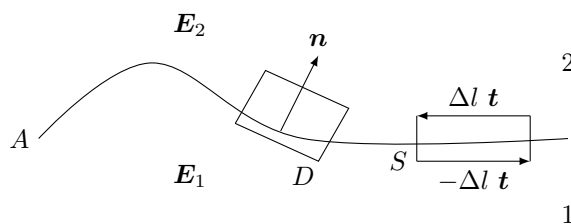
Als Potentialterme ergeben sich dann:

$$\begin{aligned} r < R: \phi(r) &= \frac{3Q}{R^3} \left(\frac{r^2}{3} - \frac{r^2}{2} + \frac{R^2}{2} \right) = \frac{Q}{2R^3} (3R^3 - r^2) \\ r > R: \phi(r) &= \frac{3Q}{R^3} \frac{1}{r} \frac{R^3}{3} = \frac{Q}{r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{E}(r)| = -\phi'(r) = \begin{cases} \frac{Q}{R^3} & \text{für } r < R \\ \frac{Q}{r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$



Flächenladung



Fläche A mit Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ für $\mathbf{r} \in A$. Die Flächennormale \mathbf{n} zeige von Seite 1 zur Seite 2. Um die Fläche A wird ein Gauß'sches Kästchen D der Höhe d (vernachlässigbar klein) gelegt.

$$\Rightarrow \iiint_D \rho(\mathbf{x}) \, d^3x = A \cdot \sigma = \frac{1}{4\pi} \oiint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{A}{4\pi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1)$$

Mit A beliebig folgt: $\mathbf{n}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 4\pi\sigma$

D.h. die Normalkomponente des elektrischen Feldes springt beim Durchgang durch eine geladenen Fläche um 4π mal der Flächenladungsdichte.

Lege nun eine Schleife S der Länge Δl tangential entlang eines Vektors \mathbf{t} in A .

$$\iint_S (\underbrace{\nabla \times \mathbf{E}}_{=0}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \Delta l \, \mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

Dies gilt für beliebige Tangentenvektoren, also können wir schreiben $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$.

Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes sind stetig beim Durchgang durch eine geladenen Fläche. Ein wichtiger Spezialfall ist die Oberfläche eines Leiters (z.B. Metall). Innerhalb verschwindet das Potential und damit auch das \mathbf{E} -Feld. Das Feld steht senkrecht auf der Oberfläche und führt zur Influenzladung $\sigma = \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$.

Wir betrachten noch eine Dipolschicht, welche durch zwei Flächenladungen $\pm\sigma$ im Abstand d erzeugt wird:

$$\begin{aligned}
 D(\mathbf{x}) &= \lim_{d(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \sigma(\mathbf{x})d(\mathbf{x}) \\
 \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) &= \iint_S \left(\frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}' + \mathbf{n}'d|} \right) da' \\
 \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}|} &\stackrel{a \equiv |\mathbf{a}| \ll |\mathbf{x}| \equiv x}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}} = \frac{1}{x} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{x^3} + \dots = \frac{1}{x} + \mathbf{a} \cdot \nabla \cdot \frac{1}{x} + \dots \\
 \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) &= \iint_S \sigma(\mathbf{x}') d\mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' = \iint_S D(\mathbf{x}') \mathbf{n}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da' = \iint_S D(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} da'
 \end{aligned}$$

2.2 Energiedichte des elektrischen Feldes

Wir können das skalare Potential ϕ so wählen, dass es in der feldfreien Region im Unendlichen verschwindet. Die Arbeit, eine Ladung q_i vom Unendlichen zu einem Punkt \mathbf{x}_i zu befördern ist dann $W_i = q_i \cdot \phi(\mathbf{x}_i)$. Angenommen, das Potential wird erzeugt von $n - 1$ Ladungen q_j ($j = 1, 2, \dots, n - 1$), dann lautet es

$$\phi(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad \Rightarrow \quad W_i = q_i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

Bringen wir die Ladungen nacheinander aus dem Unendlichen in die gegebene Konfiguration, so ist folgende Arbeit zu leisten:

$$W = \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (1 - \delta_{ij}) \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilung (oberer Fall der Punktladungen ergibt sich mit Gebrauch der δ -Distribution) ergibt sich:

$$W = \frac{1}{2} \iiint \iiint \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' d^3x = \frac{1}{2} \iiint \rho(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) d^3x$$

In dieser Herangehensweise wird die Energie als potentielle Energie der Ladungen interpretiert. Wir zeigen nun, dass diese im elektrischen Feld „gespeichert“ ist.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint \frac{\phi(\mathbf{x})}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = -\frac{1}{8\pi} \iiint \phi(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) d^3x \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{8\pi} \iiint |\nabla \phi(\mathbf{x})|^2 d^3x = \frac{1}{8\pi} \iiint |\mathbf{E}|^2 d^3x \end{aligned}$$

Somit ist nun auch der Zusammenhang zwischen dem Elektrischen Feld einer Ladungsverteilung und der Potentiellen Energie einer Ladung unter dem Einfluss des Feldes

Energie des elektrischen Feldes

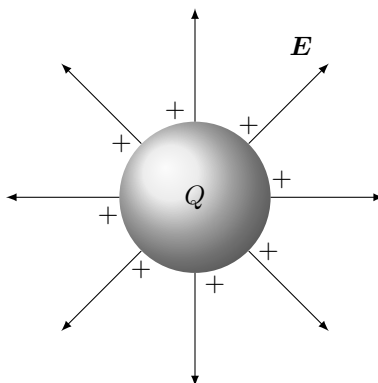
$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint |\mathbf{E}|^2 d^3x \quad (2.10)$$

Die Energiedichte des elektrischen Feldes ist also

Energiedichte des elektrischen Feldes

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 \quad (2.11)$$

Beispiel: Geladene Metallkugel mit Radius r



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \hat{\mathbf{r}} \quad r \equiv |\mathbf{r}| \quad E \equiv |\mathbf{E}|$$

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} = 4\pi \iiint_V \rho(\mathbf{r}) d^3r \stackrel{\text{außerhalb}}{\Rightarrow} 4\pi r^2 E(r) = 4\pi Q$$

$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{r^2} & \text{für } r > R \\ 0 & \text{für } r < R \end{cases} \quad \text{Energie der Flächenladungsdichte } \rho = \frac{Q}{4\pi R^2}:$$

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{|\mathbf{x}|=R} \left(\iiint_{|\mathbf{x}'|=R} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \right) d^3 x$$

$$\frac{1}{2} \iiint_{|\mathbf{x}|=R} \left(\iiint_{|\mathbf{x}'|=R} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \right) d^3 x = \frac{1}{2} 4\pi R^4 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}R(1 - \cos \theta)} d \cos \theta d\varphi = \frac{4\pi^2 R}{\sqrt{2}} \left[-2\sqrt{1-x} \right]_{x=-1}^{x=1} = 8\pi^2 R^3$$

Im Vergleich zur Feldenergie:

$$W = \frac{4\pi}{8\pi} \int_R^\infty r^2 \left(\frac{Q}{r^2} \right)^2 dr = \frac{Q^2}{2} \left[\frac{-1}{r} \right]_R^\infty = \frac{Q^2}{2R}$$

2.3 Randwertprobleme der Elektrostatik

Mit dem Gauß'schen Gesetz $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ und $\mathbf{E} = -\nabla \cdot \phi$ folgt die *Poisson-Gleichung*:

Poisson-Gleichung	$\Delta\phi = -4\pi\rho$	(2.12)
--------------------------	--------------------------	--------

In Regionen ohne Ladungsdichte erhalten wir die *Laplace-Gleichung*:

Laplace-Gleichung	$\Delta\phi = 0$	(2.13)
--------------------------	------------------	--------

Wir können sofort nachprüfen, dass die Lösung für ϕ bei vorgegebener Ladungsverteilung die Poisson-Gleichung löst:

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = \Delta \iiint \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' = -4\pi \iiint \rho(\mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3x' = -4\pi\rho(\mathbf{x})$$

Ist $\rho(\mathbf{x})$ auf eine Raumregion beschränkt, so ist klar, dass $\phi(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, d.h. ϕ erfüllt eine gewisse Randbedingung. Andere Randbedingungen können offenbar durch Addition von Lösungen zur Laplace-Gleichung erfüllt werden.

Zur weiteren Diskussion dieser allgemeineren Randbedingungen erinnern wir uns zunächst an die 2. Green'sche Identität (1.26)

$$\iiint_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) d^3x' = \iint_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n'} \right) da'$$

und setzen darin $\varphi = \psi$ sowie $\psi = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$

$$\Rightarrow \iiint_V \left(-4\pi\phi(\mathbf{x}')\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{4\pi}{R}\rho(\mathbf{x}') \right) d^3x' = \iint_{\partial V} \left(\phi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial n'} \right) da'$$

Aufgelöst nach ϕ gilt für $\mathbf{x} \in V$:

$$\phi(\mathbf{x}) = \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{R} d^3x' + \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial\phi}{\partial x'} - \phi \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{R} \right) da' \quad (2.14)$$

Der erste Zusatzterm entspricht dem von einer Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\phi}{\partial n'}$ erzeugten Potential. Der zweite Term wird von einer Flächendipoldichte $-\frac{\phi}{4\pi}$ erzeugt.

Kategorisierung der Randbedingungen

<p><i>Dirichlet Randbedingung:</i> $\phi(\mathbf{x})$ ist auf einer geschlossenen Fläche ∂V vorgegeben.</p> <p><i>Neumann Randbedingung:</i> $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla\phi$ (d.h. die Normalkomponente des \mathbf{E}-Feldes) ist auf geschlossener Fläche ∂V vorgegeben.</p>

Die Vorgabe von Dirichlet *oder* Neumann Bedingungen bestimmt ϕ innerhalb von V eindeutig.

Beweis:

Seien $\phi_{1,2}$ zwei Lösungen, betrachte die Differenz $u = \phi_1 - \phi_2$.

$\Rightarrow \Delta u = 0$ im Volumen V und $u = 0$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf ∂V . Benutze die 1. Green'sche Identität mit $\phi = \psi = u$.

$$\Rightarrow \iiint_V (\nabla u)^2 d^3x = \iint_{\partial V} u \frac{\partial u}{\partial n} da = 0$$

Dies gilt, da wenigstens ein Faktor im 2. Term verschwindet.

Damit ist $\nabla u \equiv \mathbf{0}$ und somit $u \equiv \text{const.}$ innerhalb von V . Dirichlet liefert $u \equiv 0$ wegen der Stetigkeit in V .

Mit Neumann gilt: Die Differenz zwischen den Lösungen ist eine Konstante ohne Konsequenz für das physikalische Feld \mathbf{E} .

Bemerkung: Faraday-Käfig

Ladungsfreier Innenraum einer geschlossenen Metallfläche:

Gegeben ist, dass $\Delta\phi = 0$ in V und $\phi = \text{const.}$ auf ∂V sind. Offenbar ist somit $\phi = \text{const.}$ eine Lösung in V , und diese ist eindeutig, so dass immer $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ innerhalb V gelten muss.

Green'sche Funktion

Die allgemeine Lösung zu

$$\Delta_x G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

lautet

Green'sche Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{ \mathbf{x} - \mathbf{x}' } + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (2.15)$
--

mit einer Lösung der Laplace-Gleichung (2.13) $\Delta_x F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$. Damit folgt für das Potential

$\phi(\mathbf{x}) = \iiint_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x' \quad (2.16)$
--

G heißt Green'sche Funktion, und den Randbedingungen ist durch geeignete Wahl von F zu genügen. Dazu wollen wir in obiger Integralgleichung für ϕ , in welcher sowohl Dirichlet- als auch Neumann-Randterme auftreten, jeweils einen Typ Randterm eliminieren. Wir verallgemeinern in obiger Lösung zunächst $\psi(\mathbf{x}') = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ und erhalten so.

$$\phi(\mathbf{x}) = \iiint_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left(G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right) da'$$

Für *Dirichlet-Randbedingungen* verlangen wir nun $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ für $\mathbf{x}' \in \partial V$

Potential nach Dirichlet $\implies \phi(\mathbf{x}) = \iiint_V G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\rho(\mathbf{x}') d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left(G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right) da' \quad (2.17)$

Wobei $\rho(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in V$ und $\phi(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in V$ vorgegeben sind.

Wir zeigen noch, dass G_D symmetrische ist, also $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_D(\mathbf{x}', \mathbf{x})$.

Beweis:

Setze in 2. Green'sche Identität (1.26) mit $\phi(\mathbf{y}') = G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ und $\psi(\mathbf{z}') = G_D(\mathbf{z}, \mathbf{x}')$ ein.

$$\begin{aligned} \implies -4\pi \iiint_V (G_D(\mathbf{y}, \mathbf{x}')\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{z}) - G_D(\mathbf{z}, \mathbf{x}')\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{y})) d^3x' &= 4\pi(G_D(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - G_D(\mathbf{y}, \mathbf{z})) \\ &= \oint_{\partial V} (G_D(\mathbf{y}, \mathbf{x}')\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} G_D(\mathbf{z}, \mathbf{x}') - G_D(\mathbf{z}, \mathbf{x}')\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} G_D(\mathbf{y}, \mathbf{x}')) da' = 0 \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

Physikalisch bedeutet dies, dass die Green'sche Funktion die Wechselwirkungsenergie zweier Punktladungen in Gegenwart von Bildladungen wiedergibt (also z.B. die Dipolfäche), welche die Potentiale der Punktladungen abschirmen.

Zur Erfüllung von *Neumann-Randbedingungen* merken wir zunächst an:

$$\Delta_{\mathbf{x}'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \stackrel{\text{Gauß}}{\implies} \oint_{\partial V} \frac{\partial G}{\partial n'} da' = -4\pi$$

Wir verlangen daher

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{4\pi}{S}$$

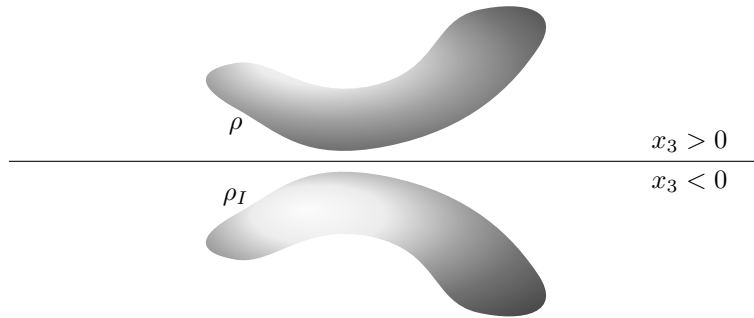
wobei S die Fläche von ∂V ist.

Mit $\langle \phi \rangle_S = \frac{1}{S} \oint_{\partial V} \phi(\mathbf{x}') da'$ erhalten wir die Lösung des Neumann-Problems.

Potential nach Neumann

$$\phi(\mathbf{x}) = \langle \phi \rangle_S + \iiint_V G_N(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d^3x' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\partial \phi}{\partial n'} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') da' \quad (2.18)$$

Beispiel: Punktladung vor unendlich ausgedehnter geerdeter Platte



V ist der obere Halbraum $x_3 > 0$, ∂V die x_1x_2 -Ebene.

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{q_I}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^I|} = 0 \quad \forall \mathbf{x}' \in \partial V$$

Mit $x_1^I = x_1'$, $x_2^I = x_2'$, $x_3^I = x_3'$ und $q_I = -1$ erfüllen wir diese Randbedingungen.

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 + x_3')^2}}$$

\implies symmetrisch in $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$

Diese Green'sche Funktion stellt eine zur wahren Ladungsdichte entgegengesetzte fiktive Ladung auf der anderen Seite der Platte dar.

Wir setzen nun eine Punktladung Q in den Punkt $\mathbf{x}' = (0, 0, a)^T$

$$\rightarrow \phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a)^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + a)^2}} \quad \text{für } x_3 > 0$$

Elektrisches Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \phi(\mathbf{x}) = \frac{Q(x_1, x_2, x_3 - a)^T}{(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a)^2)^{3/2}} - \frac{Q(x_1, x_2, x_3 + a)^T}{(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 + a)^2)^{3/2}}$$

Auf der Platte $x_3 = 0$:

$$\mathbf{E}((x_1, x_2, 0)^T) = \frac{-2Qa}{(x_1^2 + x_2^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{e}_3$$

Wie erwartet steht diese normal zur Grenzfläche.

Influenzladung:

$$\sigma = \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}}{4\pi} = -\frac{1}{2\pi} \frac{Qa}{(x_1^2 + x_2^2 + a^2)^{3/2}}$$

Influenzladung insgesamt:

$$Q_I = \int \sigma dx_1 dx_2 = -\frac{Qa}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + a^2)^{3/2}} dr d\varphi = -Qa \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right]_0^\infty = -Q$$

Q wird von der Influenzladung mit der entgegengesetzten Kraft angezogen, welche es selbst auf die Metallplatte ausübt:

$$\mathbf{F} = \int \sigma(x_1, x_2) \mathbf{E}_Q((x_1, x_2, 0)^T) dx_1 dx_2 \quad (\text{Kraft auf die Platte})$$

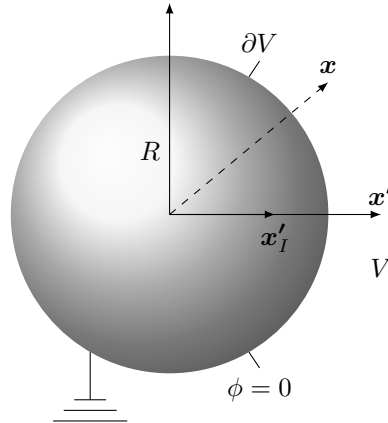
Dabei ist \mathbf{E}_Q der allein von Q erzeugte Beitrag zum Feld:

$$\mathbf{E}_Q = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -a \end{pmatrix} \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{e}_z \frac{Qa}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{rQa}{(r^2 + a^2)^3} dr d\varphi = \mathbf{e}_z Q^2 a^2 \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{(r^2 + a^2)^2} \right]_0^\infty = \mathbf{e}_z \frac{Q^2}{(2a)^2}$$

Dies entspricht der Coulomb-Wechselwirkung von zwei entgegengesetzten Ladungen $\pm Q$ im Abstand $2a$.

Beispiel: Geerdete Metallkugel



Als Ansatz setzen wir wieder eine Bildladung an einem Punkt $\mathbf{x}_I || \mathbf{x}'$:

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{q_I}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^I|}$$

Randbedingungen $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ für $|\mathbf{x}| = R$:

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x'^2 + R^2 - 2x'R \cos \alpha}} + \frac{q_I}{\sqrt{R^2 + x'^2 - 2Rx' \cos \alpha}} = 0 \quad \text{mit } x > R, x' < R$$

$$\Rightarrow \frac{q^I}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x'^2}{R^2} - 2\frac{x'}{R} \cos \alpha}} + \frac{1}{x'} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x'^2} - 2\frac{R}{x'} \cos \alpha}} \Rightarrow q_I = -\frac{R}{x'} \quad \text{und} \quad \frac{x^I}{R} = \frac{R}{x'} \rightarrow \mathbf{x}^I = \frac{R^2}{x'} \frac{\mathbf{x}'}{x'}$$

$$\Rightarrow G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{R}{x'} \frac{1}{\left| \mathbf{x} - \frac{R^2}{x'} \frac{\mathbf{x}'}{x'} \right|} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{\left| \frac{x'}{R} \mathbf{x} - \frac{R}{x'} \mathbf{x}' \right|} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2 x^2}{R^2} + R^2 - 2xx' \cos \alpha}} \rightarrow \text{symmetrisch}$$

Der Vollständigkeit halber notieren wir noch die Normalenableitung $\left(\frac{\partial}{\partial n'} \equiv -\frac{\partial}{\partial x'} \right)$, da \mathbf{n}' in die Kugel zeigt)

$$\left. \frac{\partial G_D}{\partial n'} \right|_{x'=R} = \frac{x' - x \cos \alpha}{(x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \alpha)^{3/2}} - \frac{\frac{x' x^2}{R} - x \cos \alpha}{\left(\frac{x'^2 x'^2}{R^2} + R^2 - 2xx' \cos \alpha \right)^{3/2}} \Bigg|_{x'=R} =$$

$$\frac{R - \frac{x^2}{R}}{(x^2 + R^2 - 2xR \cos \alpha)^{3/2}} = -\frac{x^2 - R^2}{R(x^2 + R^2 - 2xR \cos \alpha)^{3/2}}$$

Damit können wir ϕ auf der Kugel vorgeben, d.h.:

$$\phi = \iiint_V G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d^3x - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial V} \phi \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial x'} da' \quad (2.19)$$

Letzterer Term ist natürlich im Fall der geerdeten Kugel, $\phi(\mathbf{x}) = 0$ für $|\mathbf{x}| = R$ nicht nötig. Die Punktladung ist nun charakterisiert durch $\rho(\mathbf{x})Q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, so dass wir für das Potential der Punktladung im Punkt \mathbf{x} außerhalb der geerdeten Metallkugel erhalten:

Potential für geerdete Metallkugel

$$\phi(\mathbf{x}) = Q \iiint_V \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{a}) G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' = \frac{Q}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} - \frac{Q}{\left| \frac{a}{R}\mathbf{x} - \frac{R}{a}\mathbf{a} \right|} \quad (2.20)$$

2.4 Entwicklung nach orthogonalen Funktionen

Seien die $U_n(\xi)$ für $n = 1, 2, \dots$ ein Satz reell- oder komplexwertiger Funktionen. Die U_n sind orthogonal auf (a, b) , wenn gilt:

Orthogonalität von Funktionen

$$\int_a^b U_n^*(\xi)U_m(\xi) \, d\xi = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad (2.21)$$

Der Satz heißt orthonormal, sofern vorige Beziehung wie folgt normiert ist:

Orthonormalität von Funktionen

$$\int_a^b U_n^*(\xi)U_m(\xi) \, d\xi = \delta_{nm} \quad (2.22)$$

Ist $f(\xi)$ quadratintegrabel auf (a, b) , dann gilt

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\xi) \quad \text{mit } a_n = \int_a^b U_n^*(\xi)f(\xi) \, d\xi$$

wie man sofort durch Einsetzen von $f(\xi)$ verifiziert. Andererseits gilt:

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b U_n^*(\xi')f(\xi')U_n(\xi) \, d\xi' = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi')f(\xi')U_n(\xi) \, d\xi'$$

Hieraus folgt dann die sogenannte Vollständigkeits-Relation.

Vollständigkeits-Relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(\xi')U_n(\xi) = \delta(\xi - \xi') \quad (2.23)$$

Das berühmteste *Beispiel* ist die Fourier-Reihenentwicklung orthonormaler Funktionen auf $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$:

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) + B_m \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \right]$$

$$A_m = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \, dx; \quad B_m = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) \, dx$$

Die Entwicklung nach orthonormalen Funktionen lässt sich auch auf mehrere Dimensionen verallgemeinern. Z.B. 2 Dimensionen mit $U_n(\xi)$; $\xi \in (a, b)$ und $V_m(\eta)$, $\eta \in (c, d)$

$$f(\xi, \eta) = \sum_n \sum_m a_{nm} U_n(\xi) V_m(\eta) \quad \text{mit } a_{nm} = \int_a^b \int_c^d U_n^*(\xi) V_m^*(\eta) f(\xi, \eta) \, d\eta \, d\xi$$

Für $]a; b[$ unendlich lang erhalten wir ein Kontinuum von Funktionen an Stelle einer abzählbaren Menge. Wichtigstes Beispiel sind die Fourierintegrale. $U_m = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{i2\pi mx/a}$: orthogonales Funktionensystem auf $(-a/2, a/2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i2\pi mx/a} \quad \text{mit } A_m = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi mx/a} \, dx$$

Nun $a \Rightarrow \infty$, $\frac{2\pi m}{a} \Rightarrow k$

$$\sum_m \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dm = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk, A_m \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} A_k$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} A(k) \frac{dk}{2\pi} \quad \text{mit } A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

Orthonormalität:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = 2\pi\delta(k-k')$$

Vollständigkeit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')k} \frac{dk}{2\pi} = \delta(x-x')$$

2.5 Variablenseparation

Die Laplace- und Poisson-Gleichungen sind partielle Differentialgleichungen, die die partiellen Ableitungen der Lösungsfunktion nach den verschiedenen Koordinaten beinhalten. Partielle Differentialgleichungen beschreiben zahlreiche physikalische Systeme, und oft ist der erste Schritt zu deren Lösung eine Variablentransformation, die eine Separation in gewöhnliche Differentialgleichungen erlaubt. Die Wahl der geeigneten Koordinaten hängt typischerweise von der Geometrie des Problems ab (d.h. von den Quellen und Randbedingungen). Unter den wichtigsten Fällen sind rechtwinklige, sphärische und zylindrische Geometrien. Wir beginnen mit dem rechtwinkligen Fall. In kartesischen Koordinaten lautet die Laplace-Gleichung.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.24)$$

Angenommen die Lösung hat Produktform.

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \implies \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Diese Gleichung soll für beliebige Werte der einzelnen Koordinaten gelten.

$$\implies \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2; \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2; \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2; \quad \text{mit } \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

Somit lässt sich für ϕ ein Ansatz über Exponentialfunktionen machen, welche obige Gleichung erfüllen würden.

$$\phi(x, y, z) = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z} \quad (2.25)$$

Parameter α, β werden durch die Randbedingungen bestimmt.

Wir wollen hierzu einen Kasten mit Seitenlängen (a, b, c) , mit verschwindendem Potential auf allen Flächen außer $z = c$ mit Potential $\phi(x, y, c) = V(x, y)$, betrachten.

Nun wollen wir unsere Randbedingungen auf knappe Weise auf die zuvor bestimmte allgemeine Lösung für das Potential (2.25) anwenden. Aus den Bedingungen, dass $\phi = 0$ auf den Flächen $x = y = z = 0$ können die Exponentialfunktionen spezifiziert werden.

$$x = \sin(\alpha x); \quad y = \sin(\beta y); \quad z = \sinh(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z)$$

Ebenso soll das Potential auf den Flächen $x = a$; $y = b$ verschwinden, wodurch sich für die Argumente voriger Funktionen folgende ergeben.

$$\begin{aligned} \alpha a = n\pi; \quad \beta b = m\pi \quad \text{mit } n, m = 0, 1, 2, \dots \\ \implies \alpha_n = \frac{n\pi}{a}; \quad \beta_m = \frac{m\pi}{a}; \quad \gamma_{n,m} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{a^2}} \end{aligned}$$

Nun können wir die zuvor eingeführte Entwicklung nach orthogonalen Funktionen anwenden. Allgemein lässt sich ϕ eben auch als unendliche Reihe summiert über m und n darstellen.

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{n,m} z) \quad (2.26)$$

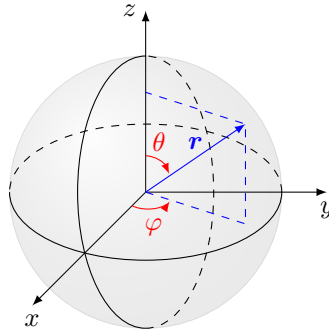
Nach der Entwicklung lässt nach den Reihenkoeffizienten $A_{n,m}$ umformen und die Randbedingung $\phi(x, y, c) = V(x, y)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{n,m} c) \\ A_{n,m} &= \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{n,m} c)} \int_0^a \int_0^b V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) dy dx \end{aligned}$$

Würden wir auch nichtverschwindende Randbedingungen auf den übrigen fünf Oberflächen voraussetzen, so erhielten wir die allgemeine Lösung durch lineare Superposition der entsprechend konstruierten Potentiale. Der hier besprochene Separationsansatz eignet sich als für auf rechtwinkligen Flächen vorgegebene Randwertbedingungen.

2.6 Randwertprobleme in Kugelkoordinaten

Wir betrachten nun das sphärische Koordinatensystem mit $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$.



Für die Koordinatentransformation von Kartesischen in Kugelkoordinaten gelten folgenden Formeln:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta \quad (2.27)$$

Um die partiellen Ableitungen in Kugelkoordinaten zu erhalten notieren wir die Jacobi-Matrix.

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \implies \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) J \quad (2.28)$$

Zur Berechnung des ∇ -Operators benötigen wir als die inverse Matrix.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) J^{-1} \implies J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi & \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \text{Spalten von } J^{-1}$$

Drehung der Basisvektoren:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right|}; \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right|}; \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right|};$$

Hierbei merkt man, dass \mathbf{e}_r die mit $r \sin \theta$ normierte 1. Spalte der Jacobi-Matrix und \mathbf{e}_θ und \mathbf{e}_φ die normierte 2. und 3. Spalte darstellen.

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi \\ \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \theta \end{pmatrix} \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Somit lässt der Gradient in Kugelkoordinaten bestimmen.

Gradient in Kugelkoordinaten

$$\nabla = \mathbf{e}_r (\mathbf{e}_r \cdot \nabla) + \mathbf{e}_\theta (\mathbf{e}_\theta \cdot \nabla) + \mathbf{e}_\varphi (\mathbf{e}_\varphi \cdot \nabla) = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.30)$$

Direktes Nachrechnen liefert dann:

<p>Laplace-Operator in Kugelkoordinaten</p> $\Delta = \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r}_{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.31)$
--

Dieser Operator wirkt auf das Potential ϕ . Falls dieses faktorisiert ist gemäß

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi) \quad (2.32)$$

erhalten wir aus $\Delta \phi = 0$ (von links mit r multipliziert):

$$\begin{aligned} PQ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dP}{d\theta} + \frac{UP}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} &= 0 \\ \implies r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right] + \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} &= 0 \end{aligned}$$

Um dies für beliebige Werte von φ zu erfüllen, muss der letzte Term konstant sein;

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung hat die Lösungen $Q = e^{\pm im\varphi}$ mit $Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi m)$ für $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$

$$\implies \frac{r^2}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{P} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dP}{d\theta} = \frac{m^2}{\sin^2 \theta}$$

Damit der Separationsansatz gültig ist, sollten die θ -abhängigen Terme wiederum konstant sein. Wir substituieren $x = \cos \theta \implies \frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}$

$$\implies \frac{1}{P} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^2 \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{dP}{d\theta} \right) = \frac{1}{P} \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) = \frac{m^2}{1-x^2} - l(l+1)$$

Dabei haben wir die Konstante gleich $-l(l+1)$ gesetzt. Es folgen die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P &= 0 \\ \frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U &= 0 \end{aligned}$$

Für die beiden Lösungen der Radialgleichung erhalten wir unmittelbar.

<p>Radialgleichung Potential in Kugelkoordinaten</p> $U(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l} \quad (2.33)$
--

Die Gleichung der Abhängigkeit vom Polarwinkel wir *allgemeine Legendresche Differentialgleichung* genannt. Für Situationen, welche unabhängig vom Azimuthalwinkel φ sind, ist $m^2 = 0$. Dann erhalten wir die Legendresche Differentialgleichung.

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + l(l+1)P = 0 \quad (2.34)$$

Diese wollen wir zunächst betrachten. Zur Lösung machen wir den Potenzreihenansatz mit α einem noch zu bestimmenden Parameter.

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert.

$$\sum_{j=0}^{\infty} [(\alpha + j)(\alpha + j - 1)a_j x^{\alpha+j-2} - [(\alpha + j)(\alpha + j + 1) - l(l + 1)]a_j x^{\alpha+j}] = 0$$

Wobei gilt: x^2 -Terme $\rightarrow -2(\alpha + j) - (\alpha + j)(\alpha + j - 1) = (\alpha + j)(\alpha + j - 1)$. Damit dies für alle $x \in [-1; 1]$ gilt, müssen die Koeffizienten der einzelnen Potenzen separat verschwinden. Für die beiden niedrigsten Potenzen gilt:

$$x^{\alpha+0-2}: \quad \alpha(\alpha - 1) = 0 \quad \text{für} \quad a_0 \neq 0; \quad x^{\alpha+1-2}: \quad \alpha(\alpha + 1) = 0 \quad \text{für} \quad a_1 \neq 0$$

Die Summanden $j \geq 2$ ergeben die Bedingungen.

$$a_{j+2} = \frac{(\alpha + j)(\alpha + j + 1 - l(l + 1))}{(\alpha + j + 1)(\alpha + j + 2)} a_j$$

Die ersten beiden Bedingungen sind äquivalent. Wir wählen daher die erste und erhalten zwei Fälle:

- $\alpha = 0$ es treten nur gerade Potenzen auf
- $\alpha = 1$ es treten nur ungerade Potenzen auf

Wir sehen weiterhin, dass für $j \rightarrow \infty$ gilt: $\frac{a_{j+2}}{a_j} \rightarrow 1$ Die Reihe würde dann für $x = \pm 1$ divergieren, so dass wir stattdessen fordern $a_j = 0$ für ein bestimmtes j (dann verschwinden wegen der Rekursion auch die höheren Koeffizienten).

$\alpha = 0$ oder $\alpha = 1 \implies$ Die Reihe bricht ab für l eine ganze Zahl größer gleich Null.

Dabei ist x^l die größte Potenz, und für $\alpha = 0$ wählen wir l gerade, für $\alpha = 1$ ungerade.

Die Lösungen der $P_l(x)$ heißen *Legendre-Polynome* und sind auf $P_l(1) = 1$ normiert (Konvention).

Die ersten Legendre-Polynome lauten:

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Eine Rekursionsformel für die Legendre-Polynome ist die *Rodrigues-Formel* (ohne Beweis).

Rodrigues-Formel

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (2.35)$$

Ebenso stellen die Legendre-Polynome ein orthogonales Funktionensystem dar.

Beweis:

$$0 = \int_{-1}^1 P_{l'}(x) \left[\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dP_l}{dx} \right) + l(l + 1)P_l \right] dx = \int_{-1}^1 \left[(x^2 - 1) \frac{dP_l}{dx} \frac{dP_{l'}}{dx} + l(l + 1)P_l P_{l'} \right] dx$$

Vertausche nun $l \mapsto l'$ und bilde Differenz:

$$[l(l + 1) - l'(l' + 1)] \int_{-1}^1 P_l P_{l'} dx = 0$$

\implies Das Integral verschwindet für $l \neq l'$.

Andernfalls gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx &= \frac{1}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 \left(\frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \right)^2 dx = \frac{(-1)^l}{2^{2l}} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l \underbrace{\frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2 - 1)^l}_{=(2l)!} dx = \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^l dx = \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \frac{2^{2l+1} (l!)^2}{(2l + 1)!} = \frac{2}{2l + 1} \end{aligned}$$

Berechnung der Integrals:

$$x_l = \int_{-1}^1 (1-z^2)^l dz = \int_{-1}^1 (1-z^2)^{l-1} dz - \int_{-1}^1 z^2 (1-z^2)^{l-1} dz = x_{l-1} + \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 z \frac{d}{dz} (1-z^2)^l dz$$

$$\stackrel{\text{P.I.}}{=} x_{l-1} + \frac{1}{2l} [z(1-z^2)^l]_{-1}^1 - \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 (1-z^2)^l dz \implies x_l(1 + \frac{1}{2l})x_{l+1} \Leftrightarrow x_l = \frac{2l}{2l+1} x_{l-1}$$

mit $x_0 = 2$:

$$x_l = \frac{2l}{2l+1} \frac{2(l-1)}{2l-1} \frac{2(l-2)}{2l-3} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 3} \cdot 2 = \frac{2^2 l^2}{(2l+1)2l} \frac{2^2 (l-1)^2}{(2l-1)(2l-1)} \cdot \dots \cdot \frac{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 4^l (l!)^2}{(2l+1)!}$$

Insgesamt:

Orthonormalitätsrelation Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (2.36)$$

Entsprechend unserer obigen Definition ist der orthonormierte Satz von Funktionen gegeben durch.

$$U_l(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(x) \quad (2.37)$$

Funktionen im Intervall $[-1; 1]$ können nach den Legendre-Polynomen entwickelt werden:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \quad \text{mit} \quad A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(x) f(x) dx$$

Beispiel: Halbkugeln mit entgegengesetztem Potential

Im Falle azemuthaler Symmetrie ist die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung nun gegeben durch:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta)$$

Ist das Potential $V(\theta)$ auf einer Kugel vom Radius R gegeben, und des ist ϕ im Inneren zu finden, dann muss $B_l = 0 \forall l$ gelten, damit das Potential endlich ist.

$$\implies \text{entwickle } V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) \quad \text{mit} \quad A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^{\pi} \sin \theta P_l(\cos \theta) V(\theta) d\theta \quad (2.38)$$

Unser Beispiel entspricht.

$$V(\theta) = \begin{cases} +V & \text{für } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ -V & \text{für } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases} \implies A_l = V \frac{2l+1}{2R^l} \int_{-1}^1 P_l(x) \text{sign}(x) dx \implies A_l = 0 \text{ für } l \text{ gerade,}$$

$$\implies \text{für } l \text{ ungerade: } A_l = \frac{2l+1}{R^l} \int_0^1 P_l(x) dx \implies \begin{aligned} A_1 &= \frac{V}{R} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \\ A_3 &= \frac{V}{R^3} \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \\ A_5 &= \frac{V}{R^5} \cdot 11 \cdot \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\implies \frac{\phi(r, \theta)}{V} = \frac{3}{2} \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \frac{r^3}{R^3} P_3(\cos \theta) + \frac{11}{6} \frac{r^5}{R^5} P_5(\cos \theta) + \dots$$

Für Probleme ohne azimutale Symmetrie behandeln wir nun noch den allgemein Fall $m \neq 0$. Dieser kann einerseits mit den Methoden für $m = 0$ behandelt werden, andererseits bietet der Drehimpulsformalismus einen

sehr eleganten Weg an, auf den hier verwiesen wird. Hier stellen wir die wichtigsten Ergebnisse zusammen. Die normierbaren Lösungen zu

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + (l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2})P = 0 \quad (2.39)$$

sind die *zugeordneten Legendre-Polynome*.

Für $m > 0$ können wir diese erhalten durch folgende Rekursionsformel.

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (2.40)$$

Wiederum muss $l \geq 0$ eine ganze Zahl sein, und zusätzlich muss gelten $-l \leq m \leq l$, ebenso eine ganze Zahl.

Mit der Rodriguez-Formel erhalten wir auch für $m < 0$.

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (2.41)$$

Da die Differentialgleichung nicht von $\text{sign}(m)$ abhängt, sind die Lösungen zu $\pm m$ proportional zueinander, wobei gilt:

Orthonormalitätsrelation zugeordnete Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad (2.42)$$

Insgesamt können wir die winkelabhängigen Faktoren der Lösung zusammenfügen und so ein Orthonormalsystem auf der Sphäre erhalten. Dies ist gegeben durch die *Kugelflächenfunktionen*.

Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (2.43)$$

Diese sind Lösung der Differentialgleichung

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.44)$$

Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen.

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^* \quad (2.45)$$

Orthonormalität

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.46)$$

Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \quad (2.47)$$

Entwicklung in Kugelflächenfunktionen

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \Leftrightarrow A_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi) d\theta d\varphi \quad (2.48)$$

Für $m = 0$ gilt: $Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$.

Für $m \neq 0$ verschwinden die $P_l^m(\cos \theta)$, wenn $\theta = 0, \pi$ ist.

$$g(\theta = 0, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} A_{l0} \quad \text{mit} \quad A_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta P_l(\cos \theta) g(\theta, \varphi) \, d\theta \, d\varphi \quad (2.49)$$

Allgemeine Lösung des Randwertproblems in Kugelkoordinaten:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.50)$$

2.7 Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

Betrachte zwei Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{x}' in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) bzw. (r', θ', φ') . Der Winkel zwischen diesen sei Γ . Dann lautet das Additionstheorem:

Additionstheorem

$$P_l(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.51)$$

Beweis:

Wir entwickeln $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ (mit $x \equiv |\mathbf{x}|$, $x' \equiv |\mathbf{x}'|$)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = xx'(\sin \theta \sin \theta' (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi') + \cos \theta \cos \theta') = xx'(\sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta')$$

$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$ ist Lösung der Laplace-Gleichung und symmetrisch und die \mathbf{x}' -Achse. Einerseits muss mit $r_> = \max(r, r_0)$ und $r_< = \min(r, r_0)$ folgendes gelten:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l(x') x^l + B_l(x') x^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \gamma)$$

Für $\mathbf{x} \parallel \mathbf{x}'$ muss gelten:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \begin{cases} \frac{1}{x' - x} = \frac{1}{x'} \frac{1}{1 - \frac{x}{x'}} = \frac{1}{x'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x'} \right)^l & \text{für } x < x' \\ \frac{1}{x - x'} = \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \frac{x'}{x}} = \frac{1}{x} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{x'}{x} \right)^l & \text{für } x > x' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\Theta(x' - x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} + \Theta(x - x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} \right) P_l(\cos \gamma)$$

Andererseits lautet die allgemeine Entwicklung in Kugelkoordinaten:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l, l', m, m'} A_{ll'mm'}(x, x') Y_{l'm'}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.52)$$

Wir werten aus (nutze Ergebnisse aus Kapitel 1 und Vollständigkeit):

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sum_{l'mm'} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x + \frac{l(l+1)}{x^2} \right) A_{ll'mm'}(x, x') Y_{l'm'}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = -4\pi \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') =$$

$$-\frac{4\pi}{x^2} \delta(x - x') \underbrace{\frac{\delta(\theta - \theta')}{\sin \theta}}_{=\delta(\cos \theta - \cos \theta')} \delta(\varphi - \varphi') = -\frac{4\pi}{x^2} \delta(x - x') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Koeffizientenvergleich \Rightarrow

$$A_{ll'mm'}(x, x') = A_{lm}(x, x') \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) A_{lm}(x, x') = -\frac{4\pi}{x^2} \delta(x - x')$$

A_{lm} ist stetig differenzierbar außer für $x = x'$, wo sie nur stetig ist, damit bei der zweiten Ableitung die δ -Funktion erzeugt werden kann. Darüberhinaus sollte die Funktion für x oder x' gegen Null einen endlichen Wert annehmen und für $x \rightarrow \infty$ oder $x' \rightarrow \infty$ gegen Null gehen.

$$A_{lm}(x, x') \equiv (x, x') = \Theta(x' - x)a_l(x')x^l + \Theta(x - x')a_l(x')\frac{x'^{2l+1}}{x^{l+1}}$$

Den Koeffizienten a_l bestimmen wir durch die Normierung der δ -Funktion. Da $A_{lm}(x, x')$ selbst stetig ist, kann in obiger Gleichung die δ -Funktion nur durch die zweite Ableitung auf einen "Knickin $A_{lm}(x, x')$ erzeugt werden. Es genügt also, folgendes zu betrachten

$$\frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x A_{lm}(x, x') = -\frac{4\pi}{x^2} \delta(x, x') + R_1(x, x') \implies \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_{lm}(x, x') = -\frac{4\pi}{x^2} \delta(x, x') + R_2(x, x')$$

Dabei ist R_1 eine stetige, R_2 eine endliche Funktion (aber mit Unstetigkeit für $x = x'$).

$$\int_x^x \frac{\partial^2}{\partial x'^2} A_{lm}(x'', x') dx'' = -4\pi \int \left(\frac{1}{x''^2} \delta(x'', x') + R_2(x, x') \right) dx'' \implies \frac{\partial}{\partial x} A_{lm}(x, x') = -\frac{4\pi}{x^2} \Theta(x-x') + \underbrace{R_3(x, x')}_{\text{stetig}}$$

Graphik

$$\lim_{x \rightarrow x'} \left[- \left(-\frac{x^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} A_{lm}(x, x') \right)_{x < x'} + \left(-\frac{x^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} A_{lm}(x, x') \right)_{x > x'} \right] = 1$$

Einsetzen obiger Entwicklung ergibt dann:

$$\begin{aligned} - \left(-\frac{x^2}{4\pi} a_l(x) \frac{d}{dx} x^l \right) + \left(-\frac{x^2}{4\pi} x^{2l+1} a_l(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{x^{l+1}} \right) &= 1 \implies lx^{l+1} + (l+1)x^{l+1} = \frac{4\pi}{a_l(x)} \\ \implies a_l(x') &= \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{x'^{l+1}} \implies A_{lm}(x, x') = \frac{4\pi}{2l+1} \left[\Theta(x' - x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} + \Theta(x - x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} \right] \end{aligned}$$

Einsetzen in obige Entwicklung

$$\implies \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l,m} A_{lm}(x, x') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[\Theta(x' - x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} + \Theta(x - x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} \right] Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (2.53)$$

Der Vergleich mit der Entwicklung in Legendre-Polynomen zeigt dann die Behauptung.

2.8 Green'sche Funktion in Kugelkoordinaten für Randbedingungen auf der Sphäre

Wir können nun mit obiger Methode eine Green'sche Funktion in Kugelkoordinaten für Dirichlet-Randbedingungen bei einem endlichen Radius R an Stelle von $R \rightarrow \infty$ bestimmen (d.h. $A_{lm}(x, R) = 0$ verlangen).

Andererseits können wir die Entwicklung in Kugelflächenfunktionen aus vorigem Abschnitt direkt auf das Resultat

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{\left| \frac{x'}{R} \mathbf{x} - \frac{R}{x'} \mathbf{x}' \right|} \quad \text{für } x, x' > R \quad (2.54)$$

anwenden.

$$\begin{aligned} \implies G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[\Theta(x' - x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} + \Theta(x - x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} - \underbrace{\Theta \left(R - \frac{xx'}{R} \right)}_{\equiv d, \text{ da } x, x' > R} \frac{\left(\frac{xx'}{R} \right)^l}{R^{l+1}} - \underbrace{\Theta \left(\frac{xx'}{R} - R \right)}_{\equiv 1} \frac{R^l}{\left(\frac{xx'}{R} \right)^{l+1}} \right] \\ &\quad \cdot Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[\Theta(x' - x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} \Theta(x - x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} - \frac{R^{2l+1}}{(xx')^{l+1}} \right] Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[\Theta(x' - x) \frac{1}{x'^{l+1}} \left(x^l - \frac{R^{2l+1}}{x^{l+1}} \right) + \Theta(x - x') \frac{1}{x^{l+1}} \left(x'^l - \frac{R^{2l+1}}{x'^{l+1}} \right) \right] Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

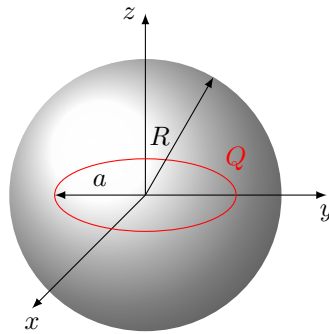
Dem letzten Ausdruck sehen wir die Symmetrie in $x \Leftrightarrow x'$ an, sowie die Randbedingung $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$ falls $x = R$ oder $x' = R$.

Die Green'sche Funktion für Ladungen innerhalb der Kugel kann auch aus obigem Resultat abgelesen werden:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[\Theta(x' - x) \frac{x^l}{x'^{l+1}} + \Theta(x - x') \frac{x'^l}{x^{l+1}} - \frac{(xx')^l}{R^{2l+1}} \right] Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \left[\Theta(x' - x) x^l \left(\frac{1}{x'^{l+1}} - \frac{x'^l}{R^{2l+1}} \right) + \Theta(x - x') x'^l \left(\frac{1}{x^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) \right] Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

Wiederum sind Symmetrie und Randbedingungen an der Kugel manifest, darüber hinaus ist die Lösung regulär im Ursprung.

Beispiel: Konzentrisch, geladener Ring in geerdeter Hohlkugel



Der Ring trägt die Ladung Q und hat einen Radius a , die Kugel hat den Radius R .

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}') &= \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(x' - a) \delta(\cos \theta') \\ \phi(\mathbf{x}) &= \iiint G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d^3 x' = \frac{Q}{2\pi a^2} 2\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \int_0^R x'^2 \delta(x' - a) \delta(\cos \theta') \left[\Theta(a - x) x^l \left(\frac{1}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{R^{2l+1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Theta(x - a) a^l \left(\frac{1}{x^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) \right] \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') dx' d\theta' = \\ &= Q \sum_{l=0}^{\infty} \left[\Theta(a - x) x^l \left(\frac{1}{a^{l+1}} - \frac{a^l}{R^{2l+1}} \right) + \Theta(x - a) a^l \left(\frac{1}{x^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) \right] P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') \end{aligned}$$

Eine etwas einfachere Form wir noch erreicht mit

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(0) &= 0 \quad \text{und} \quad P_{2n} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!}; \quad n!! = \begin{cases} n(n-2) \cdot \dots \cdot 2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ n(n-2) \cdot \dots \cdot 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases} \\ \phi(\mathbf{x}) &= Q \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Theta(a - x) x^{2n} \left(\frac{1}{a^{2n+1}} - \frac{a^{2n}}{R^{4n+1}} \right) + \Theta(x - a) a^{2n} \left(\frac{1}{x^{2n+1}} - \frac{x^{2n}}{R^{4n+1}} \right) \right] \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} P_{2n}(\cos \theta) \end{aligned}$$

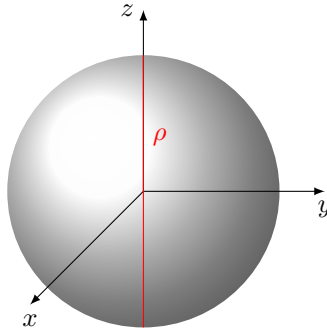
Beispiel: Geerdeter geladener Draht in geerdeter Kugel

Hierbei trägt der Draht wiederum die Ladung Q und hat eine Länge von $2R$, als dem Durchmesser der Kugel.

$$\rho(\mathbf{x}') = \frac{Q}{2R} \frac{1}{2\pi x'^2} [\delta(\cos \theta' - 1) + \delta(\cos \theta' + 1)]$$

Dabei haben wir angenommen, dass der Draht im z -Richtung orientiert ist.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_a^b x'^2 \rho(\mathbf{x}') dx' d\cos \theta' d\varphi'$$



Damit ist die Ladungsdichte per Einheitslänge im oberen Halbvolumen konstant (und entsprechend für die untere Hälfte). Wiederum besteht azimutale Symmetrie.

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \frac{Q}{4\pi R} \int_0^R x'^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{x'^2} d\cos\theta' d\varphi' dx' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \left[\Theta(x' - x)x^l \left(\frac{1}{x'^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Theta(x - x')x^l \left(\frac{1}{x'^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) \right] \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta') [\delta(\cos\theta' - 1) + \delta(\cos\theta' + 1)] = \\ &= \frac{Q}{2R} \int_0^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\Theta(x' - x)x^l \left(\frac{1}{x'^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) + \Theta(x - x')x^l \left(\frac{1}{x'^{l+1}} - \frac{x^l}{R^{2l+1}} \right) \right] P_l(\cos\theta) [P_l(1) + P_l(-1)] dx'\end{aligned}$$

Die ungeraden Summanden verschwinden wegen $P_l(-1) = (-1)^l$.

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_x^R \left(\frac{x^l}{x'^{l+1}} - \frac{x^l x^l}{R^{2l+1}} \right) = \left[-\frac{1}{l} \frac{x^l}{x'^l} - \frac{x^l}{l+1} \frac{x'^{l+1}}{R^{2l+1}} \right]_{x'=x}^{x'=R} = -\frac{1}{l} \frac{x^l}{R^l} + \frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} \frac{x^l}{R^l} + \frac{1}{l+1} \frac{x^{2l+1}}{R^{2l+1}} \\ I_2 &= \int_0^x \left(\frac{x^l}{x'^{l+1}} - \frac{x^l x^l}{R^{2l+1}} \right) = \left[\frac{x'^{l+1}}{(l+1)x'^{l+1}} - \frac{1}{l+1} \frac{x'^{l+1} x^l}{R^{2l+1}} \right]_{x'=0}^{x'=x} = \frac{1}{l+1} - \frac{1}{l+1} \frac{x^{2l+1}}{R^{2l+1}} \\ I_1 + I_2 &= -\frac{1}{l} \frac{x^l}{R^l} + \frac{1}{l} - \frac{1}{l+1} \frac{x^l}{R^l} + \frac{1}{l+1} = \frac{2l+1}{l(l+1)} \left(1 + \left(\frac{x}{R} \right)^l \right)\end{aligned}$$

Für $l = 0$ müssen wir eine Definitionslücke schließen:

$$\begin{aligned}\lim_{l \rightarrow 0} I_1 + I_2 &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{2 \left(1 - \frac{x^l}{R^l} \right) - \frac{d}{dl} \left(\frac{x}{R} \right)^l}{2l+1} = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{d}{dl} e^{\log \frac{x}{R} l} = -\lim_{l \rightarrow 0} \log \frac{x}{R} e^{\log \frac{x}{R} l} = \log \frac{R}{x} \\ \implies \phi(\mathbf{x}) &= \frac{Q}{R} \left[\log \frac{R}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2n(2n+1)} \left(1 - \left(\frac{x}{R} \right)^{2n} \right) P_{2n}(\cos\theta) \right] \\ \sigma &= \frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{Q}{4\pi R^2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2n+1} P_{2n}(\cos\theta) \right]\end{aligned}$$

Anzumerken ist, dass der Normalenvektor \mathbf{n} relativ zur Oberfläche nach Innen zeigt, entgegengesetzt zur Normalen auf ∂V .

Da die Legendre-Polynome P_{2n} orthogonal zu $P_0 = 1$ sind, tragen sie zur induzierten Gesamtladung nicht bei. Diese ist wie erwartet $-Q$.

2.9 Entwicklung Green'scher Funktionen nach Eigenfunktionen

Die quadratintegrablen Funktionen mit dem Skalarprodukt $\iiint \psi(x)\phi(x) de^3x$ bilden einen Vektorraum. In diesem kann der Laplace-Operator als ein hermitescher Operator aufgefasst werden. Die Green'sche Funktion ist dann sozusagen das Inverse dieses Operators, wobei aber die Lösungen der Laplace-Gleichung als Nullmoden gesondert zu behandeln sind.

Betrachte den Operator $\Delta + f(\mathbf{x})$:

\implies Lösungen zu $\Delta\psi_n(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})\psi_n(\mathbf{x}) = -\lambda_n\psi_n(\mathbf{x})$ sind Eigenfunktionen zum Eigenwert λ_n . λ_n kann diskret, kontinuierlich oder beides gleichzeitig sein.

Orthonormalität

$$\iiint_V \psi_m^*(\mathbf{x})\psi_n(\mathbf{x}) \, d^3x = \delta_{mm} \tag{2.55}$$

Wir nehmen auch an, dass die Eigenfunktionen einen vollständigen Satz bilden.

Suche nun die Green'sche als Lösung zu

$$\Delta_x G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + [f(\mathbf{x}) + \lambda]G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

wobei λ hier als ein Parameter behandelt wird.

Sofern die Green'sche Funktion dieselben Randbedingungen wie die Eigenfunktionen erfüllt, können wir entwickeln:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_n a_n(\mathbf{x}')\psi_n(\mathbf{x}) \implies \sum_n a_n(\mathbf{x}')(\lambda - \lambda_n)\psi_n(\mathbf{x}) = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

Multipliziere dies mit $\psi_m^*(\mathbf{x})$ und integriere über d^3x

$$\implies a_m(\mathbf{x}') = 4\pi \frac{\psi_m^*(\mathbf{x}')}{\lambda_m - \lambda} \implies G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 4\pi \sum_n \frac{\psi_n^*(\mathbf{x}')\psi_n(\mathbf{x})}{\lambda_n - \lambda}$$

Für kontinuierliche Spektren wird aus dem Summenzeichen ein Integral.

Einfachstes Beispiel: Der Poisson-Gleichung ist die Eigenwertgleichung $(\Delta + k^2)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = 0$ zugeordnet, mit den kontinuierlichen Eigenwerten k^2 und den Eigenfunktionen $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$

Orthonormalität

$$\iiint \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}) \, d^3x = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \tag{2.56}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \iiint \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{k^2} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{2.57}$$

Vgl. direkte Berechnung des Fourierintegrals:

$$\begin{aligned} \iiint e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \, d^3x &= e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \iiint \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \, d^3x \\ &= 2\pi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int_0^\infty r \frac{1}{-ikr} [e^{-ikr} - e^{ikr}] e^{-\varepsilon r} \, dr = 2\pi e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \int_0^\infty \frac{2 \sin kr}{k} e^{-\varepsilon r} \, dr = 4\pi \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'}}{k^2} \end{aligned}$$

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir das Dirichletproblem in einem rechteckigen Kasten mit den Begrenzungsflächen $x = y = z = 0$, $x = a$, $y = b$, $z = c$. Die zugehörige Eigenwertgleichung ist

$$(\Delta + k_{lmn}^2) \psi_{lmn}(x, y, z) = 0 \tag{2.58}$$

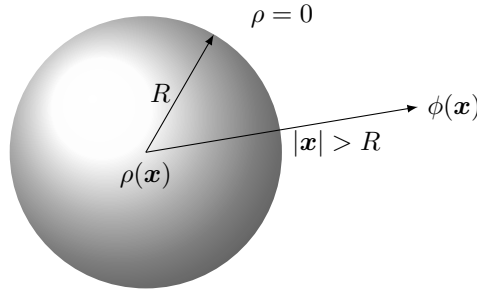
wobei die Eigenfunktionen auf den Randflächen verschwinden

Diskrete Eigenfunktionen

$$\implies \psi_{lmn}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi z}{c}; \quad \text{mit } k_{lmn}^2 = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right), \quad l, m, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{32}{\pi abc} \sum_{l,m,n=1}^\infty \frac{\sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi z}{c} \sin \frac{l\pi x'}{a} \sin \frac{m\pi y'}{b} \sin \frac{n\pi z'}{c}}{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}} \tag{2.59}$$

2.10 Multipolentwicklung



Wir nehmen an, ein Potential werde von einer Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x})$, welche nur innerhalb der Kugel vom Radius R nichtverschwindend ist, erzeugt.

\Rightarrow für $|\mathbf{x}| > R$ löst $\phi(\mathbf{x})$ die Laplace-Gleichung, und wir können entwickeln:

Multipolentwicklung

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{x^{l+1}} \quad (2.60)$$

Dabei heißt der $l=0$ -Term Monopol, $l=1$ Dipol und $l=2$ Quadropol usw. Andererseits ist die Lösung gegeben durch ($x \equiv |\mathbf{x}|$, $x' \equiv |\mathbf{x}'|$).

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) \iiint \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \underset{x' < x \text{ für } \rho(\mathbf{x}') \neq 0}{=} &= 4\pi \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \iiint x'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \rho(\mathbf{x}) \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{x^{l+1}} d^3x' \\ \Rightarrow q_{lm} = \iiint Y_{lm}^*(\theta', \varphi') x'^l \rho(\mathbf{x}) d^3x' &\text{ Multipolmomente} \end{aligned}$$

Zum Vergleich entwickeln wir auch um $\mathbf{x}' = 0$ in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\mathbf{x}' \cdot \nabla_x)^n \frac{1}{|\mathbf{x}|} = \frac{1}{x} - \mathbf{x}' \cdot \nabla \frac{1}{x} + \frac{1}{2} (\mathbf{x}' \cdot \nabla_x)^2 \frac{1}{x} + \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{x} &= \frac{x_i}{x^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{x} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_i}{x^3} = -\frac{\delta_{ij}}{x^3} + 3 \frac{x_i x_j}{x^5} = \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} x^2}{x^5} \\ &= \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} x^2}{x^5} x'_i x'_j \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} x^2}{x^5} = \frac{1}{x^5} x_i x_j (3x'_i x'_j - \delta_{ij} x'^2) \end{aligned}$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{x} \underbrace{\iiint \rho(\mathbf{x}') d^3x'}_{\text{Monopol } q} + \frac{x_i}{x^3} \underbrace{\iiint x'_i \rho(\mathbf{x}') d^3x'}_{\text{Dipol } \mathbf{p}} + \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{x^5} \underbrace{\iiint (3x'_i x'_j - \delta_{ij} x'^2) \rho(\mathbf{x}') d^3x'}_{\text{Quadrupoltensor } Q_{ij}} + \dots \quad (2.61)$$

Allgemein bezeichnet man Objekte mit dem gleichen Transformationsverhalten unter Rotationen wie $Y_{lm}(r, \theta, \varphi)$ als sphärische Tensoren l -ter Stufe. Diese Klasse ist allgemeiner als die hier definierten kartesischen Multipol-tensoren, schließt diese aber mit ein.

Elektrisches Feld:

$$\begin{aligned} E_x^{lm} &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{x^{l+1}} = 4\pi \frac{l+1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{x^{l+2}} \\ E_\theta^{lm} &= -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{x^{l+1}} = -\frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{\partial_\theta Y_{lm}(\theta, \varphi)}{x^{l+2}} \\ E_\varphi^{lm} &= -\frac{1}{x \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{x^{l+1}} = -\frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{im}{\sin \theta} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{x^{l+2}} \end{aligned}$$

Beispiel: Dipol entlang der z-Achse

Mit $Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ sich der Monopol wie folgt berechnen.

$$p_3 \equiv p \equiv |\mathbf{p}| = \iiint x'_3 \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^\infty x'^3 \cos \theta \rho(\mathbf{x}') dx' d \cos \theta d\varphi'$$

$$q_{10} = \iiint \sqrt{\frac{3}{4\pi}} (x')^1 \cos \theta' \rho(\mathbf{x}') d^3x' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^\infty x'^3 \cos \theta \rho(\mathbf{x}') dx' d \cos \theta d\varphi' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_3$$

$$\Rightarrow E_x^{10} = -4\pi \frac{1+1}{3} p \frac{\cos \theta}{x^3} = \frac{2p \cos \theta}{x^3}; E_\theta^{10} = 4\pi \frac{1}{3} \frac{3}{4\pi} p \frac{\sin \theta}{x^3} = \frac{p \sin \theta}{x^3}; E_\varphi^{10} = 0$$

Kartesisch:

$$\mathbf{E} = -\nabla p \frac{x_3}{x^3} = -p \frac{\hat{\mathbf{n}}_3}{x^3} + 3p \frac{\mathbf{x}x_3}{x^5} \leftarrow \text{allgemeine Richtung } \mathbf{p} : \mathbf{E} = \frac{3\mathbf{x}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}{x^5} - \frac{\mathbf{p}}{x^3}$$

Energie einer Ladungsverteilung im externen Feld

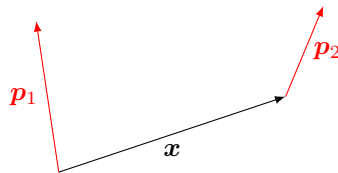
$$W = \iiint \phi(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) d^3x \quad (2.62)$$

Entwickle um einen zweckmäßig gewählten Koordinatenursprung:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla \phi(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots = \phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \dots =$$

$$\stackrel{\nabla \cdot \mathbf{E} \text{ für externes Feld}}{\text{für externes Feld}} \phi(0) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} (2x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \dots$$

$$\Rightarrow W = q\phi(0) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \dots$$

Beispiel: Dipol-Dipol-Wechselwirkung (Abstand \mathbf{x})

$$W_{12} = W_{21} = -\mathbf{p}_1 \cdot \left(\frac{3\mathbf{x}(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x})}{x^5} - \frac{\mathbf{p}_2}{x^3} \right) = -\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x})}{x^5} + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{x^3} \quad (2.63)$$

\Rightarrow Die Energie der Ladung hängt ab vom Potential des Dipolmoments vom Feld und des Quadrupolmoments vom Feldgradienten.

Kapitel 3

Magnetostatik

3.1 Stromdichte

Die in den Maxwellgleichungen ersichtliche Symmetrie zwischen elektrischen und magnetischen Feldern wird maximal durch die Tatsache, dass es keine freien magnetischen Ladungen gibt, verletzt. Im zeitunabhängigen Fall sind damit Ströme Quellen des Magnetfeldes, welche als infinitesimale Stromschleifen einen magnetischen Dipol bilden.

Ladungsdichte ρ und Stromdichte \mathbf{j} genügen dem Gesetz der Ladungserhaltung: Die zeitliche Änderung der Ladung in einem Volumen V entspricht dem Stromfluss durch die Oberfläche ∂V , in anderen Worten:

$$\iiint_V \frac{d}{dt} \rho(\mathbf{x}, t) d^3x = \frac{d}{dt} \underbrace{\iiint_V \rho(\mathbf{x}, t) d^3x}_{\text{Grundannahme}} = - \underbrace{\oiint_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{a}}_{\text{Grundannahme}} = - \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (3.1)$$

Da V beliebig ist, folgt daraus die

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (3.2)$$

Im zeitunabhängigen Fall der Magnetostatik führt dies zu $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$.

Mikroskopisch gehen wir von Punktladungen q_i an den Orten \mathbf{x}_i mit Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{x}}_i$ aus. Die auf der Dirac'schen δ -Funktion aufbauende Methode in der Elektrostatik überträgt sich dann folgendermaßen:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n q_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad (3.3)$$

Der Strom $I \equiv \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\mathbf{x}, t) d^3x$ ist als Ladung durch Zeit definiert. Wird eine Fläche $\Delta \mathbf{A}$ von der

Stromdichte \mathbf{j} durchflossen, dann ist nach Gl. (3.1) $I = \mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{A}$.

Einen leitenden Draht kann man aus Vektorelementen $d\mathbf{l}$ zusammengesetzt beschreiben, wobei $d\mathbf{l} \parallel \mathbf{j}$.

In einem Volumen d^3x , welches $d\mathbf{l}$ genau einschließt, gilt in Abwesenheit weiterer Stromdichten $\mathbf{j}(\mathbf{x}) d^3x = I d\mathbf{l}$.

3.2 Kraftgesetze

In der Elektrostatik ist das elektrische Feld \mathbf{E} durch die Kraft auf eine Probeladung $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ definiert. In der Magnetostatik betrachte ein Längenelement $d\mathbf{l}$ eines Drahtes, welcher vom Strom I durchflossen wird. Im Magnetfeld beobachtet man, dass der Beitrag zur Kraft auf den Leiter sich folgendermaßen verhält:

$$d\mathbf{F} \propto I, \quad d\mathbf{F} \propto d\mathbf{l}, \quad d\mathbf{F} \perp d\mathbf{l}$$

Dies kann durch ein Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ mit folgendem Kraftgesetz beschrieben werden:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

Das Feld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ wird *magnetische Flussdichte* oder *magnetische Induktion* genannt. Die Lichtgeschwindigkeit $c = 2,998 \cdot 10^{10}$ cm/s erscheint hier als zunächst willkürliche Konstante.¹

Kraftdichte auf Stromdichte

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dV} \mathbf{F} = \frac{1}{c} \frac{I}{dV} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.5)$$

Kraft auf Stromdichte

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \iiint_V \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) d^3x \quad (3.6)$$

Kraftdichte auf Punktladung

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \frac{1}{c} q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)) \quad (3.7)$$

Das Kraftfeld ist dann ebenfalls nur im Aufenthaltsort der Ladung präsent, was zu einem echten Kraftvektor \mathbf{F} mit $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{F} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t))$ führt. Fügen wir noch ein elektrostatisches Feld \mathbf{E} hinzu, dann erhalten wir die

Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{1}{c} q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.8)$$

Von einem Strom erzeugtes Feld

Betrachte nun die Wechselwirkung von zwei stromdurchflossenen Leitern. Mit obiger Definition des \mathbf{B} -Feldes beobachtet man folgende Gesetzmäßigkeiten für ein vom Leiterelement mit I , $d\mathbf{l}$ am Ort \mathbf{y} erzeugte Feld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ ($B \equiv |\mathbf{B}|$):

$$dB \propto I dl, \quad d\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}, \quad d\mathbf{B} \perp (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad d\mathbf{B} \propto \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}, \quad dB \propto \sin(\angle(d\mathbf{l}, \mathbf{x} - \mathbf{y}))$$

Mit obiger Definition der Flussdichte wird die Proportionalitätskonstante in der gesamten Gesetzmäßigkeit durch Messung festgelegt. Insgesamt kann das Verhalten durch folgende Gleichung beschrieben werden:

Biot-Savart-Gesetz

$$d\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{I}{c} \int \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \times d\mathbf{l} \quad (3.10)$$

Ersetze $I d\mathbf{l}$ durch $\mathbf{j} d^3x$.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \iiint_V \mathbf{j}(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d^3y \quad (3.11)$$

Feld eines unendlich langen geraden Drahtes

Zur Berechnung benutzen wir Zylinderkoordinaten:

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z$$

¹Diese Definition führt aber zu gleichen Amplituden von \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld in der elektromagnetischen Welle, ein wesentlicher Vorzug des Gauß'schen Einheitensystems.

Für den Draht in z -Richtung gilt:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = I\delta(x_1)\delta(x_2)\hat{\mathbf{x}}_3 = I\frac{\delta(r)}{2\pi r}\hat{\mathbf{z}}$$

Normierung der δ -Funktion:

$$I = \int \int \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \, dx_1 \, dx_2 = I \int_0^{2\pi} \int \frac{\delta(r)}{2\pi r} r \, dr \, d\varphi$$

Wähle aus Symmetriegründen o.B.d.A. $z = 0$, $\varphi = 0$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{B}(r)$. Daraus folgt unter Anwendung des Biot-Savart-Gesetzes (3.10) bzw. (3.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(r) &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(\varrho)}{2\pi\varrho} \frac{1}{(\varrho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \times (r\mathbf{e}_r - z\hat{\mathbf{z}})\varrho \, d\varphi \, d\varrho \, dz = \frac{1}{c} r\mathbf{e}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{I}{c} r\mathbf{e}_\varphi \left[\frac{z}{r^2\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2I}{cr} \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

Kraft zwischen parallelen Drähten

Betrachte die Kraft auf $d\mathbf{l}_1$ im Feld $\mathbf{B}_2 = \frac{2I_2}{cr} \mathbf{e}_\varphi$ im Abstand r entlang der x_1 -Achse:

$$d\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) = \frac{I_1}{c} d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_2(\mathbf{x}) = \frac{2I_1 I_2}{rc^2} dl_1 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_\varphi = \frac{2I_1 I_2}{rc^2} dl_1 \mathbf{e}_r$$

Die Kraft ist also attraktiv für gleichsinnigen, repulsiv für gegensinnigen Strom.

3.3 Feldgleichungen der Magnetostatik

Vektorpotential

Wir können die magnetische Flussdichte (3.11) umschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{y}) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d^3y = -\frac{1}{c} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{y}) \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \\ &= \frac{1}{c} \nabla \times \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Dabei ist die allgemeine Form des Vektorpotentials

Magnetisches Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \nabla \Lambda(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

mit einem beliebigen Skalarfeld $\Lambda(\mathbf{x})$. Die Wahl $\Lambda(\mathbf{x}) \equiv 0$ heißt *Coulomb-Eichung*. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \nabla \cdot \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = -\frac{1}{c} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{c} \iiint \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \nabla_y \cdot \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y \stackrel{\rho=0}{=} 0 \end{aligned}$$

Umgekehrt bezeichnen wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla \Lambda(\mathbf{x})$$

als *Eichtransformation*. Eine solche lässt das physikalische Feld \mathbf{B} invariant.

Wir berechnen als Nächstes unter Verwendung von (1.42):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{Coulomb-Eichung}}{=} -\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{c} \iiint \Delta \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \\ &= \frac{4\pi}{c} \iiint \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Die gewonnene Identität beinhaltet nur die physikalischen Größen \mathbf{B} und \mathbf{j} , ist also, obwohl wir in der Herleitung die Coulomb-Eichung benutzt haben, eichinvariant. Man kann sich natürlich leicht vergewissern, dass auch mit $\Lambda(\mathbf{x}) \neq 0$ das gleiche Resultat folgt.²

Weiterhin ist $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$.

Insgesamt erhalten wir die

Feldgleichungen der Magnetostatik

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (3.14)$$

Gl. (3.14) wird in der Elektrodynamik noch einen Zusatzterm erhalten. Benutzen wir $\nabla \cdot \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{A}$ (in Coulomb-Eichung) und $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$, erhalten wir die alternative Form

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (3.15)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (3.16)$$

Die Gleichung (3.13) impliziert, dass es keine magnetischen Ladungen (Monopole) gibt. Die Integralform der Feldgleichung (3.14) ist das *Ampère'sche Gesetz*.

Ampère'sches Gesetz

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_A \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{c} I_A \quad (3.17)$$

²Dies folgt aus $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \nabla \times \nabla \Lambda = \nabla \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

3.4 Magnetischer Fluss

Der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} zugehörig definieren wir den Fluss Φ durch eine Fläche A :

$$\Phi = \iint_A \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{a})) \cdot d\mathbf{a} = \oint_{\partial A} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.18)$$

Der Fluss hängt also nur vom Rand der Fläche ab, und verschwindet dieser für eine geschlossene Fläche, so ist auch der Fluss gleich Null. Dies kann natürlich auch als Konsequenz der Quellenfreiheit der Flussdichte gesehen werden:

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \, d^3x = 0 \quad (3.19)$$

Beispiel: Homogen durchflossener zylindrischer Draht entlang der z -Achse

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_z \begin{cases} I/\pi R^2 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

In der Coulomb-Eichung ist $\mathbf{A} \parallel \mathbf{j}$ (vgl. Gl. (3.12)). Mit der Zylindersymmetrie folgt

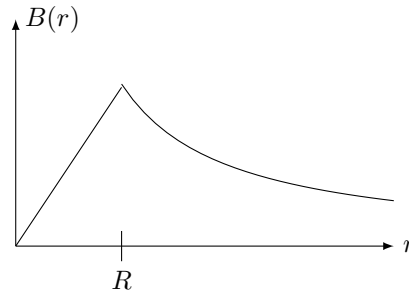
$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv A(r)\mathbf{e}_z \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv B(r)\mathbf{e}_\varphi$$

Wähle nun im Ampère'schen Gesetz A als eine Kreisfläche vom Radius ϱ senkrecht zum Draht.

$$\oint_{\partial A} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{a} = 2\pi\varrho B(\varrho) = \frac{4\pi}{c} \frac{I}{\pi R^2} 2\pi \int_0^{\min(\varrho, R)} \varrho' \, d\varrho' = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} I \frac{\varrho^2}{R^2} & \varrho \leq R \\ 4\pi I/c & \varrho > R \end{cases}$$

Daraus erhalten wir das Magnetfeld

$$B(r) = \frac{2I}{c} \mathbf{e}_\varphi \begin{cases} r/R^2 & r \leq R \\ 1/r & r > R \end{cases}$$



Beispiel: Unendlich lange Spule

Betrachte eine Spule in Form eines Zylinders, symmetrisch um die z -Achse mit Radius R , N_S Windungen auf der Länge l_S . Daraus erhalten wir die Stromdichte³

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = j(r)\mathbf{e}_\varphi = \frac{N_S I}{l_S} \delta(r - R)\mathbf{e}_\varphi \quad (3.20)$$

Mit $\mathbf{j} \perp \mathbf{e}_z$ folgt $\mathbf{A} \perp \mathbf{e}_z$. Wir können also ansetzen

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \equiv A_r(r)\mathbf{e}_r + A_\varphi(r)\mathbf{e}_\varphi$$

Zur Berechnung in Zylinderkoordinaten müssen noch entsprechende Operatoren eingeführt werden, welche die folgende Form haben:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z$$

³Wir gehen hier davon aus, dass die Windungen so dicht sind, dass der Anteil $\mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{z}} \approx 0$ ist.

Daraus ergibt sich mit einer Konstanten k in Coulomb-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r(r)) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_r(r) = \frac{k}{r}$$

Für $A_r(0)$ endlich (vgl. Gl. (3.12)) folgt $k = 0$. Damit ergibt sich der Zwischenansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= A_\varphi(r) \mathbf{e}_\varphi \\ \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \mathbf{e}_z \equiv B(r) \mathbf{e}_z \\ \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} &= -\frac{\partial B}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

Aus der Feldgleichung (3.14) und Gl. (3.20) folgt damit

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi(r)) \right] = \frac{4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S} \delta(r - R)$$

Wir integrieren diese Gleichung nach r und multiplizieren mit (-1) , woraus folgt

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = -\frac{4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S} (\theta(r - R) + C_1)$$

Multiplikation mit r und nochmalige Integration liefert

$$r A_\varphi = -\frac{4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S} \left(\frac{1}{2} (r^2 - R^2) \theta(r - R) + \frac{1}{2} C_1 r^2 + C_2 \right)$$

Aus Gl. (3.12) von \mathbf{A} folgt $\mathbf{A}(0) = \mathbf{A}(\infty) = \mathbf{0}$ und damit $C_2 = 0$, $C_1 = -1$. Insgesamt erhalten wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = A_\varphi(r) \mathbf{e}_\varphi = \frac{4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S} \begin{cases} r/2 & r \leq R \\ R^2/2r & r > R \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_z \frac{4\pi}{c} \frac{N_S I}{l_S} \begin{cases} 1 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (3.22)$$

Für eine endlich lange Spule verschwindet das Feld im Außenbereich nicht. Man kann aber im Inneren immer noch ein sehr homogenes und im Vergleich zum Außenbereich starkes Feld erzeugen.

Setzen wir Homogenität im Innenbereich voraus sowie das Verschwinden des Feldes im Äußeren, und integrieren entlang eines Rechtecks, welches jeweils zur Hälfte im Innen- und Außenbereich liegt, dann erhalten wir

$$\oint_l \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r} = l_x B_0 = \frac{4\pi}{c} N_x I$$

Mit $N_x/l_x = N_S/l_S$ ist dies in Übereinstimmung mit Gl. (3.22). Man kann sich die Form des Magnetfeldes auch mit geometrischen Argumenten (Wegunabhängigkeit des obigen Integrals, solange der Strom eingeschlossen wird) klarmachen. Letztlich entspricht eine solche Argumentation den Heraushebungen der Feldkomponenten in bestimmten Richtungen und Regionen, welche obige Rechnung explizit zeigt.

3.5 Magnetischer Dipol

Da es keine magnetischen Ladungen gibt, kommt dem Dipol (z.B. in Form von Elementarteilchen oder im Stabmagneten) eine besondere Bedeutung zu.

Betrachte eine lokalisierte Stromverteilung mit $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ für $x \equiv |\mathbf{x}| > R_0$. Damit führen wir nun eine Taylorentwicklung durch:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \stackrel{y \ll x}{\approx} \frac{1}{x} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x^3} + \dots \quad (3.23)$$

Dies wenden wir nun auf das Vektorpotential Gl. (3.12) an:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = \frac{1}{cx} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y + \frac{1}{cx^3} \iiint (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y + \dots \quad (3.24)$$

Der erste Summand könnte einen Monopol vermuten lassen. Wegen $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ gilt jedoch

$$\nabla \cdot (\mathbf{x} \mathbf{j}(\mathbf{x})) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) + x_i \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}) = j_i(\mathbf{x}) \quad (3.25)$$

und damit wiederum für ein Volumen $V = \{\mathbf{x} \mid x \leq R_0\}$, da $\mathbf{j}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ für $\mathbf{y} \in \partial V$

$$\iiint_V j_i(\mathbf{y}) d^3y = \iiint_V \nabla_y \cdot (y_i \mathbf{j}(\mathbf{y})) d^3y = \oint_{\partial V} y_i \mathbf{j}(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Damit verschwindet der Monopolterm.

Wir merken ferner an:

$$\nabla \cdot (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_k \mathbf{j}) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{j} x_k + \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{j} x_i + x_i x_k \nabla \cdot \mathbf{j} = x_k j_i + x_i j_k \quad (3.26)$$

Daraus folgt

$$x_k \mathbf{e}_i \iiint_V (y_k j_i(\mathbf{y}) + y_i j_k(\mathbf{y})) d^3y = x_k \mathbf{e}_i \oint_{\partial V} (y_i y_k \mathbf{j}(\mathbf{y})) \cdot d\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

$$\stackrel{\text{Aufsummieren}}{\Rightarrow} \iiint_V (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y = - \iiint_V (\mathbf{x} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{y})) \mathbf{y} d^3y \quad (3.28)$$

Dies setzen wir nun in die Näherung (3.24) ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{cx^3} \iiint (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y = \frac{1}{cx^3} \iiint \frac{1}{2} [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{y})) \mathbf{y}] d^3y \\ &= \frac{1}{2cx^3} x_k \mathbf{e}_i \iiint (y_k j_i(\mathbf{y}) - y_i j_k(\mathbf{y})) d^3y \end{aligned}$$

Ferner gilt hier

$$(\mathbf{y} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{x} = \varepsilon_{ijk} (\mathbf{y} \times \mathbf{j})_j x_k \mathbf{e}_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljm} y_l j_m x_k \mathbf{e}_i = (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) y_l j_m x_k \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i x_k (y_k j_i - y_i j_k)$$

Damit folgt für das Vektorpotential die Fernfeldnäherung

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2cx^3} \mathbf{x} \times \iiint \mathbf{y} \times \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y \quad (3.29)$$

Aufgrund der Bedeutsamkeit dieses Integrals definieren wir eine neue Größe

Magnetisches Dipolmoment der Stromverteilung

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \iiint \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) d^3x \quad (3.30)$$

Somit gilt

Magnetisches Vektorpotential in Fernfeldnäherung

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{x}}{x^3} + \dots \quad (3.31)$$

Die Terme höherer Ordnung sind jeweils um einen Faktor R_0/x unterdrückt. Für \mathbf{B} betrachte

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \mathbf{e}_i = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \partial_j \varepsilon_{klm} \mu_l x_m \frac{1}{x^3} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \left(\delta_{jm} \frac{\mu_l}{x^3} - 3 \frac{\mu_l x_m x_j}{x^5} \right) \mathbf{e}_i \\ &= \left(3 \frac{\mu_i}{x^3} - \delta_{ij} \delta_{jl} \frac{\mu_l}{x^3} - 3 \frac{\mu_i x_j x_j}{x^5} + 3 \frac{\mu_j x_j x_i}{x^5} \right) \mathbf{e}_i = \left(-\frac{\mu_i}{x^3} + 3 \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\mu}}{x^5} x_i \right) \mathbf{e}_i\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir

Magnetische Flussdichte in Fernfeldnäherung

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu}x^2}{x^5} \quad (3.32)$$

Dieser Zusammenhang zwischen Dipolmoment und Feld entspricht dem elektrostatischen Fall.

Beispiel: Punktdipol

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\frac{c}{4\pi} \Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{c}{4\pi} \Delta \left(\frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{x}}{x^3} \right) = \frac{c}{4\pi} \Delta (\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \frac{1}{x} = \frac{c}{4\pi} (\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \Delta \left(\frac{1}{x} \right) = -c (\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \delta^3(\mathbf{x})$$

Beispiel: Drahtschleife

Betrachte eine Schleife mit Radius R in der xy -Ebene, welche vom Strom I durchflossen wird. Die Stromdichte ist damit gegeben durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = I \delta(r - R) \delta(z) \mathbf{e}_\varphi$$

Damit wird das Dipolmoment der Drahtschleife nach Gl. (3.30) berechenbar:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{2c} \iiint \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \, d^3x = \frac{1}{2c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_\varphi I \delta(r - R) \delta(z) r \, dz \, d\varphi \, dr \\ &= \frac{I}{2c} 2\pi R^2 \mathbf{e}_z = \frac{I\pi R^2}{c} \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Gyromagnetisches Verhältnis

Eine Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x})$ rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ um den Ursprung. Daraus erhalten wir

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

Damit folgt für das Dipolmoment

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \iiint \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \, d^3x$$

Es werde die Massendichte $\rho_m(\mathbf{x})$ mitgeführt. Daraus erhalten wir den Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \iiint \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rho_m(\mathbf{x}) \, d^3x$$

Gilt $\rho(\mathbf{x})/q = \rho_m(\mathbf{x})/m$ (z.B. für eine Punktladung) mit

$$q = \iiint \rho(\mathbf{x}) \, d^3x \quad m = \iiint \rho_m(\mathbf{x}) \, d^3x$$

dann folgt daraus

Gyromagnetisches Verhältnis

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{q}{2mc} \mathbf{L} \quad (3.33)$$

Der g -Faktor bezeichnet hierbei Abweichungen von $g = 1$ in der Elektrodynamik und in der Quantenmechanik (Bahndrehimpuls). Allerdings führt Diracs relativistische Beschreibung des Elektrons zu $g \approx 2$. In der Quantenelektrodynamik lassen sich Korrekturen dazu berechnen:

$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} + \dots, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

Die Korrekturen sind heute bis zur Ordnung α^5 bekannt mit $e \approx 4,80 \cdot 10^{-10}$ statC, $\hbar \approx 1,05 \cdot 10^{-27}$ erg s und $c \approx 3,00 \cdot 10^{10}$ cm/s. Die experimentelle Genauigkeit ist geringfügig besser. Theorie und Experiment stimmen zu einer relativen Präzision von 10^{-9} überein.

3.6 Kräfte auf lokalisierte Stromverteilungen

Betrachte wieder eine Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ für $x \equiv |\mathbf{x}| > R_0$ im Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$. Wir führen nun eine Taylorentwicklung in der Nähe der Verteilung durch:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{0}) + (\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{B}(\mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} + \dots$$

Berechne nun die Kraft mit Gl. (3.6):

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \, d^3x = \frac{1}{c} \iiint (\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} \, d^3x + \dots \quad (3.34)$$

Dabei ist

$$\iiint \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{0}) \, d^3x = \varepsilon_{ijk} B_j(\mathbf{0}) e_k \iiint j_i(\mathbf{x}) \, d^3x = \mathbf{0}$$

Wir merken zunächst für das Dipolmoment an

$$\begin{aligned} \mu_t &= \frac{1}{2c} \varepsilon_{trs} \iiint x_r j_s \, d^3x \\ \Rightarrow \varepsilon_{ljt} \mu_t &= \frac{1}{2c} (\delta_{rl} \delta_{sj} - \delta_{rj} \delta_{sl}) \iiint x_r j_s \, d^3x = \frac{1}{2c} \iiint (x_l j_j - x_j j_l) \, d^3x \stackrel{(3.27)}{=} \frac{1}{c} \iiint x_l j_j \, d^3x \end{aligned}$$

Gl. (3.34) in Komponenten ausgedrückt lautet somit:

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{c} \iiint \varepsilon_{ijk} x_l (\nabla_{\mathbf{y}})_l j_j(\mathbf{x}) B_k(\mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{0}} \, d^3x + \dots = \varepsilon_{ljt} \mu_t \varepsilon_{ijk} \partial_l B_k + \dots = (\delta_{tk} \delta_{li} - \delta_{ti} \delta_{lk}) \mu_t \partial_l B_k + \dots \\ &= \partial_i (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) - \underbrace{\mu_i (\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} + \dots \end{aligned}$$

Es gilt also in erster Näherung

Kraft und Potential auf eine Stromverteilung im Fernfeld

$$\mathbf{F} = \nabla (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \quad (3.35)$$

$$W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (3.36)$$

Drehmoment

Mit der Kraftdichte $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \iiint \mathbf{x} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d^3x = \frac{1}{c} \iiint \mathbf{x} \times (\mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{0})) \, d^3x + \dots \\ &\stackrel{\text{BAC-CAP}}{=} \frac{1}{c} \iiint [\mathbf{j}(\mathbf{x})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{0})) - \mathbf{B}(\mathbf{0})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}))] \, d^3x + \dots \\ &= \frac{e_i}{c} \iiint (j_i(\mathbf{x}) x_j B_j(\mathbf{0}) - B_i(\mathbf{0}) x_j j_j(\mathbf{x})) \, d^3x + \dots \\ &= -\varepsilon_{ijk} \mu_k B_j(\mathbf{0}) e_i - \underbrace{\varepsilon_{jjk}}_{=0} \mu_k B_i(\mathbf{0}) e_i + \dots \end{aligned}$$

Wir erhalten also

Drehmoment einer Stromverteilung im Fernfeld

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (3.37)$$

Wir prüfen nun noch die Konsistenz mit dem Potential W :

$$W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -|\boldsymbol{\mu}| |\mathbf{B}| \cos \theta, \quad |\mathbf{M}| = \left| -\frac{\partial W}{\partial \theta} \right| = |\boldsymbol{\mu}| |\mathbf{B}| \sin \theta = |\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}|$$

Beispiel: Wechselwirkungspotential zweier magnetischer Dipole

Betrachte das Feld von Dipol 2 (welcher sich am Ort \mathbf{x}_2 befindet) am Ort \mathbf{x}_1 von Dipol 1 (vgl. Gl. (3.32)):

$$\mathbf{B}_2 = \frac{3(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)((\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \boldsymbol{\mu}_1) - \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^5}$$

Daraus folgt nach Gl. (3.36)

$$W_{12} = -\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{B}_2 = -\frac{3((\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \boldsymbol{\mu}_1)((\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot \boldsymbol{\mu}_2) - (\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^5} = W_{21}$$

Dies erfolgt analog zum elektrostatischen Fall.

Kapitel 4

Elektrische und magnetische Felder in polarisierbarer Materie

4.1 Gemittelte elektrische Felder

Bislang wurden Elektro- und Magnetostatik nur im Vakuum behandelt. Dies liefert die grundlegenden Gleichungen für mikroskopische Felder (d.h. diese behalten ihre Gültigkeit bis zu sehr kleinen Skalen, wo wir zur quantenphysikalischen Beschreibung der Atom-, Kern- und Teilchenphysik übergehen).

In vielen praktischen Problemen ist Materie präsent, Gase, Flüssigkeiten, Festkörper, welche aus einer Vielzahl geladener (Atome und Kerne) Konstituenten oder solchen mit elektrischen Dipolmomenten (Moleküle) besteht. Statt diese einzeln aufzulösen, benutzen wir *makroskopische* (gemittelte, phänomenologische,...) Gleichungen und Größen.

Wir benutzen in diesem Abschnitt zunächst neue Symbole für mikroskopische elektrische Feld $\mathbf{E} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$ und die mikroskopische Ladungsdichte $\rho \rightarrow \tilde{\rho}$. Damit lauten die mikroskopischen Maxwellgleichungen der Elektrostatik:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} &= 4\pi\tilde{\rho}, & \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= \iiint \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \tilde{\rho}(\mathbf{y}) \, d^3y\end{aligned}$$

Beides mitteln wir nun über ein Volumen ΔV um einen Punkt \mathbf{x} mit großer Anzahl an Atomen:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \, d^3\xi, \quad \langle \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \tilde{\rho}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \, d^3\xi$$

Nummeriere die Moleküle in ΔV mit j , Ladungen e_j und Dipolmomente \mathbf{p}_j . Unter Vernachlässigung höherer Multipole erhalten wir für das mikroskopische Feld

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = -\nabla \sum_{j=1}^n \left(\frac{e_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} + \mathbf{p}_j \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3} \right) = -\nabla \sum_{j=1}^n \left(\frac{e_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} + \mathbf{p}_j \cdot \nabla_{\mathbf{x}_j} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} \right)$$

Definiere

$$\rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n e_j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$$

Damit können wir das elektrische Feld folgendermaßen schreiben:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = -\nabla \iiint \left(\frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right) d^3y$$

Daraus folgt für das gemittelte Feld

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle &= \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \iiint \left(\frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|} + \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^3} \right) d^3y \, d^3\xi \\ &= \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \iiint \left(\frac{\rho_{\text{mol}}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right) d^3y \, d^3\xi\end{aligned}$$

Ist $n(\mathbf{x})$ die Anzahldichte der Moleküle und $\langle \rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}) \rangle$, $\langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}) \rangle$ deren durchschnittliche Ladung bzw. Polarisation, dann können wir schreiben

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \rho_{\text{mol}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \, d^3\xi &= n(\mathbf{x}) \langle \rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}) \rangle \\ \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \boldsymbol{\pi}_{\text{mol}}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \, d^3\xi &= n(\mathbf{x}) \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}) \rangle \\ \Rightarrow \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle &= -\nabla \iiint n(\mathbf{y}) \left(\frac{\langle \rho_{\text{mol}}(\mathbf{y}) \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{y}) \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) d^3y \end{aligned}$$

Um zum Gauß'schen Gesetz für das gemittelte Feld zu gelangen, bilden wir die Divergenz

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle &= 4\pi \iiint n(\mathbf{y}) (\langle \rho_{\text{mol}}(\mathbf{y}) \rangle \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{y}) \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \, d^3y \\ &= 4\pi n(\mathbf{x}) \langle \rho_{\text{mol}}(\mathbf{x}) \rangle - 4\pi \nabla \cdot (n(\mathbf{x}) \langle \mathbf{p}_{\text{mol}}(\mathbf{x}) \rangle) \end{aligned}$$

Offenbar bedeutet der erste Term, dass wir über einzelne Ladungen mitteln können (z.B. positive und negative Ionen im Salzkristall). In vielen Fällen mitteln sich diese Ladungen zu Null. Der zweite Term führt zur Änderung des mikroskopischen elektrischen Feldes, sofern die gemittelte Polarisation sich räumlich ändert. Als typischen Fall denke man an die Grenzfläche eines polarisierten Materials. Im Inneren heben sich die Dipolbeiträge heraus, während in einem Streifen in der Nähe des Randes ein Ladungsüberschuss vorhanden sein kann. Dieser Sachverhalt wird durch den zweiten Beitrag, also in differentieller Form ausgedrückt.

Polarisations- und Ladungsdichte:

$$\mathbf{P} = n \langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle, \quad \rho = n \langle \rho_{\text{mol}} \rangle + \rho_{\text{ex}}$$

Dabei haben wir eine freie Ladungsdichte ρ_{ex} hinzugefügt. Aufgrund der Linearität geht diese additiv in das Gauß'sche Gesetz ein.

Außerdem verwenden wir in den *makroskopischen* Gleichungen $\mathbf{E} \equiv \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ für das gemittelte Feld. Die Kraft $\mathbf{F} = \mathbf{E}q$ ist dann die Kraft, welche z.B. eine makroskopische geladene Kugel (Ladung q) in einem polarisierbaren Gas erfährt.

Elektrische Flussdichte oder dielektrische Verschiebung

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad (4.1)$$

Damit wird das Gauß'sche Gesetz zu

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi n \langle \mathbf{p}_{\text{mol}} \rangle) = 4\pi n \langle \rho_{\text{mol}} \rangle + 4\pi \rho_{\text{ex}}$$

Gauß'sches Gesetz

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \rho \quad (4.2)$$

Das makroskopische Feld ist immer noch ein Gradientenfeld (s.o.), weshalb immer noch gilt

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

Insgesamt ergibt sich das makroskopische elektrische Feld aus den hier definierten mittleren Ladungs- und Polarisationsdichten zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \iiint \left(\frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \mathbf{P}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) d^3y \quad (4.4)$$

4.2 Phänomenologische Dielektrika und Randbedingungen

Ähnlich den Permanentmagneten lassen sich Materialien mit einer Polarisationsdichte $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$ erzeugen, was allerdings etwas schwieriger ist als im magnetischen Fall. Auch wenn diese sogenannten Elektrite z.B. in Mikrofonen recht verbreitet sind, übergehen wir dies hier. In der Tat ist für die meisten Materialien $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, falls $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Andernfalls können wir entwickeln:

$$P_i = \sum_j a_{ij} E_j + \sum_{j,k} b_{ijk} E_j E_k + \dots$$

Typische zwischenatomare Felder sind in der Größenordnung 10^9 V/cm – viel größer als technisch realisierbare statische makroskopische Felder. Diese stellen für das Material also nur eine kleine Störung dar, sodass die lineare Näherung völlig ausreichend ist.

Im allgemeinen Fall sind Materialien anisotrop (z.B. Calcit und Quarz). Man kann zeigen, dass a_{ij} ein symmetrischer Tensor ist, d.h. sechs Freiheitsgrade hat. Für die meisten Substanzen, insbesondere solche mit ungeordneten Molekülen/Atomen/Ionen ist a_{ij} proportional zur Einheitsmatrix (Isotropie)

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$$

mit der elektrischen Suszeptibilität χ_e . Daraus folgt

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = (1 + 4\pi\chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}$$

mit der *dielektrischen Konstanten* $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e$. Ist das Material nicht nur isotrop, sondern auch homogen (uniform), dann ist ε ortsunabhängig.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$$

Damit sind die Probleme im Medium auf solche im Vakuum mit reskaliertem (reduzierter) Ladungsdichte zurückgeführt.

Von besonderem Interesse sind auch Grenzflächen zwischen Dielektrika oder einem Dielektrikum und dem Vakuum. Mit dem Gauß'schen Satz folgt, wie bereits für Flächenladungen gezeigt, dass

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 4\pi\sigma \quad (4.5)$$

\mathbf{n} zeigt von Region 1 nach Region 2. Da die Gleichungen nun makroskopisch sind, schließt die Flächenladungsdichte σ *nicht* die Polarisationsdichte ein.

Ist $\sigma = 0$, ist die Normalkomponente von \mathbf{D} an der Grenzfläche somit stetig.

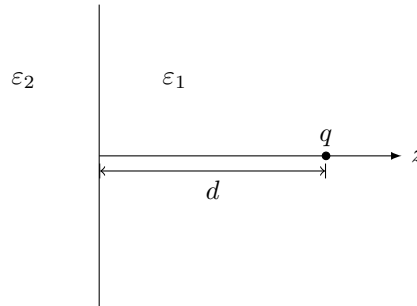
Da das makroskopische elektrische Feld im statischen Fall rotationsfrei ist, folgt wie bei der Diskussion der Flächenladungen, dass

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

d.h. die Tangentialkomponente von \mathbf{E} ist an der Grenzfläche stetig.

4.3 Randwertprobleme mit Dielektrika

Betrachte als Beispiel eine Ladung q in einem Material mit ε_1 in einer Entfernung d zu einer ebenen Grenzfläche zu einem anderen Material mit ε_2 . Wähle die Koordinaten so, dass die Grenzfläche $z = 0$ entspricht.



Zu lösen sind damit die Gleichungen

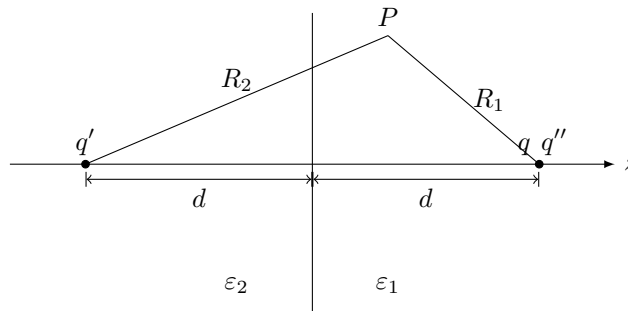
$$\varepsilon_1 \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad z > 0 \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_2 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad z < 0 \quad (4.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

mit der Randbedingung

$$\lim_{z \downarrow 0} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 E_z \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \lim_{z \uparrow 0} \begin{pmatrix} \varepsilon_2 E_z \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (4.10)$$



Wegen Gl. (4.9) können wir \mathbf{E} wieder als Gradientenfeld $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ansetzen. Weiterhin wählen wir

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right) \quad z > 0$$

$$\phi = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{q''}{R_1} \quad z < 0$$

mit $R_1 = \sqrt{\varrho^2 + (d-z)^2}$, $R_2 = \sqrt{\varrho^2 + (d+z)^2}$ und $\varrho^2 = x^2 + y^2$. Dies sind offenbar Lösungen des Gauß'schen Gesetzes innerhalb der beiden Materialien. Zu bestimmen sind aber noch q' und q'' mittels der Randbedingungen. Wir bilden dazu die Normalen- und Tangentialableitungen.

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_1} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R_2} \right|_{z=0} = \frac{d}{(\varrho^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{R_1} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{1}{R_2} \right|_{z=0} = \frac{\varrho}{(\varrho^2 + d^2)^{3/2}}$$

Aus der Stetigkeit der Normalkomponente von \mathbf{D} folgt damit $q - q' = q''$.

Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente von \mathbf{E} folgt

$$\frac{q + q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2}$$

Dies fassen wir nun zusammen und erhalten

$$q' = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}q \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}q$$

Wir wollen die Grenzfläche nun noch genauer betrachten. Siehe hierzu die Polarisationsladungsdichte

$$\rho_{\text{Pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\partial}{\partial z}P_z$$

Durch Integration über ein Gauß'sches Kästchen mit \mathbf{n} von 1 nach 2 erhalten wir $\sigma_{\text{Pol}} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \frac{\varepsilon_i - 1}{4\pi} \mathbf{E} = -\frac{\varepsilon_i - 1}{4\pi} \nabla \phi \\ \Rightarrow \sigma_{\text{Pol}} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right) - \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{q''}{R_1} \right) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{d}{(\varrho^2 + d^2)^{3/2}} \left(\frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon_1} (q - q') - \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon_2} q'' \right) = -\frac{q}{2\pi} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \frac{d}{(\varrho^2 + d^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

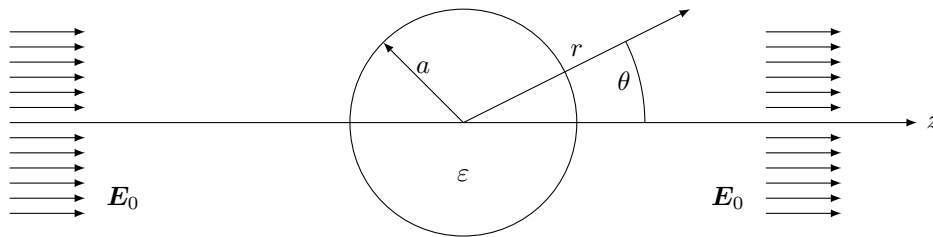
Vergleichen wir dies nun mit der Influenzladungsdichte auf einer leitenden Platte im Vakuum, die sich aufgrund einer Punktladung ergibt

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi} \frac{qd}{(\varrho^2 + d^2)^{3/2}}$$

so stellen wir fest, dass dies dem Fall $\varepsilon_1 = 1$ und $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ entspricht.

Als nächstes Beispiel betrachten wir eine homogene dielektrische Kugel mit Radius a im ladungsfreien Raum. Diese sei einem elektrischen Feld ausgesetzt, welches in großen Abständen homogen mit dem Betrag E_0 sei.

Wähle folgende Koordinaten:



Wiederum haben der Separationsansatz für die Laplacegleichung in Kugelkoordinaten und die Entwicklung in einem vollständigen Funktionensystem ihren Auftritt. Nämlich sind die Lösungen von der Form

$$\begin{aligned} \phi_{\text{in}} &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad r < a \\ \phi_{\text{out}} &= \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^l + C_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta) \quad r > a \end{aligned}$$

Wir haben die Randbedingungen:

- $r \rightarrow \infty$: $\phi \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \theta \Rightarrow B_1 = -E_0, B_l = 0$ für $l \neq 1$
- $r = a$: Normalenstetigkeit von \mathbf{D} :

$$-\varepsilon \frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \phi_{\text{out}}}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

- $r = a$: Tangentenstetigkeit von \mathbf{E} :¹

$$-\frac{1}{a} \frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \phi_{\text{out}}}{\partial \theta} \Big|_{r=a}$$

¹Vgl. Gradient in Kugelkoordinaten.

Aus der tangentialen Stetigkeit folgt

$$\begin{aligned} l = 1 : \quad & A_1 a = B_1 a + \frac{C_1}{a^2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{a^3} \\ l \neq 1 : \quad & A_l = \frac{C_l}{a^{2l+1}} \end{aligned}$$

Aus der Normalenstetigkeit folgt

$$\begin{aligned} l = 1 : \quad & \varepsilon A_1 = B_1 - 2 \frac{C_1}{a^3} = -E_0 - \frac{2C_1}{a^3} \\ l \neq 1 : \quad & l a^{l-1} A_l = -(l+1) \frac{C_l}{a^{l+2}} \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen für $l \neq 1$ lassen sich nur mit $A_l = C_l = 0$ erfüllen. Die Gleichungen mit $l = 1$ führen zu

$$A_1 = -\frac{3E_0}{\varepsilon + 2}, \quad C_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 E_0$$

Daraus erhalten wir unser Ergebnis:

$$\phi_{\text{in}} = -\frac{3E_0}{\varepsilon + 2} r \cos \theta = -\frac{3E_0}{\varepsilon + 2} z, \quad \phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{a^3}{r^2} E_0 \cos \theta$$

Im Inneren der Kugel ist das Feld also homogen:

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{3E_0}{\varepsilon + 2} \hat{\mathbf{z}}$$

Man beachte, dass $|\mathbf{E}_{\text{in}}| < |\mathbf{E}_0|$.

Außerhalb entspricht der erste Term dem angegebenen Feld und der zweite einem Dipol

$$\mathbf{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 E_0 \hat{\mathbf{z}}$$

Vgl. hierzu

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \\ q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} |\mathbf{p}|, \quad Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ \Rightarrow \quad \frac{4\pi}{3} \frac{3}{4\pi} |\mathbf{p}| &= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 E_0 \end{aligned}$$

Wie erwartet, ist dies gleich dem Volumenintegral der Polarisation:

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{P} = \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{1}{3} a^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} 3E_0 \hat{\mathbf{z}}$$

4.4 Magnetfelder in Materie

Ersetze $\mathbf{A} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}$ für das totale mikroskopische Vektorpotential.

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}_{\text{mol}}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

Der erste Term entspricht makroskopischen, messbaren Strömen. Der zweite Term beinhaltet mikroskopische Stromquellen, über die wir mitteln. Mikroskopisch eignet sich eine Beschreibung durch magnetische Dipolmomente \mathbf{m}_{mol} , welche auf atomarer und subatomarer Ebene nicht mehr als klassische Ströme sind, wohl aber quantenmechanisch behandelt werden können. Der von der mikroskopischen Quelle j erzeugte Beitrag lautet damit (vgl. Gl. (3.31))

$$\boldsymbol{\alpha}_{\text{mol}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m}_{\text{mol}} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3}$$

Definiere die *Magnetisierung*:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}) \langle \mathbf{m}_{\text{mol}}(\mathbf{x}) \rangle$$

Damit können wir das makroskopische Vektorpotential schreiben als

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y + \iiint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d^3y$$

Der erste Summand ist aus der Behandlung magnetischer Phänomene im Vakuum bereits wohlbekannt. Wir betrachten nun das zweite Integral etwas genauer.

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y}) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d^3y &= \iiint \mathbf{M}(\mathbf{y}) \times \nabla_y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \\ &= \iiint \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \nabla_y \times \mathbf{M}(\mathbf{y}) d^3y - \iiint \nabla_y \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \\ &= \iiint \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \nabla_y \times \mathbf{M}(\mathbf{y}) d^3y + \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \times d\mathbf{a} \end{aligned}$$

Der letzte Term verschwindet, sofern \mathbf{M} lokalisiert ist und das Integrationsvolumen entsprechend größer gewählt wird. Wir erhalten damit

Vektorpotential in Materie

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y}) + c \nabla_y \times \mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \quad (4.11)$$

Entsprechend der Herleitung für die Feldgleichungen der Magnetostatik (vgl. Kap. 3.3) erhalten wir aus $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ für die makroskopische Flussdichte die Beziehung

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + 4\pi \nabla \times \mathbf{M} \quad (4.12)$$

Wir definieren:

Magnetisches Feld

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} \quad (4.13)$$

Beachten wir noch, dass \mathbf{B} ein reines Wirbelfeld ist, erhalten wir die makroskopischen Gleichungen.

Feldgleichungen der Magnetostatik in Materie

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (4.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.15)$$

Für viele Stoffe (insbesondere nicht ferromagnetische) bestehen wieder in erster Näherung lineare Zusammenhänge:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = (1 + 4\pi \chi_m) \mathbf{H} \quad (4.16)$$

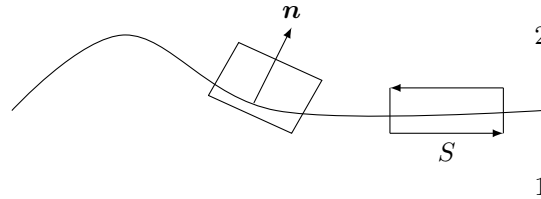
mit der magnetischen *Permeabilität* μ und der Suszeptibilität χ_m . Anders als für χ_e gibt es sowohl Stoffe mit positivem als auch mit negativem χ_m :

$\chi_m > 0$: Paramagnetismus

$\chi_m < 0$: Diamagnetismus

Ferromagneten können auch dann magnetisiert sein, wenn $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ ist. Im Allgemeinen ist hier \mathbf{B} mit \mathbf{H} nicht linear und es gilt $\mathbf{B} = \mathbf{F}(\mathbf{H})$. Aufgrund der Hysterese ist dies eine doppelwertige Abbildung. Man kann dazu die Permeabilität zu $\mu = \frac{\partial|\mathbf{B}|}{\partial|\mathbf{H}|}$ verallgemeinern, wobei diese dann sehr viel größere Werte als für Para- bzw. Diamagneten annimmt.

Randbedingungen an Grenzflächen



Wir gehen aus von $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und betrachten ein Gauß'sches Kästchen.

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, d^3x = 0$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{4.17}$$

Die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} ist an der Grenzfläche stetig.

Als Nächstes betrachten wir die Rechteckschleife S und benutzen den Satz von Stokes (A_S ist dabei das von S umschlossene Rechteck, \mathbf{c} der Normalenvektor, welcher aus der Skizze heraus zeigt, Länge von S ist l):

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{n}) = \iint_{A_S} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{c} \iint_{A_S} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\kappa}$$

mit der Flächenstromdichte $\boldsymbol{\kappa}$.

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{\kappa} \tag{4.18}$$

In Abwesenheit von Grenzflächenströmen ist die Tangentialkomponente des magnetischen Feldes \mathbf{H} stetig.

Gilt außerdem der lineare Zusammenhang (4.16) zwischen \mathbf{B} und \mathbf{H} mittels der Permeabilität, werden diese Bedingungen zu

$$\mu_2 \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{n} = \mu_1 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{n} \tag{4.19}$$

$$\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{n} \tag{4.20}$$

Als Beispiel betrachten wir eine magnetisierbare Kugel im asymptotisch homogenen Feld \mathbf{B}_0 , analog zum Beispiel für ein Dielektrikum im elektrischen Feld.

Es gilt überall $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. Also ist auch $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$ und $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ überall. Dabei muss die Grenzfläche gesondert behandelt werden.

Im Innen- und Außenbereich können wir damit \mathbf{B} und \mathbf{H} (da rotationsfrei) durch ein magnetisches Potential ausdrücken:

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_{\text{in,out}}^{(m)}$$

Für $r = a$ gelten dabei folgende Randbedingungen:

Normalenstetigkeit von \mathbf{B} :

$$-\mu \left. \frac{\partial \phi_{\text{in}}^{(m)}}{\partial r} \right|_{r=a} = - \left. \frac{\partial \phi_{\text{out}}^{(m)}}{\partial r} \right|_{r=a}$$

Tangentenstetigkeit von \mathbf{H} :

$$-\frac{1}{a} \left. \frac{\partial \phi_{\text{in}}^{(m)}}{\partial \theta} \right|_{r=a} = - \left. \frac{\partial \phi_{\text{out}}^{(m)}}{\partial \theta} \right|_{r=a}$$

Mit Hilfe des vorherigen Resultats erhalten wir unmittelbar:

$$\phi_{\text{in}}^{(m)} = -\frac{1}{\mu} \frac{3B_0}{\mu+2} r \cos \theta = -\frac{1}{\mu} \frac{3B_0}{\mu+2} z, \quad \phi_{\text{out}}^{(m)} = -\frac{B_0}{\mu} r \cos \theta + \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{a^3}{r^2} \frac{B_0}{\mu} \cos \theta$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{in}} &= \frac{3B_0}{\mu+2} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{B}_{\text{out}} &= B_0 \hat{\mathbf{z}} - \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{B_0}{\mu} a^3 \nabla \left(\frac{1}{r} \cos \theta \right) = B_0 \hat{\mathbf{z}} - B_0 \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{a^3}{r^2} \left(-\frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \sin \theta - 2 \frac{\mathbf{e}_r}{r} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Wir können aber auch schreiben

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{r^2} \cos \theta \right) \Big|_{|\mathbf{x}|=r} &\stackrel{=}{=} \nabla \left(\frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{x}}{r^3} \right) = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r^3} - 3\mathbf{x} \frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{x}}{r^5} = -\frac{3\mathbf{x}(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{x}) - \hat{\mathbf{z}}x^2}{|\mathbf{x}|^5} \\ \Rightarrow \mathbf{B}_{\text{out}} &= B_0 \hat{\mathbf{z}} + \frac{3\mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu}x^2}{|\mathbf{x}|^5} \end{aligned}$$

Dabei identifizieren wir das induzierte magnetische Dipolmoment der Kugel mit

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 B_0 \hat{\mathbf{z}}$$

Kapitel 5

Maxwell-Gleichungen

Im zeitunabhängigen Fall werden elektrische Felder nur von Ladungs-, magnetische Felder nur von Stromverteilungen erzeugt. Elektrizität und Magnetismus sind dann scheinbar getrennte Phänomene. Allerdings rufen zeitabhängige Magnetfelder elektrische Felder hervor und umgekehrt, sodass man von elektromagnetischen Feldern spricht. Diese werden durch die von Maxwell aufgestellten Gleichungen beschrieben, welche zunächst noch das Transformationsverhalten zwischen verschiedenen Inertialsystemen offen lassen. Dieser fehlende Zusammenhang wird letztlich durch die spezielle Relativitätstheorie geklärt.

5.1 Faraday'sches Induktionsgesetz

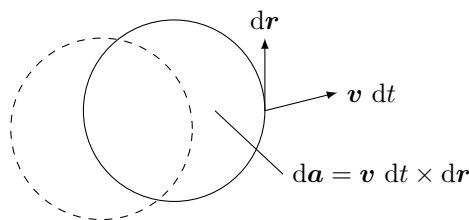
Eine zeitliche Änderung des magnetischen Flusses Φ durch eine Leiterschleife induziert in dieser eine Spannung. Die zeitliche Änderung kann dabei durch eine Änderung des \mathbf{B} -Feldes oder auch durch Bewegung der Schleife erfolgen.

Sei C die Kontur der Schleife und S eine davon umschlossene Fläche. Dann lautet dieser Befund

Faraday'sches Induktionsgesetz

$$U = -\frac{1}{c} \dot{\Phi} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (5.1)$$

Der von U induzierte Strom erzeugt dabei ein Magnetfeld, welches die verursachende Flussänderung hemmt (*Lenz'sche Regel*).



Angenommen, C wird durch eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} geändert. Die umschlossene Fläche ändert damit ihren Rand gemäß der Skizze. Daraus erhalten wir eine Flussänderung und eine Spannung von

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r}) = \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} - \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \\ \Rightarrow U &= -\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \frac{1}{c} \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Andererseits ergibt sich die Spannung aus der Summe der auf eine Einheitsladung wirkenden Kräfte:

$$U = \oint_C \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{r} \quad (5.3)$$

Der Vergleich der zweiten Terme in den Ausdrücken für U ergibt, dass die Konstante $-1/c$ im Induktionsgesetz konsistent mit der Lorentzkraft gewählt wurde. Der Vergleich der ersten Terme in den Ausdrücken für U ergibt

$$-\frac{1}{c} \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} \quad (5.4)$$

Da S beliebig ist, folgt daraus eine der Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

5.2 Maxwell'scher Verschiebungsstrom

Die grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik wurden 1864 von Maxwell vervollständigt. Die Konstruktion geht aus der Kontinuitätsgleichung (3.2) in Verbindung mit dem Gauß'schen Gesetz (4.2) hervor.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{j} \right) = 0 \quad (5.6)$$

Andererseits ist in der Magnetostatik

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

womit $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ folgt im Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung. Dies lässt sich beheben, wenn im Quellterm für das Magnetfeld zu \mathbf{j} der *Verschiebungsstrom* $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}$ addiert wird, sodass gilt

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (5.7)$$

In der Tat gilt dann

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}$$

sodass die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist.

Wir benutzen hier der Allgemeinheit halber die Felder \mathbf{D} (elektrische Flussdichte) und \mathbf{H} (magnetisches Feld), sodass, sofern wir von gemittelten Feldern sowie Ladungs- und Stromdichten ausgehen, die Gleichungen makroskopisch interpretiert werden können. Identifizieren wir dagegen $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ (elektrisches Feld) und $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ (magnetische Flussdichte) und fassen alle Felder, Ladungs- und Stromdichten als mikroskopisch auf, dann können die erhaltenen Gleichungen als fundamentale (mikroskopisch gültige) Gesetze (modulo Korrekturen durch Quanten- und Teilchenphysik) verstanden werden.

Die Integralform des verallgemeinerten Ampère'schen Gesetzes lautet:

$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} \iint_A \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \right) \cdot d\mathbf{a} \quad (5.8)$$

Wir fassen an dieser Stelle die Maxwell-Gleichungen noch einmal zusammen (im obigen Sinne sowohl makroskopisch als auch mikroskopisch gültig):

$$\text{Gauß'sches Gesetz} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (5.9)$$

$$\text{Gauß'sches Gesetz des Magnetismus} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.10)$$

$$\text{Ampère'sches Gesetz/Durchflutungsgesetz} \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (5.11)$$

$$\text{Faraday'sches Induktionsgesetz} \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (5.12)$$

5.3 Elektromagnetische Feldenergie

Wir verallgemeinern nun das Resultat für die Energie des elektrischen Feldes. Betrachten wir nun die an ein Punktteilchen übertragene Leistung:

$$\frac{d}{dt}W_{\text{mat}}^{(i)} = q_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}_i) = \iiint q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = \iiint \mathbf{j}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x$$

Insgesamt gilt für die Gesamtheit aller Punktteilchen:

$$\begin{aligned} W_{\text{mat}} &= \sum_{i=1}^n W_{\text{mat}}^{(i)}, & \mathbf{j} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{j}_i \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}W_{\text{mat}} &= \iiint \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x \end{aligned}$$

Ersetze im Integranden \mathbf{j} mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen und der Relation

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \varepsilon_{ijk} \partial_i E_j H_k = \varepsilon_{ijk} H_k \partial_i E_j + \varepsilon_{ijk} E_j \partial_i H_k = \varepsilon_{kij} H_k \partial_i E_j - \varepsilon_{jik} E_j \partial_i H_k \\ &= \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} &\stackrel{(5.11)}{=} \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{c}{4\pi} \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \\ &\stackrel{(5.12)}{=} -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \end{aligned}$$

Falls $\mathbf{B} \propto \mathbf{H}$ und $\mathbf{E} \propto \mathbf{D}$ ist, können wir noch schreiben

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{\text{mat}} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad w_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (5.14)$$

Dabei ist w_{mat} die Dichte der potentiellen Energie der Ladungsträger und w_{em} die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes. Wir definieren nun eine neue Größe:

Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5.15)$$

Mit dem Poynting-Vektor lässt sich die Energiebilanz folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d}{dt}W_{\text{mat}} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} w_{\text{mat}} d^3x = - \iiint_V \left(\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} w_{\text{em}} \right) d^3x = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w_{\text{em}} d^3x - \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} \quad (5.16)$$

Falls \mathbf{E} und \mathbf{H} hinreichend schnell für große $|\mathbf{x}|$ verschwinden, können wir V so groß wählen, dass der Randterm verschwindet. Dann gilt also

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (w_{\text{mat}} + w_{\text{em}}) d^3x = 0 \quad (5.17)$$

Aufgrund der Energieerhaltung ist die obige Identifikation von w_{em} mit der Energiedichte des Feldes also gerechtfertigt. Ist hingegen der Randterm nicht verschwindend, können wir \mathbf{S} als eine *Energiestromdichte* auffassen, welche durch die Fläche ∂V dringt.

Mit diesen Definitionen wird die lokale Form dieser Identität der Energieerhaltung bekannt als das

Poynting-Theorem

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{\text{em}} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (5.18)$$

Impulsbilanz

Wir stellen nun eine analoge Betrachtung für den Impuls an.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{p}_{\text{mat}} &= \sum_{i=1}^n q_i \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}_i) + \frac{\mathbf{v}_i}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \right) = \iiint_V \sum_{i=1}^n q_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{v}_i}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right) d^3x \\ &= \iiint_V \left(\rho(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right) d^3x \end{aligned}$$

Der Einfachheit und Übersicht halber beschränken wir uns bei der nun fälligen Manipulation des Integranden auf die mikroskopische Form der Feldgleichungen.

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &\stackrel{(5.12)}{=} \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right) \\ &\stackrel{(5.10)}{=} \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right) - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

Wir identifizieren nun den Impuls des elektromagnetischen Feldes mit

$$\mathbf{p}_{\text{em}} = \frac{1}{4\pi c} \iiint_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} d^3x \quad (5.19)$$

Dies ist natürlich noch mit einem Erhaltungssatz zu begründen. Dazu sollte die rechte Seite in folgender Gleichung auf ein Oberflächenintegral zurückzuführen sein:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_{\text{mat}} + \mathbf{p}_{\text{em}}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right) d^3x \quad (5.20)$$

Diese Gleichung ist vektorwertig, d.h. wir möchten den Integranden als Divergenz eines Tensors 2. Stufe T_{ij} schreiben, sodass gilt

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_{\text{mat}} + \mathbf{p}_{\text{em}}) = \mathbf{e}_i \iiint_V \partial_k T_{ki} d^3x$$

Dazu formen wir um:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= (B_j \partial_j B_i + \varepsilon_{ijk} B_j \varepsilon_{klm} \partial_l B_m) \mathbf{e}_i = (B_j \partial_j B_i + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) B_j \partial_l B_m) \mathbf{e}_i \\ &= (B_j \partial_j B_i + B_j \partial_i B_j - B_j \partial_j B_i) \mathbf{e}_i = B_j \partial_i B_j \mathbf{e}_i = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B}^2) \end{aligned}$$

Dies benutzen wir nun für die folgende Identität:

$$\mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B}^2) = \partial_k \left(B_k B_i - \frac{1}{2} \delta_{ki} \mathbf{B}^2 \right) \mathbf{e}_i$$

Auf dieselbe Weise behandeln wir die Terme von \mathbf{E} . Wir erhalten so den folgenden Tensor:

Maxwell'scher Spannungstensor

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \right] \quad (5.21)$$

Der Vektor $\mathbf{p}^{(S)} = \hat{\mathbf{n}}_i T_{ij} \mathbf{e}_j$ ist dann der Impulsfluss durch eine Einheitsfläche mit der Normalen $\hat{\mathbf{n}}$. Wird dieser Impuls komplett absorbiert, erhalten wir also den Strahlungsdruck auf diese Fläche.

5.4 Eichpotentiale

Die Einführung der Potentiale ϕ und \mathbf{A} hat den Vorteil, dass wir eine größere Zahl von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu einer kleineren Zahl an Gleichungen zweiter Ordnung zusammenfassen können. Darüber hinaus sind dann bestimmte Gleichungen automatisch erfüllt, d.h. im zeitunabhängigen Fall $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$.

Im zeitabhängigen Fall gilt immer noch $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, was wir mit $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ automatisch erfüllen. Eingesetzt ins Induktionsgesetz (5.12), erhalten wir

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

Den Ausdruck in Klammern können wir also als Gradienten schreiben:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\nabla \phi \quad (5.23)$$

Zusammengefasst, erhalten wir die physikalischen Felder über

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.25)$$

Einsetzen in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen ergibt (wir nehmen wieder die mikroskopische Form an):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho &\quad \longrightarrow \quad \Delta\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} &\quad \longrightarrow \quad \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$. Diese Gleichungen möchten wir nun entkoppeln. Dazu betrachten wir die Eichtransformation mit einem Skalarfeld Λ

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad (5.26)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda \quad (5.27)$$

Diese besitzen die Eigenschaft

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\Lambda) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \nabla \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Lambda - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\Lambda = \mathbf{E}$$

Die physikalischen Felder bleiben also unverändert. Da Λ ein Skalarfeld ist, haben wir die Eichfreiheit, eine zusätzliche skalare Eichung zu erfüllen (mit geeigneter Wahl der Potentiale). Die Entkopplung obiger Gleichungen geschieht in der

Lorenz-Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0 \quad (5.28)$$

Das heißt, wir wählen Λ so, dass gilt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi' = 0 &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \Delta\Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda \\ \Leftrightarrow \Delta\Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda &= -\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi \end{aligned}$$

und benennen schließlich wieder ϕ' , \mathbf{A}' in ϕ , \mathbf{A} um. Daraus ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -4\pi\rho, \quad \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

Wir können die Lorenz-Bedingung (5.28) erfüllen, indem wir allgemeine Potential ϕ , \mathbf{A} in geeigneter Weise in ϕ' , \mathbf{A}' transformieren. Wir bemerken auch, dass die Lorenz-Bedingung die Potentiale nicht eindeutig festlegt, da wir immer noch die Freiheit $\Lambda \rightarrow \Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}$ mit

$$\Delta \tilde{\Lambda} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\Lambda} = 0$$

haben.

Wir betrachten nun auch noch die *Coulomb-Eichung* $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ welche auch *transversale Eichung* genannt wird, im zeitabhängigen Fall. Es folgt, dass das skalare Potential die Poisson-Gleichung (2.12) erfüllt mit

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{y}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

d.h. die Lösungen für ϕ sind durch das instantane Coulomb-Potential von $\rho(\mathbf{x}, t)$ gegeben. Das Vektorpotential erfüllt

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial}{\partial t} \phi$$

Mit der Kontinuitätsgleichung (3.2) lässt sich der letzte Term allein durch \mathbf{j} ausdrücken:

$$\nabla \frac{\partial}{\partial t} \phi = -\nabla \iiint \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{y}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y$$

Den Strom können wir eindeutig in einen longitudinalen (rotationsfreien) und transversalen (divergenzfreien) Anteil zerlegen:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_L + \mathbf{j}_T, \quad \nabla \times \mathbf{j}_L = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{j}_T = 0$$

Nach dem Helmholtz'schen Satz gilt somit

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_L &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \iiint \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \\ \mathbf{j}_T &= -\frac{1}{4\pi} \nabla \times \iiint \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \times \mathbf{j}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y = -\frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \iiint \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir partiell integriert, die Oberflächenterme als verschwindend angenommen und $\partial_x f(x-y) = -\partial_y f(x-y)$ benutzt. Damit können wir die Gleichungen entkoppeln.

$$\nabla \frac{\partial}{\partial t} \phi = 4\pi \mathbf{j}_L, \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_T$$

Die Quelle des Vektorpotentials ist damit rein transversal.

5.5 Das retardierte Potential

Gesucht sind Lösungen der inhomogenen Wellengleichung

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -4\pi\rho \quad (5.29)$$

Die Gleichungen für das Vektorpotential haben die gleiche Struktur, sodass wir nur die skalare Gleichung im Detail diskutieren müssen. Zunächst lässt sich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung schreiben als

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint (a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-i\omega t} + a^*(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t}) d^3k \quad (5.30)$$

mit $\omega = c|\mathbf{k}|$ und $a(\mathbf{k})$ einer komplexwertigen Funktion (Beiträge mit $\omega = -c|\mathbf{k}|$) lassen sich in den komplex konjugierten Beitrag mit $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$ absorbieren). Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu gegebenem $\rho(\mathbf{x}, t)$ zu erhalten, suchen wir eine Green'sche Funktion $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)$ mit

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau) \quad (5.31)$$

sodass

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \iiint \int G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \rho(\mathbf{y}, \tau) d\tau d^3y \quad (5.32)$$

Die Bestimmungsgleichung für die Green'sche Funktion wird im Fourierraum algebraisch. Wir bemerken dazu, dass

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega d^3k \quad (5.33)$$

und schreiben

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} e^{-i\omega(t-\tau)} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) d\omega d^3k \quad (5.34)$$

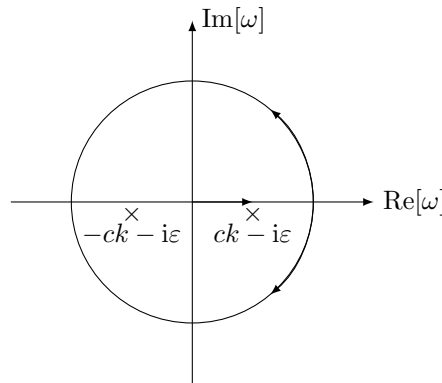
$$\Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint \int e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} e^{-i\omega(t-\tau)} \left[\left(-\mathbf{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) + 4\pi \right] d\omega d^3k = 0 \quad (5.35)$$

Die Fouriertransformation dieser Gleichung ergibt, dass der Term in eckigen Klammern verschwinden soll, also

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\mathbf{k}^2 - (\omega/c)^2}$$

Die Rücktransformation ist ohne Weiteres nicht wohldefiniert wegen der Singularität für $|\omega| = c|\mathbf{k}|$. Allerdings verlangen wir, dass physikalisch die Green'sche Funktion dem elektromagnetischen Feld, welches von einer Punktquelle am Ort \mathbf{y} , welche nur für eine kurze Zeit um t' vorhanden ist, ausgeht, entspricht. Wir verlangen also, dass $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = 0$ für $t > \tau$. Führen wir nun zuerst die ω -Integration durch.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} \frac{4\pi}{\mathbf{k}^2 - (\omega/c)^2} d\omega \quad (5.36)$$



Gemäß dem Cauchy'schen Integralsatzes ist dies gleich dem Integral über einen der skizzierten halbkreisförmigen Wege, sofern das Integral über den Kreisbogen verschwindet (der Radius entspricht dem Grenzfall $|\omega| \rightarrow \infty$).

Damit folgt:

Für $t > \tau$ ist die Kontur in der unteren Halbebene zu schließen.

Für $t < \tau$ ist die Kontur in der oberen Halbebene zu schließen.

Aus dem Integralsatz folgt auch, dass Integrale über geschlossene Kurven verschwinden, sofern der Integrand im Inneren holomorph ist (insbesondere keine Polstellen aufweist). Wir können die obige physikalische Bedingung also erfüllen, indem wir die beiden Polstellen infinitesimal in die untere Halbebene verschieben. Wir berechnen also

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} \frac{4\pi}{\mathbf{k}^2 - (\omega + i\varepsilon)^2/c^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{2e^{-i\omega(t-\tau)}}{(|\mathbf{k}| - (\omega + i\varepsilon)/c)(|\mathbf{k}| + (\omega + i\varepsilon)/c)}}_{=f(\omega)} d\omega \quad (5.37)$$

$$\text{Res}_{c|\mathbf{k}| - i\varepsilon} f(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow c|\mathbf{k}| - i\varepsilon} (\omega - c|\mathbf{k}| + i\varepsilon) f(\omega) = -\frac{c}{|\mathbf{k}|} e^{-ic|\mathbf{k}|(t-\tau)}$$

$$\text{Res}_{-c|\mathbf{k}| - i\varepsilon} f(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow -c|\mathbf{k}| - i\varepsilon} (\omega + c|\mathbf{k}| - i\varepsilon) f(\omega) = \frac{c}{|\mathbf{k}|} e^{ic|\mathbf{k}|(t-\tau)}$$

Für $\tau > t$ verschwindet das Integral, wohingegen für $t > \tau$ gilt (das Minuszeichen rührt von der Integrationsrichtung (im Uhrzeigersinn)):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\pi e^{-i\omega(t-\tau)}}{\mathbf{k}^2 - (\omega + i\varepsilon)^2/c^2} d\omega = -\frac{2\pi ic}{|\mathbf{k}|} \left(e^{ic|\mathbf{k}|(t-\tau)} - e^{-ic|\mathbf{k}|(t-\tau)} \right) = \frac{4\pi c}{|\mathbf{k}|} \sin(c|\mathbf{k}|(t-\tau))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \frac{4\pi c}{|\mathbf{k}|} \sin(c|\mathbf{k}|(t-\tau)) d^3k \\ &= \frac{c}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\infty} e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cos \theta} \sin(ck(t-\tau)) k dk d\cos \theta d\varphi \\ &= \frac{c}{\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_0^{\infty} \frac{1}{i} \left(e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - e^{-ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \sin(ck(t-\tau)) dk \\ &= \frac{2c}{\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_0^{\infty} \sin(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \sin(ck(t-\tau)) dk \end{aligned}$$

Der Integrand ist gerade in k . Daher können wir schreiben

$$\begin{aligned} &= \frac{c}{\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{4} \right) \left(e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - e^{-ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \left(e^{ick(t-\tau)} - e^{-ick(t-\tau)} \right) dk \\ &= \frac{c}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ick(t-\tau) - ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + e^{-ick(t-\tau) + ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - e^{ick(t-\tau) + ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - e^{-ick(t-\tau) - ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) dk \\ &= \frac{c}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} 2\pi \left(2\delta(c(t-\tau) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \underbrace{2\delta(c(t-\tau) + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}_{\equiv 0 \text{ da } t > \tau} \right) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta \left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c} \right) \end{aligned}$$

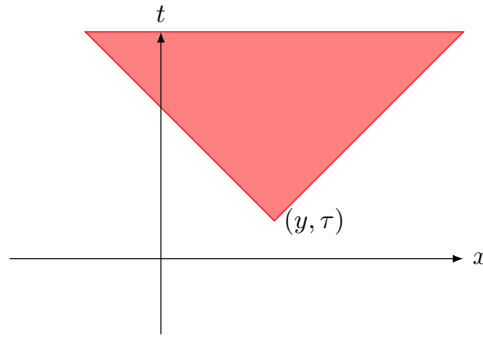
Insgesamt lautet also die

Retardierte Green'sche Funktion

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta \left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c} \right) \quad (5.38)$$

Eine ab der Zeit τ am Ort \mathbf{y} vorhandene Quelle kann also zu elektromagnetischen Feldern im Zukunftslichtkegel führen. Die übrigen Bereiche der Raumzeit sind für diese spezielle Lösung feldfrei. Dass die Quelle nur an Beobachter innerhalb des Zukunftslichtkegels Signale senden kann, bezeichnet man als *Kausalität*.

Wir merken noch an, dass auch die avancierte Green'sche Funktion (5.38), deren Fouriertransformierte Pole in der oberen Halbebene hat, zu Lösungen der Maxwell-Gleichungen führt. Schalten wir die Quelle zum Zeitpunkt τ aus, so werden in der speziellen Lösung sämtliche aus dem Vergangenheitslichtkegel von $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ einfallenden Wellen absorbiert. Diese Randbedingungen sind in der klassischen Physik allerdings nicht von praktischer Relevanz (explizit wird dies vor allem in der Quantenfeldtheorie), ist allerdings auch die avancierte Green'sche Funktion von wesentlicher Bedeutung.



5.6 Strahlung zeitlich veränderlicher Ladungs- und Stromdichten

Betrachte

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \quad (5.39)$$

Wir können diese als Fourierkomponenten allgemeiner Verteilungen auffassen. Die tatsächlichen Verteilungen sind selbstverständlich reell. In Lorenz-Eichung erhalten wir dann für retardierte Randbedingungen mit $\omega = ck$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \iiint \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y}, \tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}\right) d\tau d^3y = \frac{e^{-i\omega t}}{c} \iiint \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y$$

Daraus erhalten wir $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ sowie

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B} = ik\mathbf{B} = ik\nabla \times \mathbf{A}$$

Im quellfreien Gebiet ist dann

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} = k^2 \mathbf{E} = ik\nabla \times \mathbf{B} \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

Die Wellenlänge der Strahlung ist $\lambda = 2\pi c/\omega$, die Größe der Quelle sei $\sim d$ und es gelte $\lambda \gg d$ (typischer Fall, wenn die Ladungen sich nicht selbst nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegen). Wir betrachten dann Näherungen für folgende charakteristische Abstände:

Nahzone (statische Zone):	$d \ll x \ll \lambda$
Mittlere Zone (Induktionszone):	$d \ll x \sim \lambda$
Fernzone (Strahlungszone):	$d \ll \lambda \ll x$

Nahzone

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \iiint \frac{e^{i|\mathbf{x} - \mathbf{y}|/\omega/c}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y \stackrel{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ll \lambda}{\approx} \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y \quad (5.40)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{x^{l+1}} \iiint Y_{lm}^*(\theta', \varphi') y^l \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y \quad (5.41)$$

Das Feld folgt hier also quasistatisch der Ladungsverteilung.

Fernzone

Es gilt $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \approx |\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}$. Zur führenden Ordnung in d/x :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikx}}{cx} \iiint e^{-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y = \frac{e^{ikx}}{cx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \iiint (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y})^n \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y \quad (5.42)$$

Die Reihe konvergiert schnell aufgrund der Annahme $d \sim y \ll \lambda = 2\pi/k$.

Dipolstrahlung

Wir benutzen die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 = -i\omega\rho + \nabla \cdot \mathbf{j} \quad (5.43)$$

und formen zunächst um (\mathbf{p} sei das elektrische Dipolmoment)

$$\iiint \mathbf{j}(\mathbf{x}) \, d^3x = - \iiint \mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x})) \, d^3x = -i\omega \iiint \mathbf{x}\rho(\mathbf{x}) \, d^3x = -i\omega\mathbf{p} \quad (5.44)$$

Der führende Term in der Entwicklung (5.42) ist dann

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikx}}{cx} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{y}) \, d^3y = -ik\mathbf{p} \frac{e^{ikx}}{x} \quad (5.45)$$

Wir erhalten dann die elektrischen Dipolfelder, wobei wir folgende Identitäten benutzen:

$$\nabla x = \frac{\mathbf{x}}{x} \quad (5.46)$$

$$(\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{x} = p_j \partial_j x_i \mathbf{e}_i = p_j \delta_{ij} \mathbf{e}_i = \mathbf{p} \quad (5.47)$$

$$-(\mathbf{x} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{x} = \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = \mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}x^2 \quad (5.48)$$

$$\nabla \times (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = \mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{p}) + (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{x} - \mathbf{p}(\nabla \cdot \mathbf{x}) \stackrel{(5.46)}{=} \mathbf{p} - 3\mathbf{p} = -2\mathbf{p} \quad (5.49)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \stackrel{(5.46)}{=} ik\mathbf{p} \times \left(-\mathbf{x} \frac{e^{ikx}}{x^3} + ik\mathbf{x} \frac{e^{ikx}}{x^2} \right) = ik\mathbf{x} \times \mathbf{p} \frac{e^{ikx}}{x^3} + k^2\mathbf{x} \times \mathbf{p} \frac{e^{ikx}}{x^2} = k^2(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikx}}{x} \left(1 - \frac{1}{ikx} \right) \\ \mathbf{E} &= \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla \times (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikx}}{x^3} + ik \nabla \times (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikx}}{x^2} \\ &= \left(ik \frac{e^{ikx}}{x^2} - \frac{e^{ikx}}{x^3} \right) \nabla \times (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) - (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) \times \nabla \left(ik \frac{e^{ikx}}{x^2} - \frac{e^{ikx}}{x^3} \right) \\ &\stackrel{(5.49)}{=} 2\mathbf{p} \left(\frac{e^{ikx}}{x^3} - ik \frac{e^{ikx}}{x^2} \right) - (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) \times \left(-2ik \frac{\mathbf{x}}{x^4} - k^2 \frac{\mathbf{x}}{x} + 3 \frac{\mathbf{x}}{x^5} - ik \frac{\mathbf{x}}{x^4} \right) e^{ikx} \\ &\stackrel{(5.48)}{=} 2\mathbf{p} \left(\frac{e^{ikx}}{x^3} - ik \frac{e^{ikx}}{x^2} \right) + k^2(\mathbf{x} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{x} \frac{e^{ikx}}{x^3} + \mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) \left(\frac{3}{x^5} - \frac{3ik}{x^4} \right) e^{ikx} - 3\mathbf{p}x^2 \left(\frac{1}{x^5} - \frac{ik}{x^4} \right) e^{ikx} \\ &= k^2(\mathbf{x} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{x} \frac{e^{ikx}}{x^3} + [3\mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}x^2] \left(\frac{1}{x^5} - \frac{ik}{x^4} \right) e^{ikx} \end{aligned}$$

In der Fernzone ist außerdem $kx \gg 1$, sodass wir nähern können

$$\mathbf{B} = k^2 \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p} \frac{e^{ikx}}{x}, \quad \mathbf{E} = k^2(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{x}} \frac{e^{ikx}}{x} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{x}} \quad (5.50)$$

Im umgekehrten Fall der Nahzone sind die führenden Beiträge

$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}x^2}{x^5} e^{ikx}, \quad \mathbf{B} = ik \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{p}}{x^3} e^{ikx} \quad (5.51)$$

d.h. wir finden insbesondere den quasistatischen elektrischen Dipol wieder. Im statischen Grenzfall $k \rightarrow 0$ verschwindet auch das Magnetfeld.

Wir betrachten nun die abgestrahlte Leistung in der Fernzone. Die durch ein Kugelfächenelement abgestrahlte Leistung beträgt

$$dP = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{x}} x^2 \underbrace{\sin\theta \, d\theta \, d\varphi}_{d\Omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} x^2 \hat{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (5.52)$$

Dabei sind die Realteile der Felder zu nehmen. Wir müssen dann noch zeitlich über $\sin^2(\omega t)$ mitteln, was einen zusätzlichen Faktor 1/2 ergibt. Mit obigen Resultaten erhalten wir so

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{c}{8\pi} x^2 \hat{\mathbf{x}} \cdot ((\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{B}) = \frac{c}{8\pi} x^2 \hat{\mathbf{x}} \cdot (\hat{\mathbf{x}}\mathbf{B}^2 - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B})) = \frac{c}{8\pi} k^4 \hat{\mathbf{x}} \cdot (\hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p})^2 - (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \underbrace{(\hat{\mathbf{x}} \cdot (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}))}_{=0}) \\ &= \frac{c}{8\pi} k^4 (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p})^2 \end{aligned}$$

Für $\mathbf{p} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ gilt somit

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 \mathbf{p}^2 \sin^2 \theta \quad (5.53)$$

Wir erhalten daraus die Gesamtleistung

$$P = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{dP}{d\Omega} d\cos\theta = \frac{c}{4} k^4 \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) \mathbf{p}^2 d\xi = \frac{c}{3} k^4 \mathbf{p}^2 \quad (5.54)$$

Man bemerke hier das charakteristische Verhalten $\propto \omega^4$ und auch, dass in der Fernzone die Feldstärken $\sim 1/x$ und die Energieflussdichte $\sim 1/x^2$ abnehmen. In der Richtung des Dipols bleibt der Raum feldfrei.

Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung

Wir betrachten nochmals $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \approx |\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}$ und

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikx}}{cx} \iiint \left(1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x^2}\right) e^{ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y = \frac{e^{ikx}}{cx} \iiint \left(\mathbf{j}(\mathbf{y}) + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x^2} \mathbf{j}(\mathbf{y}) - ik \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x} \mathbf{j}(\mathbf{y}) + \dots\right) d^3y$$

wobei wir den Nennerterm eine Ordnung weiter entwickelt haben. Im Folgenden betrachten wir die nachführenden (jenseits des elektrischen Dipols) Beiträge zum Vektorpotential

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{e^{ikx}}{cx} \left(\frac{1}{x} - ik\right) \iiint (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) d^3y \\ &= \frac{e^{ikx}}{2cx} \left(\frac{1}{x} - ik\right) \iiint \left\{ \underbrace{[(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{j}(\mathbf{y}) + (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{y})) \mathbf{y}]}_{(1)} + \underbrace{(\mathbf{y} \times \mathbf{j}) \times \hat{\mathbf{x}}}_{(2)} \right\} d^3y \end{aligned}$$

Dabei ist (1) symmetrisch in $\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{j}$ und (2) antisymmetrisch. (2) enthält zudem die von der Stromverteilung erzeugte Magnetisierung (magnetische Dipolmomentdichte)

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2c} \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (5.55)$$

(1) werden wir mit dem elektrischen Quadrupoltensor in Beziehung bringen. Die magnetischen Dipole ergeben

$$\mathbf{A}^{(B1)}(\mathbf{x}) = -\frac{e^{ikx}}{x} \left(\frac{1}{x} - ik\right) \hat{\mathbf{x}} \times \underbrace{\iiint \mathbf{M}(\mathbf{y}) d^3y}_{=\mathbf{m}} = ik\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{m} \frac{e^{ikx}}{x} \left(1 - \frac{1}{ikx}\right) \quad (5.56)$$

Dies hat die gleiche Form wie das vom Dipol erzeugte Magnetfeld (5.50), dessen Rotation nach dem Induktionsgesetz das elektrische Dipolfeld erzeugt. Analog zu obiger Rechnung folgt also

$$\mathbf{B}^{(B1)} = \nabla \times \mathbf{A}^{(B1)} = k^2 (\mathbf{x} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{x} \frac{e^{ikx}}{x^3} + [3\mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}\mathbf{x}^2] \left(\frac{1}{x^5} - \frac{ik}{x^4}\right) e^{ikx} \quad (5.57)$$

Das zur magnetischen Dipolquelle gehörige elektrische Feld ergibt sich dann aus dem magnetischen Feld für die elektrische Dipolquelle mit $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$ und einem negativen Vorzeichen:

$$\mathbf{E}^{(B1)} = -k^2 (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{m}) \frac{e^{ikx}}{x} \left(1 - \frac{1}{ikx}\right) \quad (5.58)$$

Wir kommen nun zu den elektrischen Quadrupoltermen (E2). Dazu betrachten wir zunächst folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} \iiint \mathbf{y} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) (\nabla \cdot \mathbf{j}) d^3y &= e_i \iiint y_i \hat{x}_j y_j \partial_k j_k d^3y = -e_i \iiint (\delta_{ik} \hat{x}_j y_j j_k + \delta_{jk} y_i \hat{x}_j j_k) d^3y \\ &= -\iiint (\mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) + \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{j})) d^3y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2c} \iiint [(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{j} + (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{y}] d^3y = -\frac{1}{2c} \iiint \mathbf{y} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{j})}_{=i\omega\rho} d^3y \stackrel{(5.43)}{=} -\frac{ik}{2} \iiint \mathbf{y} (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \rho d^3y$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{(E2)}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikx}}{x} \left(\frac{1}{x} - ik \right) \left(-\frac{ik}{2} \right) \iiint \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \rho \, d^3y = -\frac{k^2 e^{ikx}}{2x} \left(1 - \frac{1}{ikx} \right) \iiint \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \rho \, d^3y \quad (5.59)$$

Wir geben die Felder in der Fernzone an – dabei ergeben sich die führenden Terme aus den Ableitungen der Exponentialfunktion:

$$\nabla e^{ikx} = ik\hat{\mathbf{x}}e^{ikx}$$

Daraus ergeben sich die Felder

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= ik\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= \frac{i}{k}(ik)^2 \hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}) = ik(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A}) \times \hat{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Also können wir nach Gl. (5.59) schreiben

$$\mathbf{B}^{(E2)} = -\frac{ik^3 e^{ikx}}{2x} \iiint (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{y})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \, d^3y \quad (5.60)$$

Wir erinnern uns an den Quadrupoltensor

$$Q_{ij} = \iiint (3x_i x_j - \mathbf{x}^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}) \, d^3x$$

und definieren

$$\mathbf{Q}(\hat{\mathbf{x}}) = e_i Q_{ij} \hat{\mathbf{x}}_j \quad (5.61)$$

Damit ist nämlich folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{3} \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{x}}_j Q_{kl} \hat{\mathbf{x}}_l e_i = \frac{1}{3} e_i \iiint \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{x}}_j (3y_k y_l - \mathbf{y}^2 \delta_{kl}) \hat{\mathbf{x}}_l \rho(\mathbf{y}) \, d^3y \\ &= \frac{1}{3} \iiint (3(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{y})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) - \underbrace{(\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}}) \mathbf{y}^2}_{=0}) \rho(\mathbf{y}) \, d^3y = \iiint (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{y})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) \, d^3y \end{aligned}$$

Also können wir nach Gl. (5.60) schreiben

$$\mathbf{B}^{(E2)} = -\frac{ik^3 e^{ikx}}{6x} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (5.62)$$

Für den Poynting-Vektor benutzen wir folgende Nebenrechnungen:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \times \mathbf{V}]^2 &= \varepsilon_{ijk} a_j V_k \varepsilon_{ilm} a_l V_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j V_k a_l V_m = \mathbf{a}^2 \mathbf{V}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{V})^2 \\ [\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{V}]^2 &= \mathbf{V}^2 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V})^2 \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{V}) \times \mathbf{a} &= \mathbf{V} \mathbf{a}^2 - \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{V}) \quad \Rightarrow \quad (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{V}) \times \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V} - \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V}) \\ \Rightarrow \quad [(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{V}) \times \hat{\mathbf{x}}]^2 &= \mathbf{V}^2 - 2(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V})(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V}) + (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V})^2 = [\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{V}]^2 \end{aligned}$$

Die vom \mathbf{E} -Feld transportierte Leistung ist gleich der vom \mathbf{B} -Feld. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{c}{4\pi} ((\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{B}) = \frac{c}{4\pi} (\hat{\mathbf{x}} \mathbf{B}^2 - \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B})) \\ \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{B}^2 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B})^2) = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{x}})^2 \end{aligned}$$

Dies ist wieder zeitlich zu mitteln, wobei der Realteil von \mathbf{B} zu nehmen ist.

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \frac{k^6}{36x^2} ((\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{x}})) \times \hat{\mathbf{x}})^2 = \frac{ck^6}{288\pi x^2} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{x}}))^2$$

Daraus erhalten wir die differentielle Leistung:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{x}} x^2 = \frac{ck^6}{288\pi} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{x}}))^2 \quad (5.63)$$

$$(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{Q}(\hat{\mathbf{x}}))^2 = \mathbf{Q}^2 - (\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{Q})^2 = Q_{ij} \hat{\mathbf{x}}_j Q_{ik} \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_i Q_{ij} \hat{\mathbf{x}}_j \hat{\mathbf{x}}_k Q_{kl} \hat{\mathbf{x}}_l$$

Um das Winkelintegral auszuwerten, bemerken wir:

$$\begin{aligned} \oint d\Omega &= 4\pi \\ \oint \hat{x}_i \hat{x}_j d\Omega &= \alpha \delta_{ij} \xrightarrow{\sum_{i,j}} 4\pi = 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3} \\ &\Rightarrow \oint \hat{x}_i \hat{x}_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \\ \oint \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \hat{x}_l d\Omega &= \alpha (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ \xrightarrow{\sum_{i,j,k,l}} \oint \left(\underbrace{(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2)}_{=1} + 4 \sum_{i,j} (1 - \delta_{ij} \hat{x}_i^2 \hat{x}_j^2) \right) d\Omega &= 27\alpha \end{aligned}$$

Betrachte o.B.d.A. $i = 1, j = 2$:

$$\begin{aligned} \oint \hat{x}_1^2 \hat{x}_2^2 d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sin^4 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d \cos \theta d\varphi = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^2 d\xi = \frac{\pi}{4} \frac{16}{15} = \frac{4\pi}{15} \\ \rightarrow 4\pi + 4 \left(\frac{3}{2} \right) \frac{4\pi}{15} &= 4\pi + \frac{16}{5} \pi = \frac{36\pi}{5} = 27\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{15} \end{aligned}$$

Also erhalten wir als Zwischenergebnis

$$\oint \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \hat{x}_l d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.64)$$

$$\oint (\hat{x} \times \mathbf{Q}(\hat{x}))^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3} Q_{ij} Q_{ij} - \frac{4\pi}{15} (Q_{ii} Q_{kk} + Q_{ij} Q_{ij} + Q_{ij} Q_{ji}) = \frac{4\pi}{5} Q_{ij} Q_{ij} \quad (5.65)$$

Das letzte Gleichheitszeichen rührt von der Tatsache, dass der Quadrupoltenor Q symmetrisch und spurfrei ist. Damit ist die Gesamtleistung gegeben durch

$$P = \frac{ck^6}{288\pi} \frac{4\pi}{5} Q_{ij} Q_{ij} = \frac{ck^6}{360} Q_{ij} Q_{ij} \quad (5.66)$$

Die Leistung ist also proportional zu ω^6 , während sie beim Dipol proportional zu ω^4 ist.

Als Beispiel geben wir ein um die z -Achse symmetrisches, oszillierendes Rotationsellipsoid mit konstanter Ladungsverteilung an. Dann hat der Quadrupoltenor die Gestalt

$$Q_{33} = Q_0, \quad Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_0, \quad Q_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

Damit ist die differentielle Leistung gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{ck^6}{288\pi} (Q_{ij} \hat{x}_j Q_{ik} \hat{x}_k - \hat{x}_i Q_{ij} \hat{x}_j \hat{x}_k Q_{kl} \hat{x}_l) = \frac{ck^6}{288\pi} Q_0^2 \left(\hat{x}_3 \hat{x}_3 + \frac{1}{4} \hat{x}_1 \hat{x}_1 + \frac{1}{4} \hat{x}_2 \hat{x}_2 - \hat{x}_3 \hat{x}_3 \hat{x}_3 \hat{x}_3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \hat{x}_1 \hat{x}_1 \hat{x}_1 \hat{x}_1 - \frac{1}{4} \hat{x}_2 \hat{x}_2 \hat{x}_2 \hat{x}_2 + \hat{x}_3 \hat{x}_3 (\hat{x}_1 \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \hat{x}_2) - \frac{1}{2} \hat{x}_1 \hat{x}_1 \hat{x}_1 \hat{x}_1 \right) \\ &= \frac{ck^6}{288\pi} Q_0^2 \frac{9}{4} \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{ck^6}{128\pi} Q_0^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Durch Integration erhalten wir dann die Gesamtleistung:

$$P = \frac{ck^6}{360} Q_0^2 \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{ck^6}{240} Q_0^2 \quad (5.67)$$

In der Quantenmechanik zeigt sich, dass Übergänge zwischen bestimmten Energieniveaus jeweils Multipolstrahlung eines bestimmten Typs emittieren. Dabei haben Übergänge zu niedrigen Multipolen eine geringere Lebensdauer als für hohe Multipole. So entspricht die berühmte HI-(21 cm)-Linie von Wasserstoff mit einer Zerfallsrate von $2,9 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$ einem magnetischen Dipolübergang (B1).

Kapitel 6

Elektromagnetische Wellen

6.1 Ebene Wellen

Zuerst betrachten wir nochmal die Maxwell-Gleichungen ohne Feldquellen in Medien.

Maxwell-Gleichungen

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.2)$$

Zur Herleitung der Wellengleichung kann wie folgt vorgegangen werden.

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \nabla \times \dot{\mathbf{B}} - \Delta \mathbf{E} = \frac{\mu \varepsilon}{c} \nabla \times \dot{\mathbf{E}} \\ \nabla \times \dot{\mathbf{B}} &= \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Daraus folgen die Wellengleichungen.

Wellengleichungen

$$\left(\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \left(\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

Eine Welle heißt *eben*, wenn sie nur in einer Richtung vom Ort abhängt. Ist diese Richtung o.B.d.A. z , dann ist wegen

$$\left(\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f \left(z \pm \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}} t \right) = 0 \quad (6.4)$$

eine beliebige Lösung komponentenweise von der Form von f (muss aber noch das Gauß'sche Gesetz erfüllen). Die Phasengeschwindigkeit beträgt

Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c}{n} \quad \text{mit} \quad n = \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (6.5)$$

Wir betrachten nun Lösungen in der Form von Fourierkomponenten

Lösungen der Wellengleichung in Fourierdarstellung

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{c}{n} |\mathbf{k}| \quad (6.6)$$

Mit $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ und $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ und daraus ergibt sich, dass \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung orientiert sind. Man sagt, elektromagnetische Wellen sind *transversal*.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega \frac{1}{c} \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \implies i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\omega \frac{\mu \varepsilon}{c} \mathbf{E} \end{aligned}$$

Hieraus folgt wiederum, dass \mathbf{E} - und \mathbf{B} - Feld auch senkrecht aufeinander stehen.

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{B}|^2 &= \frac{c^2}{\omega^2} (\mathbf{k} \times \mathbf{E})(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \frac{c^2}{\omega^2} \varepsilon_{ijk} k_j E_k \varepsilon_{ilm} k_l E_m = \frac{c^2}{\omega^2} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) k_j E_k k_l E_m = \\ &= \frac{c^2}{\omega^2} (\mathbf{k}^2 \mathbf{E}^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})^2) = \frac{c^2 \mathbf{k}^2}{\omega^2} |\mathbf{E}|^2 = n^2 |\mathbf{E}|^2 \\ |\mathbf{E}| &= \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} |\mathbf{B}| \end{aligned} \quad (6.8)$$

Wir haben noch die Freiheit, eine beliebige Polarisation in der Ebene $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 0$ zu wählen. Ein komplexer Vektor in einer Ebene ($\perp \mathbf{k}$) hat vier Freiheitsgrade, so dass wir ansetzen:

$$e^{i\alpha} \mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2 \quad (\text{mit } \mathbf{a}_{1,2} \cdot \mathbf{k} = 0)$$

Dabei sind $\mathbf{a}_{1,2}$ reell und α eine beliebige Phase, welche wir in zweckmäßiger Weise wählen können.

$$\mathbf{E}^2 = |\mathbf{E}|^2 e^{i\gamma} = e^{-2i\alpha} (\mathbf{a}_1^2 - \mathbf{a}_2^2 + 2i\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)$$

wähle $\alpha = -\frac{\gamma}{2} \implies (\mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2)^2 \in \mathbb{R} \implies \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$

Definiere kartesisches Koordinatensystem mit

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}, \quad \mathbf{e}_2 = \mp \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$$

Das Vorzeichen soll dabei so gewählt werden, dass das Koordinatensystem rechtshändig ist.

Ist einer der $\mathbf{a}_{1,2} = 0$, so ist der Basisvektor senkrecht zu den beiden anderen zu wählen.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re}[(a_1 \mathbf{e}_1 \mp i a_2 \mathbf{e}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t - \alpha)}] = a_1 \mathbf{e}_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t - \alpha) \pm a_2 \mathbf{e}_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t - \alpha) =: E_1(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_1 + E_2(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_2$$

$$\implies \frac{E_1^2}{a_1^2} + \frac{E_2^2}{a_2^2} = 1 \longrightarrow \text{Ellipsengleichung}$$

$$\tan \beta(t) = \frac{E_2}{E_1} = \mp \frac{a_2}{a_1} \tan(\omega t + \delta)$$

mit $\delta = \alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$. Die Periodendauer für einen Umlauf der Ellipse beträgt $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Wir merken noch an, dass man sagt, die ebene Welle sei im allgemeinen Fall elliptisch polarisiert. Die wichtigen Spezialfälle mit einer verschwindenden Halbachse sowie zwei gleich langen Halbachsen sind:

$$e^{i\alpha} \mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2 = \begin{cases} a \mathbf{e}_{1,2} & \text{lineare Polarisation} \\ a(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2) & \text{zirkulare Polarisation} \end{cases} \quad (6.9)$$

In der Quantenmechanik zeigt sich, dass die zirkulare Polarisation den Spineigenzuständen der Lichtteilchen entspricht.

Zur Berechnung der Energie- und Impulsdichte ebener Wellen betrachten wir.

$$a(t) = \text{Re}[a_0 e^{i\omega t}], \quad b(t) = \text{Re}[b_0 e^{i\omega t}] \implies a(t)b(t) = \frac{1}{4} (a_0 e^{-i\omega t} + a_0^* e^{i\omega t})(b_0 e^{-i\omega t} + b_0^* e^{i\omega t}) \quad (6.10)$$

Bei zeitlicher Mittelung fallen die oszillatorischen Beiträge weg:

$$\langle a(t)b(t) \rangle = \frac{1}{4} (a_0 b_0^* + a_0^* b_0) \frac{1}{2} \text{Re}[a_0 b_0^*] \quad (6.11)$$

Zeitgemittelte Energiedichte

$$\langle \omega_{em} \rangle = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\mu} \left\langle \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right\rangle = \frac{1}{16\pi} \left(\varepsilon \text{Re}[E_0 E_0^*] + \frac{1}{\mu} \text{Re}[B_0 B_0^*] \right) \quad (6.12)$$

$$= \frac{1}{16\pi} \left(\varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}|^2 \right) \stackrel{(6.8)}{=} \frac{\varepsilon}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{8\pi\mu} |\mathbf{B}|^2 \quad (6.13)$$

Zeitgemittelte Energiestromdichte

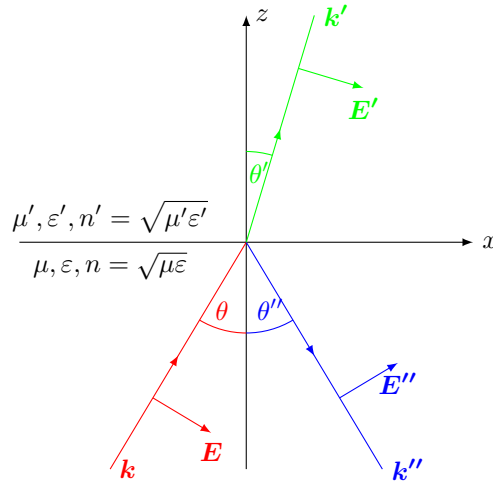
$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\mu} \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{\mu} \text{Re}[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0^*] = \frac{c}{8\pi\mu} |\mathbf{E}|^2 \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{\mathbf{k}} = \frac{\varepsilon}{8\pi} |\mathbf{E}|^2 \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \hat{\mathbf{k}} = \langle \omega_{em} \rangle \frac{c}{n} \hat{\mathbf{k}} \quad (6.14)$$

Die Energiedichte wird also mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{n}$ entlang des Wellenvektors transportiert.

6.2 Reflexion und Brechung

Im allgemeinen ist n eine Funktion der Frequenz. Darüber hinaus lässt sich die Dämpfung der Wellen im Material mittels eines Imaginärteils beschreiben. Hier gehen wir nur auf die einfachsten Brechungs- und Reflexionsphänomene ein.

Wir betrachten dazu folgende Grenzflächen in der $z = 0$ Ebene:



Es gelten wieder die Zusammenhänge

$$k = |\mathbf{k}| = \frac{n\omega}{c}, \quad k' = |\mathbf{k}'| = \frac{n'\omega'}{c} \quad (6.15)$$

$$k'' = |\mathbf{k}''| = \frac{n\omega''}{c} \quad n = \sqrt{\mu\epsilon}, n' = \sqrt{\mu'\epsilon'} \quad (6.16)$$

Einfallende Welle:

$$\mathbf{E} = \text{Re}[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}], \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (6.17)$$

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad \mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (6.18)$$

Gebrochene Welle:

$$\mathbf{E}' = \text{Re}[\mathbf{E}'_0 e^{i(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x} - \omega' t)}], \quad \mathbf{D}' = \epsilon \mathbf{E}' \quad (6.19)$$

$$\mathbf{B}' = \frac{c}{\omega'} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}' \quad \mathbf{H}' = \frac{c}{\mu\omega'} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}' \quad (6.20)$$

Ausfallende Welle:

$$\mathbf{E}'' = \text{Re}[\mathbf{E}''_0 e^{i(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x} - \omega'' t)}], \quad \mathbf{D}'' = \epsilon \mathbf{E}'' \quad (6.21)$$

$$\mathbf{B}'' = \frac{c}{\omega''} \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}'' \quad \mathbf{H}'' = \frac{c}{\mu\omega''} \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}'' \quad (6.22)$$

Randbedingungen:

Die Tangentialkomponenten von \mathbf{E} und \mathbf{H} und die Normalkomponenten von \mathbf{D} und \mathbf{B} sind stetig an der Grenzfläche $z = 0$. Damit dies für alle Zeiten t gilt, müssen $\omega = \omega' = \omega''$ sein. $\implies k = k''$

Außerdem müssen die Anschlussbedingungen an jedem Ort der Ebene erfüllt sein.

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}|_{z=0} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}|_{z=0} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x}|_{z=0} \quad (6.23)$$

Propagieren die Wellen o.B.d.A. in der $x - z$ -Ebene, dann gilt also:

Einfallswinkel- und Ausfallswinkel

$$k_x = k'_x = k''_x \Leftrightarrow k \sin \theta = k' \sin \theta' = k \sin \theta'' \implies \theta = \theta'' \quad (\text{Ausfallswinkel} = \text{Einfallswinkel}) \quad (6.24)$$

Brechungsgesetz

$$n \sin \theta = n' \sin \theta' \Leftrightarrow \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = \frac{n}{n'} \quad (6.25)$$

Wir betrachten noch näher die Komponenten polarisierter Wellen. Die Stetigkeitsbedingungen lauten:

$$(\varepsilon(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'') - \varepsilon' \mathbf{E}_0') \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.26)$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'' - \mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0') \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (6.27)$$

$$(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_0'' - \mathbf{E}_0') \times \mathbf{n} = 0 \quad (6.28)$$

$$\left(\frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}_0'') - \frac{1}{\mu'} (\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0') \right) \times \mathbf{n} = 0 \quad (6.29)$$

Der allgemeine Fall ergibt sich, wenn wir die Polarisierungen parallel (\mathbf{E} -Feld senkrecht zur Ebene der Zeichnung, y -Richtung) separat betrachten, als Linearkombinationen.

Senkrechte Polarisation:

$$(1.27) \Rightarrow E_0 + E_0'' - E_0' = 0 \Leftrightarrow \frac{E_0''}{E_0} - \frac{E_0'}{E_0} = 1$$

Außerdem bilden wir das Kreuzprodukt aus \mathbf{e}_z und () und benutzen, dass :

$$\mathbf{e}_z \times (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_y) = \mathbf{k}(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y) - \mathbf{e}_y(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z) = -\mathbf{k}_z \mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} E_0 k_z + \frac{1}{\mu} E_0'' k_z'' - \frac{1}{\mu'} E_0' k_z' = 0 \quad \left(k' = k \frac{n'}{n} = k \sqrt{\frac{\mu' \varepsilon'}{\mu \varepsilon}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} (E_0 - E_0'') k \cos \theta = \frac{1}{\mu'} E_0' k' \cos \theta' = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu \mu' \varepsilon}} E_0' \cos \theta'$$

$$\Rightarrow (E_0 - E_0'') \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}} E_0' \cos \theta' \Leftrightarrow \frac{E_0''}{E_0} \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos \theta' + \frac{E_0''}{E_0} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{E_0''}{E_0} \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos \theta' + \left(\frac{E_0''}{E_0} - 1 \right) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta \Rightarrow \frac{E_0''}{E_0} = \frac{2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos \theta' + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos \theta' + \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{E_0''}{E_0} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta + \left(\frac{E_0''}{E_0} + 1 \right) \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos \theta' = \frac{\varepsilon}{\mu} \cos \theta \Rightarrow \frac{E_0''}{E_0} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos \theta'}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos \theta'} = \frac{\cos \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon' \mu}{\mu' \varepsilon}} \cos \theta'}{\cos \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon' \mu}{\mu' \varepsilon}} \cos \theta'}$$

$$\text{Ist } \mu = \mu' = 1 \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon}, n' = \sqrt{\varepsilon'}, \frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}} = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta}$$

Fresnel'sche Formeln

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2 \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} \cos \theta' + \cos \theta} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta'}{\cos \theta' \sin \theta + \cos \theta \sin \theta'} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta'}{\sin(\theta + \theta')} \quad (6.30)$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\cos \theta - \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} \cos \theta'}{\cos \theta + \frac{\sin \theta}{\sin \theta'} \cos \theta'} = \frac{\cos \theta \sin \theta' - \sin \theta \cos \theta'}{\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta} \frac{\sin(\theta' + \theta)}{\sin(\theta + \theta')} \quad (6.31)$$

Parallel Polarisation: $|\mathbf{E} \times \mathbf{n}| = |\mathbf{E}| |\mathbf{n}| |\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)| = |\mathbf{E}| |\mathbf{n}| |\cos \theta|$

$$(1.27) \Rightarrow (E_0 - E_0'') \cos \theta - E_0' \cos \theta' = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{E_0''}{E_0}\right) \cos \theta = \frac{E_0'}{E_0} \cos \theta'$$

Um (1.28) zu verwenden, berechnen wir:

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_z = \mathbf{E}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z) - \mathbf{k}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} k_z - \begin{pmatrix} k_y \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} E_z = \begin{pmatrix} k_z E_x - k_x E_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}_y] \mathbf{e}_x = |\mathbf{k}| |\mathbf{E}| e_x$$

$$(1.28) \Rightarrow \frac{k}{\mu} E_0 + \frac{k''}{\mu} E_0 - \frac{k'}{\mu'} E_0' = 0 \xrightarrow[k' = \frac{\sqrt{\mu' \varepsilon'}}{c}]{k = k'' = \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{c}} (E_0 + E_0'') \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} - E_0' \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{E_0''}{E_0}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{E_0'}{E_0} \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{E_0''}{E_0}\right) \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} = \left(1 + \frac{E_0''}{E_0}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \theta'$$

$$\left(1 + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2a}{a+b}\right)$$

Mit

$$\frac{\cos \theta'}{\cos \theta} \sqrt{\frac{\varepsilon \mu'}{\varepsilon' \mu}} = \frac{\varepsilon \cos \theta' n'}{\varepsilon' \cos \theta n} = \frac{\varepsilon \cos \theta' \sin \theta}{\varepsilon' \cos \theta \sin \theta'} = \frac{\varepsilon \tan \theta}{\varepsilon' \tan \theta'} \quad \text{und mit } \cos \theta' = \frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon' \mu'} \cos \theta \frac{\tan \theta}{\tan \theta'} \quad (6.32)$$

folgt noch

Fresnelsche Formeln

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{\cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} - \cos \theta \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon' \mu'}} \frac{\tan \theta}{\tan \theta'}}{\cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} + \cos \theta \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon' \mu'}} \frac{\tan \theta}{\tan \theta'}} = \frac{\varepsilon' \tan \theta' - \varepsilon \tan \theta}{\varepsilon' \tan \theta' + \varepsilon \tan \theta}$$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \sqrt{\frac{\mu' \varepsilon}{\mu \varepsilon'}} \frac{2 \cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}}{\cos \theta \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} + \cos \theta \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon' \mu'}} \frac{\tan \theta}{\tan \theta'}}$$

Hierbei wurde benutzt, dass $\frac{\mu' \varepsilon \varepsilon' \mu'}{\mu \varepsilon' \mu'} = \mu' \varepsilon' \frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{\mu' \varepsilon'}{\mu \varepsilon} \varepsilon^2$. Ist $\mu = \mu'$, dann wird die Intensität der parallel zur Einfallsebene polarisierten Welle Null, wenn gilt:

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \tan \theta' = \frac{n'^2}{n^2} \tan \theta' = \frac{\sin^2 \theta \sin \theta'}{\sin^2 \theta' \cos \theta'} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta' \cos \theta} \rightarrow \sin \theta \cos \theta = \sin \theta' \cos \theta'$$

$$\Leftrightarrow \sin(2\theta) = \sin(2\theta') \Rightarrow \theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{n'}{n} = \frac{\cos \theta'}{\cos \theta} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

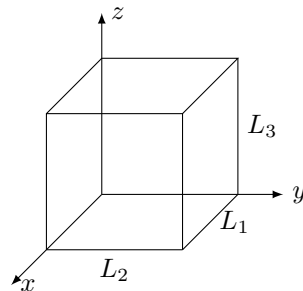
Dies definiert den *Brewster-Winkel***Brewster-Winkel**

$$\tan \theta_B = \frac{n'}{n} \quad (6.33)$$

Fällt unpolarisiertes Licht unter diesem Winkel ein, dann ist das reflektierte Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Dieses Phänomen kann man gut mit einem Polarisationsfilter an einer Fensterscheibe beobachten.

6.3 Hohlraumwellen

Wir betrachten einen quaderförmigen Hohlraum, begrenzt durch Metallwände (beschrieben als ideale Leiter).



Gesucht sind Lösungen der Wellengleichung $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$.

⇒ Separationsansatz:

$$E_i(x, y, z, t) = C_i X(x) Y(y) Z(z) T(t) \implies \underbrace{\frac{X''}{X}}_{=-k_1^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{=-k_2^2} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{=-k_3^2} - \frac{1}{c^2} \underbrace{\frac{T''}{T}}_{=-\omega^2} = 0 \quad (6.34)$$

Jeder einzelne Term ist dabei gleich einer koordinatenabhängigen Konstante, welche wir hier benannt haben.

$$\implies \omega^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = c^2 \mathbf{k}^2, \quad E_i = \operatorname{Re}[C_i \sin(k_1 x + \alpha_1) \sin(k_2 y + \alpha_2) \sin(k_3 z + \alpha_3)] \quad (6.35)$$

An den Leiteroberflächen müssen die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes verschwinden. (Dies ist eine Näherung, da sich die Leiterelektronen dazu mitbewegen müssen. Solche Resonatoren lassen sich daher nicht für beliebige hohe Frequenzen realisieren und sind daher vor allem im Radio- und Mikrowellenbereich von Belang).

E_x ist tangential zu den Wänden $y = 0, L_2$ und $z = 0, L_3$:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_2 = \sin(k_2 L_2 + \alpha_2) = 0 &\implies \alpha_2 = 0, \quad k_2 = \frac{m\pi}{L_2}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \sin \alpha_3 = \sin(k_3 L_3 + \alpha_3) = 0 &\implies \alpha_3 = 0, \quad k_3 = \frac{n\pi}{L_3}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \implies E_x = C_1 X(x) \sin \frac{m\pi y}{L_2} \sin \frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} E_y &= C_1 X(x) \sin \frac{l'\pi x}{L_1} \sin \frac{n'\pi z}{L_3} e^{-i\omega' t} \\ E_z &= C_1 X(x) \sin \frac{l''\pi x}{L_1} \sin \frac{m''\pi y}{L_2} e^{-i\omega'' t} \end{aligned}$$

Ein Zusammenhang der drei Faktoren besteht durch das Gauß'sche Gesetz.

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = C_1 X'(x) \sin \frac{m\pi y}{L_2} \sin \frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t} + C_2 Y'(y) \sin \frac{l'\pi x}{L_1} \sin \frac{n'\pi z}{L_3} e^{-i\omega' t} + C_3 Z'(z) \sin \frac{l''\pi x}{L_1} \sin \frac{m''\pi y}{L_2} e^{-i\omega'' t} \quad (6.36)$$

Um diese Gleichung zu allen Zeiten und an allen Orten innerhalb des Resonators zu erfüllen, muss gelten:

$$\begin{aligned} X'(x) \propto \sin \frac{l\pi x}{L_1}, \quad Y'(y) \propto \sin \frac{m'\pi y}{L_2}, \quad Z'(z) \propto \sin \frac{n''\pi z}{L_3} \\ \omega = \omega' = \omega'', \quad l = l' = l'', \quad m = m' = m'', \quad n = n' = n'' \end{aligned}$$

Mit einer bestimmten Wahl für X, Y, Z ergibt sich dann

$$\begin{aligned} E_x &= \operatorname{Re} \left[C_1 \cos \frac{l\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \sin \frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t} \right] \\ E_y &= \operatorname{Re} \left[C_2 \sin \frac{l\pi x}{L_1} \cos \frac{m\pi y}{L_2} \sin \frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t} \right] \\ E_z &= \operatorname{Re} \left[C_3 \sin \frac{l\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \cos \frac{n\pi z}{L_3} e^{-i\omega t} \right] \\ C_1 \frac{l}{L_1} + C_2 \frac{m}{L_2} + C_3 \frac{n}{L_3} &= 0, \quad \omega^2 = \pi^2 c^2 \left(\frac{l^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2} \right) \end{aligned}$$

mit $l, m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ und mindestens ein $l, m, n \neq 0$ für eine nichtverschwindende Lösung. Zwischen den komplexen Feldern besteht der Zusammenhang:

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{B} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{ic}{\omega} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -\frac{ic}{\omega} \left(C_3 \frac{\pi m}{L_2} - C_2 \frac{\pi n}{L_3} \right) \sin \frac{l\pi x}{L_1} \cos \frac{m\pi y}{L_2} \cos \frac{m\pi z}{L_3} e^{-i\omega t} \\ B_y &= -\frac{ic}{\omega} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{ic}{\omega} \left(C_1 \frac{\pi n}{L_3} - C_3 \frac{\pi l}{L_1} \right) \cos \frac{l\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \cos \frac{m\pi z}{L_3} e^{-i\omega t} \\ B_z &= -\frac{ic}{\omega} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\frac{ic}{\omega} \left(C_2 \frac{\pi l}{L_1} - C_1 \frac{\pi m}{L_2} \right) \cos \frac{l\pi x}{L_1} \cos \frac{m\pi y}{L_2} \sin \frac{m\pi z}{L_3} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Dies ist konsistent mit der Randbedingung verschwindender Normalkomponenten des \mathbf{B} -Feldes auf den Randflächen:

$$B_x(0, y, z) = B_x(L_1, y, z) = 0; \quad B_y(x, 0, z) = B_y(x, L_2, z) = 0; \quad B_x(x, y, 0) = B_x(x, y, L_3) = 0 \quad (6.38)$$

Weiterhin prüfen wir leicht nach, dass $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} \perp \mathbf{B}$

Für einen Wellenleiter sei der Hohlraum in z -Richtung unbegrenzt. Wir können daher wählen: $Z(z) = e^{\pm ikz}$. Für in positive z -Richtung laufenden Wellen wählen wir das positive Vorzeichen.

$$\begin{aligned} E_x &= C_1 \cos \frac{l\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} e^{i(kz-\omega t)} \\ E_y &= C_1 \cos \frac{l\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} e^{i(kz-\omega t)} \\ E_z &= C_1 \sin \frac{l\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} e^{i(kz-\omega t)} \end{aligned}$$

$$\omega^2 = c^2 \left(\frac{\pi^2 l^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2 m^2}{L_2^2} + k^2 \right) \quad l, m = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ und nicht beide gleich Null.}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \implies ikC_3 = C_1 \frac{l\pi}{L_1} + C_2 \frac{m\pi}{L_2}$$

$$\begin{aligned} B_z &= -\frac{ic}{\omega} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\frac{ic\pi}{\omega} \left(\frac{C_2 l}{L_1} - \frac{C_1 m}{L_2} \right) \cos \frac{l\pi x}{L_1} \cos \frac{m\pi y}{L_2} e^{i(kz-\omega t)} \\ B_x &= -\frac{ic}{\omega} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = \left(-\frac{ic\pi}{\omega} \frac{C_3 m}{L_2} \sin \frac{l\pi x}{L_1} \cos \frac{m\pi y}{L_2} - \frac{ck}{\omega} C_2 \sin \frac{l\pi x}{L_1} \cos \frac{m\pi y}{L_2} \right) e^{i(kz-\omega t)} \\ B_y &= -\frac{ic}{\omega} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \left(-\frac{ic\pi}{\omega} \frac{-C_3 l}{L_1} \cos \frac{l\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} + \frac{ck}{\omega} C_1 \cos \frac{l\pi x}{L_1} \sin \frac{m\pi y}{L_2} \right) e^{i(kz-\omega t)} \end{aligned}$$

$$\implies \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} \perp \mathbf{B} \quad (6.39)$$

Für freie ebene Wellen fanden wir, das \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen. Man spricht dann von TEM-Wellen (transversal elektromagnetische Moden).

Im Rechteckleiter gibt es keine Moden mit $E_z = 0$ und $B_z = 0$. Für $E_z = 0$ und $C_3 = 0$ oder l oder m gleich Null.

Betrachte zunächst verschwindende Wellenzahlen:

$$\left. \begin{aligned} l = 0 \ \& \ B_z = 0 \Rightarrow C_1 m = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ m = 0 \ \& \ B_z = 0 \Rightarrow C_2 l = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \end{aligned} \right\} \implies \mathbf{E} = 0 \implies \mathbf{B} = 0$$

Ist andererseits $C_3 = 0$ (und $B_z = 0$)

$$C_1 \frac{m}{L_2} - C_2 \frac{l}{L_2} = 0$$

und damit $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, $E_z = 0$

$$C_1 \frac{l}{C_1} + C_2 \frac{m}{L_2} = 0$$

Dieses Gleichungssystem hat nur die Lösung $C_1 = C_2 = 0 \implies \mathbf{E} = 0 \implies \mathbf{B} = 0$.

Es gibt hier als keine TEM-Welle. Da $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, können wir entweder $\mathbf{E} \propto \mathbf{e}_z$ (TM) oder $\mathbf{B} \propto \mathbf{e}_z$ (TE) wählen. Der allgemeine Fall ist eine Linearkombination aus beiden.

Die einfachste TE-Mode ist gegeben für $l = 01$, $m = 0$ (oder umgekehrt).

$$\omega = c \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{L_1^2}} > \frac{c\pi}{L_1}; \quad E_z = E_x = B_y = 0$$

$$\text{Einfachste TM-Mode} = l = m = 1, \quad \frac{C_2 l}{L_2} - \frac{C_1 m}{L_2} = 0$$

$$\omega = c \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2}{L_2^2}} > c \sqrt{\frac{\pi^2}{L_1^2} + \frac{\pi^2}{L_2^2}}$$

Von Bedeutung sind auch andere Geometrien (z.B. Koaxialkabel).

6.4 Streuung von Licht

Wir wollen hier im Rahmen der klassischen Physik die Rayleigh- und Thomsonstreuung behandeln.

Oszillierende Punktladung

Betrachte Punktteilchen mit Ladung q auf der Bahn

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \cos \omega t \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{x}_0 \omega^2 \cos \omega t \quad (6.40)$$

Für das Dipolmoment ergibt sich.

$$\mathbf{p}(t) = \iiint \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) d^3x = \iiint \mathbf{x} q \rho(\mathbf{x}, t) d^3x = q \mathbf{x}_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}[q \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}] = q \mathbf{x}_0 \frac{1}{2} (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) \quad (6.41)$$

Abgestrahlte Leistung:

$$P = \frac{c}{3} k^4 \mathbf{p}^2 \underset{k=\frac{\omega}{c}}{\underbrace{=}} \frac{1}{3c^3} q^2 \omega^4 x_0^2 = \frac{2q^2}{3c^2} \langle \ddot{\mathbf{x}}^2 \rangle \quad (6.42)$$

Das Punktteilchen habe nun die Masse m und befinde sich in einem Oszillatorpotential mit Frequenz ω_0 . Der Abgestrahlten Leistung entspreche ein Dämpfungsstrom Γ .

Außerdem sollen folgende Felder anliegen:

$$\implies m \ddot{\mathbf{x}} + \underbrace{\mathbf{F}_{\text{rad}}}_{m\Gamma \dot{\mathbf{x}}} + m\omega_0^2 \mathbf{x} = q \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t} \quad (6.43)$$

Um den Dämpfungsstrom zu finden, nehmen wir an, dass in erste Näherung das Teilchen wie oben mit der Frequenz ω_0 oszilliert.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{rad}} = f_{\text{rad}} \dot{\mathbf{x}} = m\Gamma_{\text{rad}} \dot{\mathbf{x}} &\longrightarrow \langle \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \rangle = \langle f_{\text{rad}} \dot{\mathbf{x}} \rangle = P = \frac{2q^2}{3c^3} \langle \ddot{\mathbf{x}}^2 \rangle \\ f_{\text{rad}} = \frac{2q^2}{3c^3} \omega_0^2 = m\Gamma_{\text{rad}} &\implies \Gamma_{\text{rad}} = \frac{2q^2 \omega_0^2}{3mc^3} \end{aligned}$$

Im Allgemeinen tragen neben Γ_{rad} auch andere Terme (insbesondere Transfer kinetischer Energie an andere Teilchen, z.B. Hüllenelektronen) bei. Wir behandeln Γ daher im Folgenden als einen phänomenologischen Parameter.

Für die Wellenlänge des einfallenden Licht soll gelten $\lambda \gg x_0$, also z.B. viel größer als ein Atomradius.

$$\implies \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \approx \frac{x}{\lambda_0} \ll 1 \implies e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \approx 1 \implies m \ddot{\mathbf{x}} + m\Gamma \dot{\mathbf{x}} + m\omega_0^2 \mathbf{x} = q \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Zur Lösung machen wir den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} e^{-i\omega t} \quad (6.44)$$

$$\implies (-\omega^2 - i\Gamma\omega + \omega_0^2) \mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 \quad (6.45)$$

$$\implies \mathbf{p}(t) = q \mathbf{x} = q \mathbf{a} e^{-i\omega t} = \frac{\frac{q^2}{m} \mathbf{E}_0}{-\omega^2 - i\Gamma\omega + \omega_0^2} e^{-i\omega t} \quad (6.46)$$

Lösungen der homogenen Gleichung sind exponentiell fallend und müssen hier nicht berücksichtigt werden.

Es folgt für die abgestrahlte Leistung:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c\omega^4 |\mathbf{p}|^2}{8\pi c^3} \sin^2 \theta = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 |\mathbf{E}_0|^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (6.47)$$

θ ist dabei der Winkel zwischen \mathbf{E}_0 und der Abstrahlung. Die Frequenz der Abstrahlung ist dabei gleich der Frequenz der einfallenden Welle. Quantenmechanisch ist die Frequenz proportional zur Energie. Man spricht daher von elastischer Streuung.

Wir definieren den *differentiellen Wirkungsquerschnitt*

Differentieller Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{N_{\text{out}}}{\Delta t d\Omega}}{\frac{N_{\text{in}}}{\Delta t A}} = \frac{\frac{P_{\text{out}}}{d\Omega}}{\frac{P_{\text{in}}}{A}} = \frac{dP}{\langle |\mathbf{S}| \rangle} \quad (6.48)$$

Mit $N_{\text{in,out}}$ der Zahl der einfallenden bzw. ausfallenden Lichtteilchen. Quantenmechanisch sind diese proportional zur Energie. A ist die Fläche, über die der einfallende Teilchenstrom verteilt ist, und Δt ist das betrachtete Zeitintervall.

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) \implies \langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2 \implies \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (6.49)$$

Totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \iint \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4 (1 - \cos^2 \theta)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} d \cos \theta = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \quad (6.50)$$

Thomsonstreuung

Dieser Grenzfall gilt für kleine Wellenlängen ($\omega \gg \omega_0$) oder alternativ für die Streuung an freien Elektronen

Totaler Wirkungsquerschnitt Thomsonstreuung

$$\sigma_{\text{R}} = \sigma_{\text{Th}} \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \quad (6.51)$$

Die Quantenmechanik bestätigt diesen Ausdruck als den nichtrelativistischen Grenzfall der *Klein-Nishimura-Formel*.

Rayleighstreuung

Dies gilt für den Fall $\omega \ll \omega_0$

Totaler Wirkungsquerschnitt Rayleighstreuung

$$\sigma = \sigma_{\text{Th}} \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \quad (6.52)$$

Blaues Sonnenlicht wird in der Atmosphäre also sehr viel stärker gestreut als rotes. Das Streulicht im Tageshimmel erscheint daher blau. Morgens und Abends, bei niedrigem Sonnenstand, kann die Sonne selbst durch die „Wegstreuung“ der Blauteile dagegen rot erscheinen, ein Effekt, der durch Aerosole noch verstärkt werden kann.

Kapitel 7

Spezielle Relativitätstheorie

Die Newton'sche Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ ist invariant unter Galilei-Transformationen $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a} + \mathbf{v}t$. Darüber hinaus ist sie *forminvariant* oder *kovariant* unter Rotationen $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}' = R \cdot \mathbf{x}$ mit einer orthogonalen Matrix R , da mit $\mathbf{F}' = R \cdot \mathbf{F}$ die Gleichung $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}'$ (gleiche Form im rotierten Koordinatensystem) folgt. In der bisherigen Notation ist das Transformationsverhalten unter Boosts (Übergang zu einem anderen gleichförmig, d.h. beschleunigungsfreien, bewegten Koordinatensystem) nicht offensichtlich. Z.B. können wir eine bewegte Ladung im \mathbf{B} -Feld betrachten, welche dann eine Lorentzkraft erfährt. Im Ruhesystem des Teilchens sollte die Kraft weiter vorhanden sein, kann allerdings für verschwindende Geschwindigkeit nicht als Lorentzkraft aufgefasst werden. Offenbar geht das \mathbf{B} -Feld in ein \mathbf{E} -Feld über. Es zeigt sich allerdings, dass forminvariante Gesetze nicht mit Galilei-Transformationen vereinbar sind. Stattdessen müssen auch Längen und Zeitabstände kontrahiert bzw. verlängert werden. Diese sogenannten Lorentztransformationen wurden zuerst von Lorentz und dann von Poincaré im Jahr 1904 formuliert. Unabhängig davon erkannte Albert Einstein 1905, dass sich die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom gleichförmigen Bewegungszustand des Beobachters und von der Quelle als einfachste Forderung nutzen lässt, um die Lorentztransformation zu erhalten. Anders als Lorentz und Poincaré ließ Einstein die im 19. Jahrhundert vorherrschende Vorstellung eines ruhenden Äthers als Träger der elektromagnetischen Wellen fallen. Alle gleichförmig bewegten Beobachter sind damit gleichberechtigt, und die *Längenkontraktion* sowie die *Zeitdilatation* sind relative Effekte zwischen den Bezugssystemen. Bei Lorentz und Poincaré existiert dagegen noch das bevorzugte Ruhesystem des Äthers - auch wenn Poincarés Vorhersagen sich mit Einsteins Aussagen deckten.

Eine Konsequenz der Maxwell-Gleichungen sind die Wellengleichungen im Vakuum

<p>Wellengleichung im Vakuum</p> $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (7.1)$

mit ψ einer beliebigen Komponente von \mathbf{E} oder \mathbf{B} . Wir betrachten nun eine Galilei-Transformation.

$$\begin{aligned}
 t &\mapsto t' = t; & \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t \rightsquigarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{v}t \\
 \frac{\partial}{\partial x'_i} &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial t}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial t} = \delta_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \nabla' = \nabla \\
 \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial x_j}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} = -v_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla \\
 &\hookrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \Delta \implies \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 \right) - \Delta' \quad (7.2)$
--

Unter Galilei-Transformationen ist die Wellengleichung also nicht forminvariant. Dies kann auch nicht durch eine lineare Transformation unter den \mathbf{E} und \mathbf{B} behoben werden, da alle Komponenten dieselbe Wellengleichung erfüllen.

7.1 Spezielles Relativitätsprinzip, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und Lorentz-Transformation

Die Spezielle Relativitätstheorie gilt in der Abwesenheit von Gravitation (oder wenn deren Effekt vernachlässigbar klein ist). Es gibt dann Bezugssysteme, in denen sich kräftefreie Körper gleichförmig und geradlinig bewegen. Diese heißen *Inertialsysteme*. Man beobachtet, dass alle Inertialsysteme gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegt sind (was den Fall verschwindender Relativgeschwindigkeit einschließen soll).

Spezielles Relativitätsprinzip

Die physikalischen Vorgänge sind unabhängig vom Inertialsystem, in welchem sie beobachtet werden. Würde nun die Lichtgeschwindigkeit sich zur Geschwindigkeit der Strahlungsquelle addieren, wäre dies noch konsistent mit den Galilei-Transformationen. Die Maxwell-Gleichungen sagen jedoch voraus, dass dies nicht der Fall ist, sondern sich das Licht mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Einstein und Poincaré erkannten unabhängig voneinander, dass dies das grundlegendste Prinzip ist, dessen Anwendung zu den Lorentz-Transformationen (und damit zur Konsistenz der Maxwell-Gleichungen mit dem Speziellen Relativitätsprinzip) führt.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle.

Zusammen folgt aus diesen beiden Postulaten (Spezielles Relativitätsprinzip und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) die Spezielle Relativitätstheorie.

Betrachte zwei Inertialsysteme IS und IS', welche im raumzeitlichen Koordinatenursprung zusammenfallen, d.h. $t' = 0$, $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ für $t = 0$ und $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Von diesem Raumzeit-Ursprungspunkt werde ein Lichtpuls gesendet. Im IS kommt dieser zur Zeit t im Punkt \mathbf{x} an, sofern gilt:

$$\text{In IS: } c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = 0 \text{ und in IS': } c^2 t'^2 - \mathbf{x}'^2 = 0$$

(t, \mathbf{x}) und (t', \mathbf{x}') bezeichnen den gleichen Raumzeitpunkt in den verschiedenen Koordinatensystemen. Obige Bedingung ist erfüllt, wenn für beliebige Punkte (also nicht nur entlang von Lichtstrahlen) gilt:

$$c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{x}'^2 \quad (7.3)$$

wobei beide Seiten auch verschieden von Null sein können. [Tatsächlich folgt unter der Annahme von Homogenität und Isotropie des Raumes der allgemeinere Fall zwingend aus der Bedingung für Lichtstrahlen¹].

Wir betrachten nun eine Bewegung entlang der z-Achse mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (0, 0, v)^T$. Ein linearer(wegen Homogenität) Zusammenhang zwischen den Koordinatensystemen ist dann von der Form

$$x' = x \quad y' = y \quad z' = a_1 z + a_2 t \quad t' = b_1 t + b_2 z$$

Mit $a_{1,2}$ und $b_{1,2}$ Funktionen von v .

Der Ursprung von IS' bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in IS.

$$\begin{aligned} z = vt \mapsto z' = 0 &\iff a_1 vt + a_2 t = 0 \iff a_2 = -va_1 \\ c^2 t^2 - z^2 = c^2 t'^2 - z'^2 &= c^2 (b_1^2 t^2 + b_2^2 z^2 + 2b_1 b_2 tz) - a_1^2 z^2 - v^2 a_1^2 t^2 + 2a_1^2 vtz \\ &\implies 2c^2 t = 2c^2 b_1^2 t + 2c^2 b_1 b_2 z - 2v^2 a_1^2 t + 2a_1^2 vz \\ \stackrel{z=0}{\iff} 2c^2 t &= 2c^2 b_1^2 t - 2va_1^2 t \quad \stackrel{t=0}{\iff} 0 = 2c^2 b_1 b_2 z + 2a_1^2 vz \\ -2z &= 2c^2 b_2^2 z + c^2 2b_1 b_2 t - 2a_1^2 z + 2a_1^2 vt \\ \stackrel{z=0}{\iff} 0 &= 2c^2 b_1 b_2 t + 2a_1^2 vt \quad \stackrel{t=0}{\iff} -2z = 2c^2 b_2^2 z - 2a_1^2 z \\ &\implies a_1 = b_1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad b_2 = -\frac{v}{c^2} a_1 \end{aligned}$$

Mit der Definition von $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ folgt die Lorentz-Transformation

Lorentz-Transformation

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} z \right); \quad z' = \gamma (z - vt); \quad x' = x; \quad y' = y \quad (7.4)$$

¹Vgl. Borchers, Hegerfeldt, Comm. Math. Phys. 28 (1972), Seite 256

Bevor wir dieses Resultat im Tensorkalkül formulieren diskutieren wir kurz die Lorentz-Kontraktion und die Zeitdilatation.

Lorentz-Kontraktion

Ein Stab der Länge l_0 (in seinem Ruhesystem gemessen) befinde sich in Ruhe im IS' zwischen den Punkten $\mathbf{0}$ und $(0, 0, z' = l_0)^T$. Die Länge l in IS wird gemessen, indem zu gleichen Zeiten der Anfangs- und Endpunkt z_1 und z_2 fest gestellt werden ($\rightarrow l = z_2 - z_1$).

$$\Rightarrow l_0 = z' - 0 = \gamma(z_2 - vt) - \gamma(z_1 - vt) = \gamma(z_2 - z_1) = \gamma l \quad (7.5)$$

\Rightarrow Der Stab wird nun um den Faktor $\frac{1}{\gamma}$ verkürzt gemessen, nämlich mit der Länge.

Längen- bzw. Lorentzkontraktion

$$l = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) l_0 \quad (7.6)$$

Zeitdilatation

Wir betrachten eine Uhr, welche in ihrem Ruhesystem die Zeitdilatation t_0 misst. Diese Uhr befinde sich innerhalb von IS' in Ruhe am Ort $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$. IS und IS' fallen wieder um Raumzeitursprung zusammen. Der Punkt $t' = t_0$, $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ in IS' entspricht t , $\mathbf{x} = (0, 0, vt)^T$ in IS, wobei t gegeben ist durch die Transformation .

Zeitdilatation

$$t' = t_0 = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} vt \right) = \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) t \iff t = \gamma t_0 \quad (7.7)$$

Die Zeit vergeht für den ruhenden Beobachter also schneller.

7.2 Kovariante Formulierung

Wir fassen den invarianten Abstand $c^2 t^2 - \mathbf{x}^2$ als Resultat der Auswertung einer Bilinearform (welche zwei Vektoren eine reelle Zahl zuordnet) auf. Dazu eliminieren wir den *Vierervektor*.

Vierervektor

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (7.8)$$

Zu beachten ist, dass die räumlichen Koordinaten nun obere Indizes tragen. Wir wollen nun schreiben.

$$s^2 = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \quad (7.9)$$

In dem Lorentz-Tensor-Kalkül, welches wir nun entwickeln, werden obere mit unteren Indizes gemäß der Einstein-Konvention kontrahiert, also hier: $x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_{\mu, \nu=0}^3 x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$.

Das Resultat für $g_{\mu\nu}$ ist der *Metrische Tensor*.

Metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Wir definieren das Skalarprodukt

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \mathbf{y} \quad (7.11)$$

Da $x \cdot x$ beliebige Werte annehmen kann (nicht nur > 0 sofern $x \neq 0$) handelt es sich eigentlich um eine Pseudometrik. Den so definierte pseudometrischen Raum bezeichnen wir als *Minkowski-Raum*.

Für die Lorentz-Transformation machen wir den Ansatz

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (7.12)$$

und verlangen, dass $x \cdot y = x' \cdot y'$ invariant ist.

$$\implies x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = \Lambda^\rho{}_\mu x^\mu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu y^\nu \implies g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma{}_\nu \quad (7.13)$$

$$\implies g = \Lambda^T g \Lambda \quad (\text{als Matrixidentität}) \quad (7.14)$$

Nehmen wir an, die Relativbewegung erfolge in x^1 -Richtung

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

was wir verifizieren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ -\sinh \phi & -\cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi & 0 \\ 0 & -\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \gamma \beta x \\ \gamma x - \gamma \beta ct \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta & 0 & 0 \\ -\gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, dass $\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ die Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation ist. Aufgrund der Linearität der Transformation ist $\Lambda^\mu{}_\nu$ konstant, so dass die Homogenität der Raumzeit unter den Lorentz-Transformationen manifest bleibt.

Kontravariante Vektoren

Kontravariante Vektoren transformieren beim Wechsel des Koordinatensystems mit dieser Jacobi-Matrix:

Kontravariante Transformation

$$v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu \quad (7.15)$$

Diese Vektoren tragen eine oberen Index, z.B. x^μ . Ein anderes Beispiel ist die *Vierergeschwindigkeit* u^μ .

Vierergeschwindigkeit

Dazu betrachten wir eine Bahnkurve $x^\mu(\lambda)$. Im momentanen Ruhesystem vergeht das Zeitintervall

$$d \cdot dx = c^2 d\tau^2 = \frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{dx}{d\lambda} d\lambda^2 = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{dx}{d\tau} \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 d\lambda^2 = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{dx}{d\tau} d\tau^2$$

Eine mitbewegte Uhr zeigt damit die *Eigenzeit* an.

Eigenzeit

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{dx \cdot dx} = \frac{1}{c} \int \sqrt{\frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{dx}{d\lambda}} d\lambda \quad (7.16)$$

Wir definieren

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \implies u \cdot u = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{dx}{d\tau} = c^2 \quad (7.17)$$

Mit $v = \frac{dx}{dt}$ folgt dann die Vierergeschwindigkeit.

Vierergeschwindigkeit

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dt}{d\tau} \mathbf{v} \\ u^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{cdt}{d\tau} \end{aligned} \right\} \implies u^\mu = \begin{pmatrix} u^0 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

$$u^2 = c^2 = (u^0)^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right) = (u^0)^2 \frac{1}{\gamma^2} \Leftrightarrow u^0 = \gamma c, \quad \mathbf{u} = \gamma \mathbf{v} \quad (7.19)$$

Dies führt zur Definition eines weiteren kontravarianten Vektors.

Viererimpuls**Viererimpuls**

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= m\mathbf{v}\gamma = m\mathbf{v} + \mathcal{O}(n^2) \left(\frac{|\mathbf{v}|^3}{c^3} \right) \\ p^0 &= mc\gamma = \frac{1}{c} \left[mc^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \mathcal{O}(n^2) \left(\frac{|\mathbf{v}|^4}{c^4} \right) \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow p^\mu = mu^\mu = \begin{pmatrix} p^0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \Rightarrow p \cdot p \equiv p^2 = m^2c^2 \quad (7.20)$$

cp^0 ist die Energie, wobei der Beitrag mc^2 als Ruheenergie und der Rest als kinetische Energie identifiziert werden kann.

Eingehender wird dies gerechtfertigt, wenn wir die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld betrachten.

Kovariante Vektoren

Kovariante Vektoren tragen einen unteren Index.

Kovariante Vektoren

$$v_\mu = g_{\mu\nu}v^\nu \quad (7.21)$$

Die inverse Matrix zu $g_{\mu\nu}$ hat die gleiche Form wie $g_{\mu\nu}$ und wird mit $g^{\mu\nu}$ bezeichnet: $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta_\nu^\mu$. Diese beiden Matrizen ermöglichen aus das „Heben“ und „Senken“ von Indizes $\Rightarrow V^\mu = g^{\mu\nu}V_\nu$.

Kovariante Vektoren transformieren dann wie folgt:

$$V'_\mu = g^{\mu\rho}V'^\rho = g_{\mu\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma V^\sigma = g_{\mu\rho}\Lambda^\rho{}_\sigma g^{\sigma\omega}V_\omega = V_\omega(\Lambda^{-1})^\omega{}_\mu \quad (7.22)$$

Dabei identifizieren wir die inverse Lorentz-Transformation mit:

Inverse Lorentz-Transformation

$$\Lambda^\nu{}_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu = [(\Lambda^{-1})^T]_\mu{}^\nu \quad (7.23)$$

Dies ist gerechtfertigt, wegen:

$$V_\mu W^\mu = V'^\mu W'^\mu = V_\rho(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\sigma W^\sigma = v_\rho \delta_\sigma^\rho W^\sigma = V_\rho W^\rho$$

Das Transformationsverhalten kovarianter Vektoren sieht dann wie folgt aus:

Transformation kovarianter Vektoren

$$V'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu V_\nu = [(\Lambda^{-1})^T]_\mu{}^\nu V_\nu \quad (7.24)$$

Die Ableitung nach einem kovarianten Vektor ist jedoch kontravariant:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\rho} \quad x'_\mu = x_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \stackrel{\Leftrightarrow}{=} x'_\mu \Lambda^\mu{}_\rho = x_\rho \quad \Lambda^\mu{}_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho} \quad (7.25)$$

Umgekehrtes gilt für kontravariante Vektoren, so dass wir kurz schreiben:

Kovariante und kontravariante Ableitung

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \text{und} \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (7.26)$$

Tensoren höherer Stufe sind dann ebenso durch ihr Transformationsverhalten charakterisiert:

Transformation höherstufiger Tensoren

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_n}{}_{\alpha_n} (\Lambda^{-1})^{\beta_1}{}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\beta_m}{}_{\nu_m} T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} \quad (7.27)$$

7.3 Lorentz-Gruppe

Offenbar erfüllen auch Boosts in x - und y -Richtung die Gleichung $g = \Lambda^T g \Lambda$ und erhalten so das Skalarprodukt. Gleiches gilt für Drehungen $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ mit R einer 3×3 -Matrix und $R^T R = I$. Erfüllen Λ und Λ' die Gleichung, dann gilt das auch für deren Verknüpfung $\Lambda'' = \Lambda' \Lambda$:

$$\Lambda''^T g \Lambda'' = \Lambda^T \Lambda'^T \Lambda' \Lambda = \Lambda^T g \Lambda = g \tag{7.28}$$

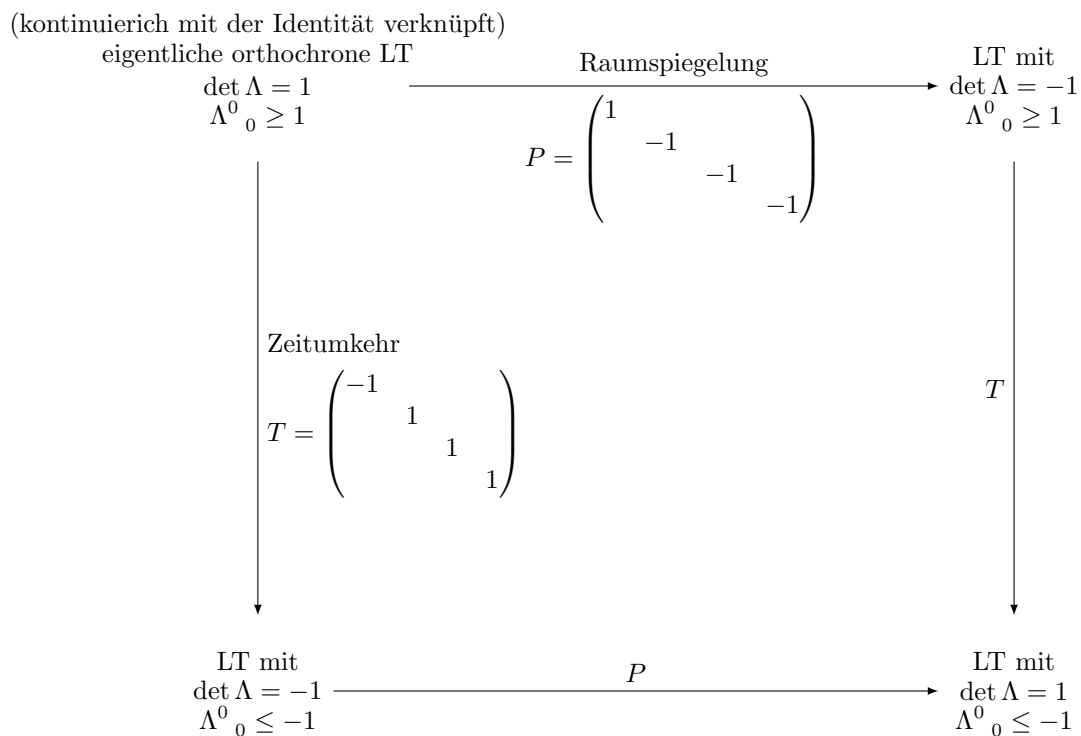
Wir bezeichnen alle Transformationen, welche $g = \Lambda^T g \Lambda$ erfüllen, als Lorentztransformation (also sowohl Boosts, Drehungen als auch Kombinationen aus diesen). Die Gruppenaxiome sind erfüllt:

- Λ, Λ' sind Lorentztransformationen $\implies \Lambda' \Lambda$ ist die Lorentztransformation wie oben gezeigt.
- I_4 ist eine Lorentztransformation (neutrales Element)
- \exists Inverses : $\Lambda^{-1 \mu}_{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{T \mu}$

Die Lorentztransformationen werden durch 6 Parameter beschrieben (drei Boosts und drei Drehungen). Fügt man als Verallgemeinerung Translationen hinzu, $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + \underbrace{a^{\mu}}_{\text{Translation}}$

dann erhält man die Zehnparametrische *Poincaré-Gruppe*.

Die *Lorentzgruppe* zerfällt in vier Komponenten, die nicht kontinuierlich zusammenhängen, sondern über Raumspiegelung (Parität) und Zeitumkehr verknüpft. ($\Lambda^T g \Lambda = g \implies \det \Lambda = \pm 1$)



7.4 Relativistische Stöße

Es gilt Viererimpulserhaltung/Energieimpulserhaltung:

$$\underbrace{p_1 + p_2 + \dots + p_m}_{\text{Vor dem Stoß}} = \underbrace{p'_1 + p'_2 + \dots + p'_m}_{\text{Nach dem Stoß}} \tag{7.29}$$

Bei einem elastischen Stoß behalten die beteiligten Objekte ihre Identität (charakterisiert durch Ruhemasse, elektrische und andere Ladungen).

Elastischer Zweikörperstoß

Im *Schwerpunktsystem* (CMS) gilt:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad (7.30)$$

Die Vektoren liegen in einer Ebene, und der Vorgang hängt nur vom Winkel θ ab. Wähle o.B.d.A. $x - z$ -Ebene mit $\mathbf{p}_1 \parallel \mathbf{e}_z$:

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} E_1/c \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}, \quad p_2^\mu = \begin{pmatrix} E_2/c \\ 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \sqrt{m_{1,2}^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (7.31)$$

Nach dem Stoß (nutze Viererimpulserhaltung aus):

$$p_1'^\mu = \begin{pmatrix} E_1'/c \\ p' \cos \theta \\ 0 \\ p' \cos \theta \end{pmatrix}, \quad p_2'^\mu = \begin{pmatrix} E_2'/c \\ -p' \cos \theta \\ 0 \\ -p' \cos \theta \end{pmatrix}, \quad E'_{1,2} = \sqrt{m_{1,2}^2 c^4 + p'^2 c^2} \quad (7.32)$$

Energieerhaltung (Nullkomponente der Viererimpulse)

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2' \quad (7.33)$$

$$(1.31) \text{ mit } (1.32) \implies E_1^2 - E_2^2 = (m_1^2 - m_2^2)c^4 = E_1'^2 - E_2'^2 \quad (7.34)$$

$$(1.33) \text{ und } (1.34) \implies (E_1 - E_2)(E_1 + E_2) = (E_1' - E_2')(E_1' + E_2') \implies E_1 - E_2 = E_1' - E_2' \implies E_1 = E_1', E_2 = E_2', p = p'$$

\implies Im CMS bleibt beim Elastischen Stoß die Energie (und damit der Betrag des Dreierimpuls) der einzelnen Objekte erhalten.

Die Größen im Laborsystem erhält man durch Lorentz-Transformation.

Inelastische Stoß

Es findet eine Umwandlung der stoßenden Objekte statt: einzelne Ruhmassen und die Gesamtzahl der Teilchen können sich vor und nach dem Stoß voneinander unterscheiden.

Beispiel: Erzeugung schwerer Teilchen

Ein Teilchen der Masse m und Energie E stoße auf ein ruhendes Teilchen gleicher Masse, wobei beide sich vernichten und ein neues Teilchen mit Masse M produzieren. Wie groß ist M ?

$$\text{Impulserhaltung: } \mathbf{p}' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2, \quad (\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}) \quad \text{Energieerhaltung: } p'_0 = \frac{1}{c} \sqrt{M^2 c^4 + \mathbf{p}'^2 c^2} = p_1^0 + p_2^0 = \frac{1}{c} (E + mc^2)$$

$$\text{mit } E \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} \Leftrightarrow \mathbf{p}'^2 = \mathbf{p}_1^2 = \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2} \implies \sqrt{M^2 c^4 + E^2 - m^2 c^4} = E + mc^2 \Leftrightarrow M^2 c^4 = 2m^2 c^4 + 2Emc^2$$

$$M = m \sqrt{2 \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right)} \xrightarrow{E \gg mc^2 \text{ relativistisch}} \frac{\sqrt{2mE}}{c}$$

\longrightarrow Masse der produzierbaren Teilchen $\propto \sqrt{E}$.

Stattdessen: Lasse nun die Teilchen mit gleichen Energien $\frac{E}{2}$ kollidieren. $\implies \mathbf{p}' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$.

$$\underbrace{p'^2}_* = M^2 c^2 = \underbrace{(p_1 + p_2)^2}_* = \frac{1}{c^2} E^2 \implies M = \frac{E}{c^2} \quad * : \text{ Viererimpulse: } p' = \begin{pmatrix} Mc \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c} E \\ \mathbf{p}_1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c} E \\ -\mathbf{p}_1 \end{pmatrix}$$

Die maximale Masse der produzierbaren Teilchen wächst nun proportional zu E . Günstiger, da der Endzustand keine kinetische Energie trägt.

7.5 Kovariante Maxwellgleichungen

Viererstrom

Betrachte Ladungsmenge dq (*Lorentz-Skalar*) in einem kleinen Volumenelement dV unter Lorentz-Transformation:

$$dq = \rho dV = dq' = \rho' dV' \quad (7.35)$$

\implies Da wegen Längenkontraktion i.A. $dV \neq dV'$ ist, gilt auch $\rho \neq \rho'$. $\implies \rho$ ist kein Lorentz-Skalar. Angenommen, das Ladungselement bewegt sich entlang $\mathbf{x}(t)$. Dann gilt:

$$\underbrace{dq dx^\mu}_{\text{Vierervektor}} = \rho dV dx^\mu = \rho dV dt \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$dV dt = \frac{1}{c} d^4x \text{ ist ein Lorentz-Skalar, da } d^4x' = |\det\Lambda| d^4x = d^4x$$

\implies Die *Viererstromdichte*

$$j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \rho\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \text{ ist ein Vierervektor} \quad (7.36)$$

Ladungserhaltung:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x \stackrel{\text{Vzeitunabhängig}}{=} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho d^3x = - \iiint_V \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} \stackrel{\text{Gauß'scher Satz}}{=} - \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d^3x \quad (7.37)$$

mit V beliebig

Kovariante Kontinuitätsgleichung

$$\implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (7.38)$$

Aus dem Coulomb-Gesetz hatten wir das Gauß'sche Gesetz hergeleitet: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ bzw. $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$. Diese Gleichungen sind nicht kovariant, da ρ kein Lorentzskalar ist, sondern Nullkomponente eines Vierervektors, nämlich $\frac{1}{c}\mathbf{j}^\mu(\mathbf{x}, t)$.

Entsprechend machen wir den Ansatz, ϕ zu einem Vierervektor zu ergänzen: $\phi \longrightarrow A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$. Das Gauß'sche Gesetz wird damit zu

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho \implies D^\mu{}_\nu A^\nu = -\frac{4\pi}{c}j^\nu \quad (7.39)$$

Zu bestimmen ist dann: D als ein Ableitungsoperator und Tensor 2. Stufe (damit die Gleichung forminvariant ist).

Allgemeiner Ansatz:

$$D^\mu{}_\nu = a(\partial^2)\delta^\mu{}_\nu\partial^2 + b(\partial^2)\partial^\mu\partial_\nu \text{ mit Polynomen } a, b$$

$$0 = -\frac{4\pi}{c}\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu D^\mu{}_\nu A^\nu \stackrel{\text{Kontinuitätsgleichung}}{=} a(\partial^2)\partial^2\partial_\nu A^\nu + b(\partial^2)\partial^2\partial_\nu A^\nu \implies a(\partial^2) = -b(\partial^2)$$

Für statische Ladungsverteilungen $\left(\longrightarrow \mathbf{A} = 0, \mathbf{j} = 0, \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0\right)$ muss sich wieder das Gauß'sche Gesetz ergeben:

$$-4\pi\rho = D^0{}_0\phi = \left[a(-\nabla^2)(-\nabla^2) - a(-\nabla^2)\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}}_{=0} \right] \phi = a(-\nabla^2)(-\nabla^2)\phi \implies a(x) = -1$$

$$\implies D^\mu{}_\nu = -\delta^\mu{}_\nu\partial^2 + \partial^\mu\partial_\nu \implies \partial^2 A^\mu - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu = \partial_\nu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \frac{4\pi}{c}j^\mu$$

Definition:

Elektromagnetischer Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \text{Antisymmetrischer Tensor 2. Stufe} \quad (7.40)$$

Dualer Feldstärketensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad \text{total antisymmetrisch mit } \varepsilon^{0123} = 1 \quad (7.41)$$

Allgemein gilt auch: $\underbrace{S^{\alpha\beta}}_{\text{symm.}} \underbrace{A_{\alpha\beta}}_{\text{antisymm.}} = 0 \implies \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}_{\text{antisymm. in allen}} \partial_\mu \left(\underbrace{\partial_\alpha A_\beta}_{\text{symm. in } \mu\alpha} - \underbrace{\partial_\beta A_\alpha}_{\text{symm. in } \mu\beta} \right) = 0$. Insgesamt ergibt sich somit die manifest kovariante Form der Maxwell-Gleichungen.

Kovariante Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \quad (7.42)$$

Prüfe nach, dass dies tatsächlich die Maxwell-Gleichungen liefert. Identifiziere dazu die Komponenten von $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\implies \tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Geht vor aus } F^{\mu\nu} \text{ mit } \mathbf{E} \mapsto \mathbf{B} \text{ und } \mathbf{B} \mapsto -\mathbf{E}$$

Beachte: \mathbf{E} und \mathbf{B} sind keine *Lorentz-Vektoren*, sondern Komponenten von $F^{\mu\nu}$.

Die Maxwell-Gleichungen erhalten wir aus den 0 und i Komponenten der kovarianten Gleichungen:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \implies \begin{aligned} \mu = 0: & \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \\ \mu = i: & \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \implies \begin{aligned} \mu = 0: & \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mu = i: & \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (7.44)$$

Transformation der elektromagnetischen Felder unter Lorentz-Boosts

IS' bewege sich mit \mathbf{v} relativ zu IS ($\beta = \mathbf{v}/c$):

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & & -\gamma\beta^j & \\ & \delta^{ij} + (\gamma-1)\frac{v^i v^j}{v^2} & & \\ -\gamma\beta^j & & \gamma & \\ & & & \gamma \end{pmatrix}) \xrightarrow{\mathbf{v}=\mathbf{v}e_1} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

Viererpotential

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \implies \begin{aligned} \phi' &= \gamma(\phi - \beta A_{\parallel}) \\ A'_{\parallel} &= \gamma(A_{\parallel} - \beta\phi) \\ \mathbf{A}'_{\perp} &= \mathbf{A}_{\perp} \end{aligned}$$

\parallel, \perp bezeichnen die Komponenten parallel und senkrecht zu \mathbf{v} . D.h für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{\omega}$:

$$w_{\parallel} = \frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}}{|\mathbf{v}|}; \quad \boldsymbol{\omega}_{\perp} = \boldsymbol{\omega} - w_{\parallel} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Für Boosts in x -Richtung: $A_{\parallel} = A^1, \mathbf{A}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$

Elektrisches und magnetisches Feld

$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$ bzw. als Matrix

$$\begin{aligned} F' &= \Lambda F \Lambda^T = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & 0 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -\gamma(E^2 - \beta B^3) & -\gamma(E^3 + \beta B^2) \\ E^1 & 0 & -\gamma(B^3 - \beta E^2) & \gamma(B^2 + \beta E^3) \\ \gamma(E^2 - \beta B^3) & \gamma(B^3 - \beta E^2) & 0 & -B^1 \\ \gamma(E^3 + \beta B^2) & -\gamma(B^2 + \beta E^3) & B^1 & 0 \end{pmatrix} \\ \implies & \begin{matrix} E'_{\parallel} = E_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ B'_{\parallel} = B_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \end{matrix} \quad \left| \quad \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -B^3 \\ B^2 \end{pmatrix} \right. \end{aligned}$$

Man beachte, dass sich \mathbf{E} , \mathbf{B} *nicht* wie die räumlichen Komponenten eines Vierervektors transformieren. Vielmehr bleiben hier die \parallel -Komponenten unverändert. Gleichzeitig transformiert ein Boost \mathbf{E} und \mathbf{B} ineinander.

Eichtransformationen

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &\mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \\ \phi &\mapsto \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial\chi}{\partial t} \end{aligned} \right\} A^\mu \mapsto A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi \quad (7.46)$$

Da partielle Ableitungen vertauschen, bleiben $F^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}$ und damit die physikalischen Felder unverändert.

7.6 Punktmasse im Feld

Die *relativistische Verallgemeinerung des Newton'schen Gesetzes* ist:

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = m \frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad (7.47)$$

Zur Konstruktion der Viererkraft benutzen wir den *Lagrange-Formalismus*. Wir suchen dafür zunächst die Wirkung für ein kräftefreies Partikelchen:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dt \quad \begin{matrix} dt \\ d\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{matrix} \int_{\tau_1}^{\tau_2} L'(x^\mu, u^\mu) d\tau \quad (7.48)$$

Hierbei ist τ die Eigenzeit. Weiterhin muss S ein Lorentz-Skalar sein, da die Wirkung unabhängig vom jeweiligen Inertialsystem sein muss. Somit muss aber auch $L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ein Lorentz-Skalar sein.

Für ein freies Teilchen können wir diesen aus den Koordinaten x^μ und der Geschwindigkeit u^μ bilden. Aufgrund der Homogenität der Raumzeit können wir eine Abhängigkeit von x^μ jedoch ausschließen. Andererseits ist $u_\mu u^\mu = c^2$ konstant.

$$\implies L' = \alpha = \text{const.} \implies S = \alpha \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \alpha \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad \underset{\text{falls } \frac{|\mathbf{v}|}{c} \ll 1}{=} \int_{t_1}^{t_2} \left(\alpha - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c^2} v^2 + \dots \right) dt \quad (7.49)$$

Die Konstante α ist irrelevant für die Bewegungsgleichungen. Wir wählen sie $\alpha = mc^2$, so dass Kongruenz mit dem nichtrelativistischen Grenzfall $L = T_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ besteht.

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \quad (\text{Lagrange-Funktion des kräftefreien Massenpunktes})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} \stackrel{\dot{x}^i = v^i}{=} \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}}_{\text{räuml. Komp. Viererimpuls}} = 0 \quad (\text{Euler-Lagrange-Gleichung})$$

$$\implies \mathbf{v} = \text{const. und auch } \frac{d}{dt} p^0 = \frac{d}{dt} \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = 0$$

Wir haben als $\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0$ hergeleitet, allerdings mit Bezug auf nicht kovariante Größen wie t und \mathbf{v} . Für eine kovariante Herleitung variieren wir Weltlinien zwischen festen Raumpunktzeiten.

$$S = -mc^2 \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau = -mc \int_A^B ds \quad \text{mit} \quad ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$$

Variation des Wegelements:

$$\delta(ds) = \delta(\sqrt{dx_\mu dx^\mu}) = \frac{dx_\mu \delta(dx^\mu)}{\sqrt{dx_\mu dx^\mu}} = \frac{dx_\mu}{ds} d(\delta x^\mu) \stackrel{ds = c d\tau}{=} \frac{u_\mu}{c} d(\delta x^\mu)$$

$$\delta S = -mc \int_A^B \delta(ds) = -m \int_A^B u_\mu d(\delta x^\mu) = -m \int_{\tau_A}^{\tau_B} u_\mu \frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu) d\tau \stackrel{\text{P.I.}}{=} m \int_{\tau_A}^{\tau_B} \frac{dx_\mu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau \stackrel{!}{=} 0$$

Mit δx^μ beliebig $\implies m \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$ (Viererimpulserhaltung)

Durch die partielle Integration mit festen Randpunkten $\delta x_A^\mu = \delta x_B^\mu = 0$ verschwinden die Randterme. Zur Ankopplung ans elektromagnetische Feld müssen wir einen Skalar aus u_μ und A^μ formieren. Der einzige Term linear in diesen beiden ist $u_\mu A^\mu$.

Wir verfolgen den Ansatz:

$$S = \int_{\tau_A}^{\tau_B} (-mc^2 - \frac{q}{c} A_\mu(x) u^\mu) d\tau = \int_A^B (-mc ds - \frac{q}{c} A_\mu(x) dx^\mu)$$

Variation:

$$\delta S = \int_A^B (m u_\mu d(\delta x^\mu) - \frac{q}{c} (\delta A_\nu(x)) dx^\nu - \frac{q}{c} A_\mu(x) d\delta x^\mu) \stackrel{\text{P.I.}}{=} \int_A^B (m u_\mu d(\delta x^\mu) - \frac{q}{c} \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu dx^\nu + \frac{q}{c} \delta x^\mu \underbrace{\frac{dA_\mu}{dx^\nu}}_{= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}}(x)) =$$

$$= \int_{\tau_A}^{\tau_B} \left[m \frac{du_\mu}{d\tau} - \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} \right) \underbrace{u^\nu}_{\frac{du^\nu}{d\tau}} \right] \delta x^\mu d\tau \stackrel{!}{=} 0 \implies \frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} u_\nu \underbrace{\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right)}_{= F^{\mu\nu}}$$

Kovariante Newton'sche Bewegungsgleichung

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (7.50)$$

Räumliche Komponenten:

$$m \underbrace{\gamma \frac{d}{dt}}_{\substack{=u^i \\ d\tau = \frac{dt}{\gamma}}} (\underbrace{\gamma v^i}_{=u^i}) = \frac{q}{c} (u_0 F^{i0} + u_j F^{ij}) = \frac{q}{c} \gamma (cE^i - v^j F^{ij}) \quad \text{mit } F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B^k \Rightarrow v^j F^{ij} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad \text{mit } \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

zeitliche Komponenten:

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \gamma \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{q}{c} (u_0 F^{00} + u_j F^{0j}) = \frac{q}{c} \gamma (-v^j)(-E^j) \Rightarrow \frac{dE}{dt} = q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad \text{bzw. } dE = q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}$$

Anmerkung: $\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$ (Viererkraft) impliziert $u_\mu F^\mu = 0$, denn $u_\mu F^\mu = m u^\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} \underbrace{(u_\mu u^\mu)}_{=c^2 = \text{const.}} = 0$

Es sind also nur die drei Kraftkomponenten unabhängig. Im momentanen Ruhesystem ($u_\mu = (1, \mathbf{0})$) gilt $F^0 = 0$.

Die Maxwell-Gleichungen selbst können auch aus einem Wirkungsprinzip hergeleitet werden. Statt mit endlich vielen Freiheitsgraden für die Bahn treten dabei unendliche viele (Felder in jedem Punkt der Raumzeit) auf. Dies wird in Vorlesungen zur Quantenfeldtheorie eingehend behandelt.

7.7 Beschleunigte Punktladungen

Die mittels der retardierten Green'schen Funktion ausgedrückten Ergebnisse für die Eichpotentiale in Lorentz-Eichung zeitliche veränderlicher Ladungsverteilungen lassen sich nun zusammenfassen als:

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \iiint \int \frac{j^\mu(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) dt' d^3\mathbf{x}' \quad (7.51)$$

Punktteilchen mit Ladung e :

$$\begin{aligned} j^0(\mathbf{x}, t) &= ce\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \Rightarrow j^\mu = ec\beta^\mu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \\ \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}e\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \end{aligned}$$

mit $\beta^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}$ Beachte: weder β^μ noch $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r})$ sind ein Lorentz-Vektor bzw. Lorentz-Skalar. Jedoch ist deren Kombination j^μ ein Lorentz-Vektor.

$$A^\mu(\mathbf{x}, t) = e \int \beta^\mu(t') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c}\right) dt'$$

$$\frac{d}{dt'} \left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c} \right) = -1 + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')) \cdot \frac{d}{dt'} \mathbf{r}(t')}{c|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} = -1 + \hat{\mathbf{R}}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t) \quad \text{mit } \mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t); \hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}; R = |\mathbf{R}|$$

Lienard-Wichert Potentiale

$$A^\mu = \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{1}{R(t')} \beta^\mu(t') \Big|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \quad (7.52)$$

Zur Berechnung von \mathbf{E} - und \mathbf{B} -Feld gehen wir von der Integralform bezgl. dt' von A^μ aus und bilden den

Gradienten bzw. die Rotation. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}\nabla R &= \nabla |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)| = \frac{\nabla (\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{r}^2)}{2|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|} \stackrel{\substack{\partial_i x_j x_j = 2\delta_{ij} x_j = 2x_i \\ \partial_i x_j r_j = r_i}}{=} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|} \implies \nabla f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R} \hat{\mathbf{R}} \\ \partial_t R &= \partial_t |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)| = \frac{\partial_t (-2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{r}^2(t))}{2|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|} = -c\boldsymbol{\beta}(t) \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)}{2|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|} \implies \partial_t f(R) = -c \frac{\partial f(R)}{\partial R} \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \hat{\mathbf{R}} \\ \implies \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\nabla e \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|}{c}\right) dt' - \frac{1}{c} \partial_t e \int \boldsymbol{\beta}(t') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)|}{c}\right) dt' = \\ &= e \int \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right) + \frac{1}{R} \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}}{c} - \frac{\boldsymbol{\beta}(t)}{c} \right) \delta'\left(t - t' - \frac{R}{c}\right) \right) dt' \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \times e \int \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c}\right) dt' = \\ &= e \int \left(-\frac{\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}(t')}{R^2} \delta\left(t - t' - \frac{R}{c}\right) - \frac{\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}(t')}{Rc} \delta'\left(t - t' - \frac{R}{c}\right) \right) dt'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\implies \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}(t')}{R^2(t')} + \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{\hat{\mathbf{R}}(t') - \boldsymbol{\beta}(t')}{cR(t')} \right) \Bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}(t') \times \hat{\mathbf{R}}(t')}{R^2(t')} + \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{\boldsymbol{\beta}(t') \times \hat{\mathbf{R}}(t')}{cR(t')} \right) \Bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}} \\ d\mathbf{R} &= -c\boldsymbol{\beta}dt; \quad dR = |\mathbf{R} - c\boldsymbol{\beta}dt| - |\mathbf{R}| = -\frac{c}{R} \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}dt + \mathcal{O}(dt^2) \\ d\hat{\mathbf{R}} &= d\frac{\mathbf{R}}{R} = -\frac{c\boldsymbol{\beta}dt}{R} + \mathbf{R} \frac{c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}dt}{R^3} = \frac{c}{R} (\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}}))dt = \frac{c}{R} \hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta})dt \\ &\implies \frac{d\hat{\mathbf{R}}}{c dt'} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}}); \quad \frac{dR}{cdt'} = -\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\end{aligned}$$

Damit führen wir die Zeitableitungen durch, welche explizit auf $\hat{\mathbf{R}}$ wirken

$$\begin{aligned}\implies \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \left(\frac{\hat{\mathbf{R}}(t')}{R^2(t')} - \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{cR(t')} + \hat{\mathbf{R}} \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{1}{cR(t')} + \right. \\ &\left. \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{1}{R^2(t')} \underbrace{\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta})}_{=\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}} \right) = \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \left(\frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{\hat{\mathbf{R}}(t')}{R^2(t')} - \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R^2(t')} - \right. \\ &\left. \frac{d}{dt'} \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{cR(t')} + \hat{\mathbf{R}}(t') \frac{d}{dt'} \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{1}{R(t')} \right) \left(\text{wiederum } t' = t - \frac{R}{c} \right) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \left(-\hat{\mathbf{R}}(t') \times \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}(t')}{R^2(t')} - \hat{\mathbf{R}}(t') \times \frac{d}{dt} \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{cR(t')} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{R^2(t')} \underbrace{(\hat{\mathbf{R}}(t') \times (\hat{\mathbf{R}}(t') \times \boldsymbol{\beta}(t')) \times \boldsymbol{\beta}(t')) \times \boldsymbol{\beta}(t')}_{=\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})} \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \right) \\ &= \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \left(-\hat{\mathbf{R}}(t') \times \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{R^2(t')} - \hat{\mathbf{R}}(t') \times \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{\boldsymbol{\beta}(t')}{cR(t')} \right) = \hat{\mathbf{R}}(t') \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

Wir können als \mathbf{B} relativ leicht aus bekanntem \mathbf{E} bestimmen und rechnen mit \mathbf{E} weiter. Dazu benötigen wir folgende Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\boldsymbol{\beta}(t) &= \dot{\boldsymbol{\beta}} \\ \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t')} \frac{1}{R(t)} &= - \frac{\left(-\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{R}} - \frac{1}{R} \boldsymbol{\beta} \cdot \overbrace{(\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}))}^{=\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}} \right)}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 R^2} = \frac{\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{R}} R - \boldsymbol{\beta}^2 + \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 R^2} \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}} \left(\frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} - \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R^2} + (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^2}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 R^2} + (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \frac{\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{R}} R}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 R^2} - \frac{\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) R} \right) \\ &= \frac{e}{1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}} \left(\frac{(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 R^2} + (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^2}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 R^2} + (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \frac{\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R}}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 R} - \frac{\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 R} \right) \\ &= \underbrace{\frac{e}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R^2} (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})(1 - \boldsymbol{\beta}^2)}_{\text{Geschwindigkeitsfeld}} + \underbrace{\frac{e}{c(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R} \hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}_{\text{Beschleunigungsfeld}} \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist wieder für $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ auszuwerten. Wir haben auch benutzt, dass

$$\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] = (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})$$

Das Geschwindigkeitsfeld kann alternativ auch durch einen Boost des elektrostatischen Coulombfeldes bestimmt werden.

Das Beschleunigungsfeld führt zur Abstrahlung von Leistung. Wir betrachten dazu den Pointing-Vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}) = \frac{c}{4\pi} (\hat{\mathbf{R}} \mathbf{E}^2 - \underbrace{\mathbf{E}(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{R}})}_{=0}) = \frac{c}{4\pi} \hat{\mathbf{R}} \mathbf{E}^2 \\ \implies \frac{dP}{d\Omega} &= R^2 \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}} = \frac{c}{4\pi} R^2 \mathbf{E}^2 = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{(\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}])^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^6} \end{aligned}$$

Im relativistischen Grenzfall $|\boldsymbol{\beta}| \ll 1$ vereinfacht sich die Winkelabhängigkeit deutlich:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} (\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}])^2 = \frac{e^2}{4\pi c} \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \sin^2 \theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{\boldsymbol{v}}^2 \sin^2 \theta \quad (7.53)$$

mit θ dem Winkel zwischen der Beschleunigung und Strahlungsrichtung.

$$P = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{\boldsymbol{v}}^2 2\pi \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \frac{2e}{3c^3} \dot{\boldsymbol{v}}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \quad (7.54)$$

Anstatt ein kompliziertes Winkelintegral durchzuführen, wollen wir aus diesem Ausdruck auf die relativistische Verallgemeinerung schließen. Zur Verfügung stehen die Vierervektoren p_μ und $\frac{dp_\mu}{d\tau}$. Andere können nicht vor-

kommen, da in der relativistischen Form für $\frac{dp}{d\Omega}$ höchstens erste Zeitableitungen auftreten. Insgesamt sollte die

Antwort $\propto \frac{dp}{d\tau} \cdot \frac{dp}{d\tau}$ sein. Weiterhin ist $p^2 = m^2$ und $0 = \frac{d}{d\tau} p^2 = 2p_\mu \cdot \frac{dp^\mu}{d\tau}$, d.h. der Proportionalitätsfaktor kann nur konstant und nicht eine Funktion von p^{mu} oder Ableitungen davon sein.

$$\begin{aligned} P &= -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{dp}{d\tau} \cdot \frac{dp}{d\tau} \quad \text{mit} \quad \frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}; \quad p^\mu = m \begin{pmatrix} c\gamma \\ c\gamma\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}; \quad \frac{d}{dt} \gamma = -\frac{1}{2} \frac{(-2)\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)^{3/2}} = \gamma^3 \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta} \\ \implies \frac{dp^\mu}{dt} \gamma &= \gamma mc \begin{pmatrix} \gamma^3 \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta} \\ \gamma^3 (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} + \gamma \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} = \gamma^4 mc \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta} \\ (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} + (1 - \boldsymbol{\beta}^2) \dot{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} &= \gamma^8 m^2 c^2 \left((\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 (1 - \boldsymbol{\beta}^2) - 2(1 - \boldsymbol{\beta}^2)(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (1 - \boldsymbol{\beta}^2)^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \right) = -\gamma^8 m^2 c^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + \frac{1}{\gamma^2} (\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - \boldsymbol{\beta}^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2) \right) = \\ &= -\gamma^6 m^2 c^2 \left(-\boldsymbol{\beta}^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 + \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \right) \quad \text{mit} \quad (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \varepsilon_{ijk} \beta_j \dot{\beta}_k \varepsilon_{ilm} \beta_l \dot{\beta}_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \beta_j \beta_l \dot{\beta}_k \dot{\beta}_m = \boldsymbol{\beta}^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \end{aligned}$$

$$P = \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right] \quad (\text{Lienard 1898}) \quad (7.55)$$

Dieser Strahlungsverlust tritt z.B. in Form von Röntgenstrahlung bei in Materie gebremsten Elektronen auf. Außerdem ist der von wesentlicher Bedeutung für Teilchenbeschleuniger. Für eine bestimmte Beschleunigungskraft $\frac{dp^\mu}{d\tau}$ ist die Strahlungsleistung $\propto \frac{1}{m^2}$ - gewünschte sowie unerwünschte Effekte sind damit für Elektronen sehr viel größer als für Protonen.

Linearbeschleuniger

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\beta}} \parallel \boldsymbol{\beta} &\implies \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \gamma m c \boldsymbol{\beta} = m c \left(\gamma^3 (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} + \gamma \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \\ \implies \left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right|^2 &= m^2 c^2 \gamma^6 \left(\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \beta^4 + (1 - \beta^2)^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 + 2(1 - \beta^2) \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \beta^2 \right) = m^2 c^2 \gamma^6 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \end{aligned}$$

Wobei wir benutzen

$$\begin{aligned} p^{02} - \mathbf{p}^2 = m^2 &\implies d(p^{02} - \mathbf{p}^2) = 0 \implies 2p^0 \frac{dp^0}{dx} dx - 2\mathbf{p} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = 0 \\ \implies \frac{dE}{dx} = c \frac{dp^0}{dx} &= \frac{1}{\beta} \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \frac{1}{\beta} \frac{v}{c} \left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| = \left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| \end{aligned}$$

Relativer Strahlungsverlust:

$$\frac{P}{\frac{dE}{dt}} = \frac{2e^2}{2m^2 c^3} \frac{1}{v} \frac{dE}{dx} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{2}{3} \frac{e^2}{m c^2} \frac{dE}{dx} \quad (7.56)$$

Dabei ist $\frac{e^2}{m c^2} = 2,82 \cdot 10^{-13} \text{cm}$ und $m c^2 = 0,511 \cdot 10^6 \text{eV} \implies \frac{0,511 \cdot 10^6 \text{eV}}{2,82 \cdot 10^{-15} \text{m}} \approx 2 \cdot 10^{14} \frac{\text{MeV}}{\text{m}}$

Daran sehen wir die nötige Feldstärke für Strahlungsverluste von der Ordnung eins. Die größten technischen realisierbaren Felder sind von der Ordnung $10^2 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$, so dass die Verluste vernachlässigbar sind.

Kreisbeschleuniger

Die Teilchen befinden sich auf einer Kreisbahn, wobei die Energieänderung pro Umlauf klein sein soll.

$$\left| \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right| = \gamma \omega |\mathbf{p}| \gg \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}; \quad P = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \approx \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \omega^2 \mathbf{p}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{\rho^2} \beta^4 \gamma^4 \quad (7.57)$$

mit dem Bahnradius $\omega = \frac{c\beta}{\rho}$; $|\mathbf{p}| = m c \gamma \beta$.

\implies Energieverlust pro Umlauf:

$$\Delta E = \frac{2\pi}{\omega} P = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{\rho} \beta^3 \gamma^4 \quad (7.58)$$

Für Elektronen mit $\beta \approx 1$:

$$\Delta E[\text{GeV}] = 8,85 \cdot 10^{-8} \frac{(E[\text{GeV}])^4}{\rho[\text{km}]} \quad (7.59)$$

Der Beschleuniger LEP hatte $\rho \approx 4,3 \text{km}$ und $E \approx 100 \text{GeV}$, d.h. er kollidierte Elektronen und Positronen mit jeweils dieser Energie. Der Energieverlust pro Umlauf betrug etwa 2%. Das Verhalten $\propto E^4$ macht es problematisch mit Kreisbeschleunigern wesentlich höhere Elektronenenergien zu erreichen.

Winkelverteilung der Strahlung beschleunigter Ladungen

Nichtrelativistisch ergibt sich ein $\sin^2 \theta$ -Verhalten:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{\mathbf{v}}^2 \sin^2 \theta \quad (7.60)$$

z.B. oszillierende Ladung (reiner Dipol)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \cos \omega t; \quad \mathbf{p} = e \int \mathbf{x} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \cos \omega t) d^3 x &= e \mathbf{x}_0 \cos \omega t; \quad \dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{x}_0 \omega^2 \cos \omega t = -\frac{1}{e} \omega^2 \mathbf{p}(t) \\ \implies \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{\omega^4}{4\pi c^3} \mathbf{p}^2(t) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Dies stimmt nach zeitlicher Mittelung überein mit der Dipolstrahlung.

Im relativistischen Fall ist $|\boldsymbol{\beta}|$ nicht mehr klein. Wir benutzen die Beziehungen $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ und $\frac{dR}{cdt'} = -\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}$, um damit zu berechnen $\frac{dt}{dt'} = 1 + \frac{\dot{R}(t')}{c} 1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}$.

Für die Winkelverteilung der Abstrahlung ist es sinnvoll diese auf ein Intervall dt' anstatt von dt zu beziehen, so dass "mitbewegete" Beiträge ausgeschlossen werden. Damit erhalten wir

$$\frac{dP'}{d\Omega} := \frac{dP}{d\Omega} \frac{dt}{dt'} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{(\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}])^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{R}})^5} \quad (7.61)$$

Für $\dot{\boldsymbol{\beta}} \parallel \boldsymbol{\beta}$ wird dies zu

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (7.62)$$

Ist nun $\dot{\boldsymbol{\beta}} \perp \boldsymbol{\beta}$, ergibt sich eine kompliziertere Winkelabhängigkeit, der Nennerterm führt aber weiterhin zu einer Bevorzugung der Vorwärtsrichtung.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] = (\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}])^2 = \\ &= \dot{\boldsymbol{\beta}}^2(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - 2(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \hat{\mathbf{R}} + \underbrace{(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta})^2}_{=1-2\hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta}+\beta^2} (\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \dot{\boldsymbol{\beta}}^2(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 - (1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \\ &= \dot{\boldsymbol{\beta}}^2(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \implies \frac{dP'}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\gamma^2(1 - \beta \cos \theta)^2}\right) \end{aligned}$$

Für die Gesamtstrahlungsleistung bei Beschleunigung senkrecht zur Bahn gilt:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2(1 - \beta^2) = \frac{2e^2}{3c} \gamma^4 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 \right] \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} \gamma m \mathbf{v} = \gamma m \dot{\mathbf{v}} + \gamma^3 m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \gamma m \dot{\mathbf{v}} \implies P = \frac{2e^2}{3m^2 c^3} \gamma \left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right| \end{aligned}$$

Im Vergleich zur Strahlung bei der Linearbeschleunigung tritt hier im relativistischen Regime ein zusätzlicher Verstärkungsfaktor γ^2 auf.

Spektrum

Wir schreiben für die Leistung pro Winkелеlement

$$\frac{dP}{d\Omega} = |\mathbf{A}(t)|^2 \text{ mit } \mathbf{A}(t) = \sqrt{\frac{c}{4\pi}} R \mathbf{E} \quad (\text{vgl. } \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \hat{\mathbf{R}} \mathbf{E}^2 \longrightarrow \frac{dP}{d\Omega} = R^2 \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \quad (7.63)$$

Für die Energie:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(t)|^2 dt; \quad \mathbf{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \mathbf{A}(t) dt \iff \mathbf{A}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathbf{A}(\omega) \\ \frac{dW}{d\omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}^*(\omega') \cdot \mathbf{A}(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}^*(\omega') \cdot \mathbf{A}(\omega) 2\pi \delta(\omega - \omega') \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{A}(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}}_{\text{entsprechend Parseval-Plancherel}} = \int_0^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{mit } \frac{dI(\omega)}{d\omega} = |\mathbf{A}(\omega)|^2 + |\mathbf{A}(-\omega)|^2 \underset{\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^3}{=} |\mathbf{A}(\omega)|^2 \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $\frac{dt}{dt'} 1 + \frac{\dot{R}(t')}{c} = 1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}$ gilt. Mit dem elektrischen Beschleunigungsfeld folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\omega) &= \sqrt{\frac{e^2}{4\pi c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{e}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right]_{t'=t-R(t')/c} dt = \\ &= \sqrt{\frac{e^2}{4\pi c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'+R(t')/c)} \left[\frac{e}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right]_{t'} dt' \end{aligned}$$

Wir wählen die Koordinaten nun so, dass die Bahn des Teilchen in der Nähe des Koordinatenursprungs ist

$$R(t) = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)| \approx x - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}(t) \implies \mathbf{A}(\omega) = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi c}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t' - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}(t')/c)} \left[\frac{e}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right]_{t'} dt'$$

Dabei haben wir den Phasenfaktor $e^{i\omega x/c}$ fallen gelassen.

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}(t)/c)} \left[\frac{e}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right] \right|^2$$

Im großem Abstand zur Punktladung gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\hat{\mathbf{R}}}{dt'} \right| &= \frac{c}{R} \left| \hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}) \right| \ll |\dot{\boldsymbol{\beta}}| \implies \frac{d}{dt} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}} = \frac{\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta})(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) + \hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}) \hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} = \\ &= \frac{[\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}](1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) + [\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}](\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} = \frac{\hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}} + \dot{\boldsymbol{\beta}}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} = \\ &= \frac{\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \hat{\mathbf{R}} \times (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \end{aligned}$$

Der entsprechende Faktor im Integranden ist als eine totale Ableitung. Partielle Integration liefert dann (wiederum werden Beiträge $\propto \dot{\hat{\mathbf{R}}}$ vernachlässigt):

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}(t)/c)} \hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}) dt \right|^2 \quad (7.64)$$

Ein Detektor wird für ein ultrarelativistisches Teilchen einen Lichtpuls in Richtung von dessen Bewegung wahrnehmen. Während dieser kurzen Dauer können wir die Bewegung als Element einer Kreisbahn mit Radius ρ (\equiv lokaler Krümmungsradius der Bahn) und Frequenz $\omega_0 = \frac{c}{\rho}$ beschreiben. Außerdem können wir eine Näherung in kleinen Winkeln um die Bewegungsrichtung vornehmen. Wir führen dazu folgende Koordinaten ein: Die Bahn liege dabei in der $x - y$ -Ebene. Integrieren wir über ein hinreichend langes Bahnelement, können wir o.B.d.A. $\hat{\mathbf{R}}$ in die $x - z$ -Ebene legen. Der Wesentliche Anteil der Strahlung tritt für kleine Winkel θ zwischen Bahn und Beobachter auf. Für die Polarisation benutzen wir die Vektoren \mathbf{e}_{\parallel} (entlang der y -Achse in der Kreisbahnebene) und $\mathbf{e}_{\perp} = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{e}_{\parallel}$ (senkrecht zu \mathbf{e}_{\parallel} und $\hat{\mathbf{R}}$, also nahe der z -Achse für kleine θ).

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\beta} = \beta \begin{pmatrix} \cos \frac{vt}{\rho} \\ \sin \frac{vt}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_{\perp} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r}(t) = \rho \begin{pmatrix} \sin \frac{vt}{\rho} \\ \cos \frac{vt}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \theta \text{ ist in der Skizze negativ}$$

$$\hat{\mathbf{R}} \times (\hat{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\beta}) = \hat{\mathbf{R}}(\hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta} = \beta \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \frac{vt}{\rho} - \cos \frac{vt}{\rho} \\ -\sin \frac{vt}{\rho} \\ \sin \theta \cos \frac{vt}{\rho} \end{pmatrix} \stackrel{\cos \theta \approx 1; \sin^2 \theta \approx 0}{=} \beta \left[-\mathbf{e}_{\parallel} \sin \frac{vt}{\rho} + \mathbf{e}_{\perp} \sin \theta \cos \frac{vt}{\rho} \right] + o(\theta^2)$$

$$\omega \left(t - \frac{\rho}{c} \sin \frac{vt}{\rho} \cos \theta \right) = \omega \left(t - \frac{\rho}{c} \left(\frac{vt}{\rho} - \frac{v^3 t^3}{3! \rho^3} \right) \right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \approx \omega \left(t(1 - \beta) + \beta t \frac{\theta^2}{2} + \frac{v^3 t^3}{6c\rho^2} \right)$$

Wir benutzen noch $\beta \approx 1$ und schreiben

$$\frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1 - \beta^2}{2} = \frac{(1 - \beta)(1 + \beta)}{2} \approx 1 - \beta \implies \omega \left(t - \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{r}(t)}{c} \right) = \frac{\omega}{2} \left(\left(\frac{1}{\omega^2} + \theta^2 \right) t + \frac{c^3 t^3}{3\rho^2} \right)$$

Insgesamt zerlegen wir

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \left| -\mathbf{e}_{\parallel} A_{\parallel}(\omega) + \mathbf{e}_{\perp} A_{\perp}(\omega) \right|^2$$

Mit

$$A_{\parallel}(\omega) = \frac{c}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp\left(i\frac{\omega}{2} \left(\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)t + \frac{c^2 t^3}{3\rho^2}\right)\right) dt; \quad A_{\perp}(\omega) = \theta \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\frac{\omega}{2} \left(\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)t + \frac{c^2 t^3}{3\rho^2}\right)\right) dt$$

$$x = \frac{ct}{\rho} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2}} \Leftrightarrow t = \frac{\rho}{c} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2} x; \quad \xi = \frac{\omega\rho}{3c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{2} \left(\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)t + \frac{c^2 t^3}{3\rho^2}\right) = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\rho}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^{3/2} x + \frac{\rho}{c} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^{3/2} x^3\right) = \frac{3}{2}\xi x + \frac{1}{2}\xi x^2 = \frac{3}{2}\xi \left(x + \frac{1}{3}x^3\right)$$

$$A_{\parallel}(\omega) = \frac{\rho}{c} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(\frac{3}{2}i\xi \left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right) dx; \quad A_{\perp}(\omega) = \frac{\rho}{c} \theta \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{3}{2}i\xi \left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right) dx$$

Die Integrale ergeben sich aus dem symmetrischen Anteil der Integranden:

$$\int_0^{\infty} x \sin\left(\frac{3}{2}\xi \left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(\xi); \quad \int_0^{\infty} x \cos\left(\frac{3}{2}\xi \left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(\xi)$$

mit den modifizierten Bessel-Funktionen k .

$$\Rightarrow \frac{dI(\omega)}{d\Omega} = \frac{2e^2\omega^2\rho^2}{3\pi c^3} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^2 \left(\underbrace{K_{2/3}^2(\xi)}_{\parallel\text{-Anteil}} + \frac{\theta^2}{\gamma^2 + \theta^2} \underbrace{K_{1/3}^2(\xi)}_{\perp\text{-Anteil}} \right)$$

Die Winkelverteilung des Energiestroms ist

$$\int_0^{\infty} \frac{dI(\omega)}{d\Omega} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{7}{16} \frac{e^2}{\rho} \frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^{5/2}} \left(\underbrace{1 + \frac{5}{7}}_{\parallel\text{-Anteil}} \underbrace{\frac{\theta^2}{\gamma^2 + \theta^2}}_{\perp\text{-Anteil}} \right)$$

Führt man noch die Winkelintegration durch, dann zeigt sich, dass gegenüber senkrechten Polarisierungen die siebenfache Leistung in paralleler Polarisation abgestrahlt wird.

Für große x ist $K_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} (1 + \mathcal{O}(1/x))$, d.h. es treten keine wesentlichen Beiträge für $\xi \gg 1$ auf, oder

$\omega \gg \frac{3c}{\rho} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^{1/3} - 3/2$. Je härter die Strahlung, desto geringer der Winkel. Für $\theta = 0$ finden wir die kritische

Frequenz $\omega_c = \frac{3c}{\rho} \gamma^3$ oberhalb welcher das Spektrum für alle Winkel unterdrückt ist.

Wir entwickeln für kleine und große Frequenzen das Spektrum für $\theta = 0$:

$$\left. \frac{dI(\omega)}{d\omega} \right|_{\theta=0} \underset{\omega \ll \omega_c}{\approx} \frac{e^2}{c} \frac{2}{\pi} \Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega\rho}{c}\right)^{2/3}; \quad \left. \frac{dI(\omega)}{d\omega} \right|_{\theta=0} \underset{\omega \ll \omega_c}{\approx} 3 \frac{e^2}{c} \gamma^2 \frac{\omega}{\omega_c} e^{-2\omega/\omega_c} \quad (7.65)$$

Das Spektrum erhalten wir schließlich mit

$$I(\omega) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dI(\Omega)}{d\Omega} d\theta \quad (7.66)$$

Im Gegensatz zu der üblichen Parametrisierung der Kugeloberfläche ist hier $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Die Integrationsgrenzen können dabei nach $\pm\infty$ geschickt werden, da der Integrand schon für recht kleine $|\theta|$ sehr stark abfällt. Für $\omega \ll \omega_c$ kann das Spektrum also als breit und flach charakterisiert werden.