

## 7. Spezielle Relativitätstheorie

Die Newtonsche Bewegungsgleichung  $m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}$  ist invariant unter Galili-Transformationen  $\vec{x}' \mapsto \vec{x} + \vec{a} + \vec{v}' t$ . Darüber hinaus ist sie forminvariant oder kovariant unter Rotationen  $\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R \vec{x}$  mit einer orthogonalen Matrix  $R$ , da mit  $\vec{F}' = R \vec{F}$  die Gleichung  $m \ddot{\vec{x}'} = \vec{F}'$  (gleiche Form im rotierenden Koordinatensystem) folgt.

In der bisherigen Notation ist das Transformationsverhalten unter Boosts (Übergang zu einem anderen gleichförmig, d.h. beschleunigungsfrei, bewegten Koordinatensystem) nicht offensichtlich. Z.B. können wir eine bewegte Ladung im  $\vec{B}$ -Feld betrachten, welche dann eine Lorentzkraft erfährt. Im Ruhesystem des Teilchens sollte die Kraft weiter vorhanden sein, kann allerdings für verschwindende Geschwindigkeit nicht als Lorentzkraft aufgefasst werden. Offenbar gilt das  $\vec{B}$ -Feld im ein  $\vec{E}$ -Feld über. Es zeigt sich allerdings, dass forminvariante Gesetze nicht mit Galili-Transformationen vereinbar sind. Stattdessen müssen auch Längen und Zeitabstände kontrahiert bzw. verlängert werden. Diese sogenannten Lorentztransformationen wurden zuerst von Lorentz und dann von Poincaré im Jahr 1904 formuliert. Unabhängig davon erkannte Einstein 1905, dass sich die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom gleichförmigen Bewegungszustand des Beobachters und von der Quelle als einfachste Forderung nutzen lässt, um die Lorentztransformationen zu erhalten.

Anders als Lorentz und Poincaré ließ Einstein die im 19. Jahrhundert vorherrschende Vorstellung eines ruhenden Äthers als Träger der elektromagnetischen Wellen fallen. Alle gleichförmig bewegten Beobachter sind damit gleichberechtigt, und die Längenkontraktion sowie die Zeitdilatation sind relative Effekte zwischen den Bezugssystemen. Bei Lorentz und Poincaré existiert dagegen noch das bevorzugte Ruhsystem des Äthers — auch wenn Poincarés Vorhersagen sich mit Einsteins decken.

Eine Konsequenz der Maxwell-Gleichungen sind die Wellengleichungen im Vakuum  $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1\right) \psi(\vec{x}, t) = 0$  mit  $\psi$  einer beliebigen Komponente von  $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$ .

Wir betrachten nun eine Galileo-Transformation  
 $\vec{x} \mapsto \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v} t, \quad t \mapsto t' = t$   
 $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v} t$

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial t}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial t} = \delta_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \rightarrow \vec{\nabla}' = \vec{\nabla}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x_j}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} = -v_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$$

$$\checkmark \frac{\partial^2}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\partial}{\partial t'} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 1 \mapsto \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t'} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})^2 \right) - 1'$$

Unter Galilei-Transformationen ist die Wellengleichung also nicht forminvariant. Dies kann auch nicht durch eine lineare Transformation unter den  $\vec{E}, \vec{B}$  behoben werden,

da alle Komponenten dieselbe Wellengleichung erfüllen.

## 7.1 Spezielles Relativitätsprinzip, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und Lorentz-Transformationen

Die Spezielle Relativitätstheorie gilt in der Abwesenheit von Gravitation (oder wenn deren Effekt vernachlässigbar klein ist). Es gibt dann Bezugssysteme, in denen sich kräftefreie Körper gleichförmig und geradlinig bewegen. Diese heißen Inertialsysteme. Man beobachtet, daß alle Inertialsysteme gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegt sind (was den Fall verschwindender Relativgeschwindigkeit einschließen soll).

### Spezielles Relativitätsprinzip

Die physikalischen Vorgänge sind unabhängig vom Inertialsystem, in welchem sie beobachtet werden.

Würde man die Lichtgeschwindigkeit sich zur Geschwindigkeit der Strahlungsquelle addieren, wäre dies noch konsistent mit den Galili-Transformationen. Die Maxwell-Gleichungen sagen jedoch voraus, daß ebendies nicht der Fall ist, sondern daß sich das Licht mit der Geschwindigkeit  $c$ , unabhängig von der Quelle ausbreitet. Einstein und Poincaré erkannten unabhängig voneinander, daß dies das grundlegende Prinzip ist, dessen Anwendung zu den Lorentz-Transformationen (und damit zur Konsistenz der Maxwell-Gleichungen mit dem Speziellen

Relativitätsprinzip) führt:

### Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle.

Zusammen folgt aus diesen beiden Postulaten (Spezielles Relativitätsprinzip & Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) die Spezielle Relativitätstheorie.

Betrachte zwei Inertialsysteme  $IS$  und  $IS'$ , welche im raumzeitlichen Koordinatenursprung zusammenfallen, d.h.  $t'=0, \vec{x}'=0$  für  $t=0, \vec{x}=0$ . Von diesem Raumzeit-Ursprungspunkt werde ein Lichtpuls gesendet. In  $IS$  kommt dieser zur Zeit  $t$  im Punkt  $\vec{x}$  an, sofern gilt:

$$c^2 t^2 - \vec{x}^2 = 0$$

In  $IS'$  gilt:

$$c^2 t'^2 - \vec{x}'^2 = 0$$

$(t, \vec{x})$  und  $(t', \vec{x}')$  bezeichnen den gleichen Raumzeitpunkt in den verschiedenen Koordinatensystemen.

Olige Bedingung ist erfüllt, wenn für beliebige Punkte (also nicht nur entlang von Lichtstrahlen) gilt:

$$c^2 t^2 - \vec{x}^2 = c^2 t'^2 - \vec{x}'^2$$

wobei beide Seiten auch verschieden von Null sein können. [Tatsächlich folgt unter der Annahme von Homogenität und Isotropie des Raumes der allgemeinen

Fall zwingend aus der Bedingung für Lichtstrahlen, vgl.  
Borchers, Hegerfeldt, Comm. Math. Phys. 28, 256 (1972).]

Wir betrachten nun eine Bewegung entlang der  $z$ -Achse mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ . Ein linearer (wegen Homogenität) Zusammenhang zwischen den Koordinatensystemen ist dann von der Form

$$z' = a_1 z + a_2 t \quad x' = x$$

$$t' = b_1 t + b_2 z \quad y' = y$$

Mit  $a_{1,2}$  und  $b_{1,2}$  Funktionen von  $v$ .

Der Ursprung von  $IS'$  bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v$  im  $IS$ .  $\rightarrow z = vt \mapsto z' = 0$

$$\Leftrightarrow a_1 vt + a_2 t = 0 \Leftrightarrow a_2 = -va_1$$

$$c^2 t^2 - z^2 = c^2 t'^2 - z'^2 = c^2 (b_1^2 t^2 + b_2^2 z^2 + 2b_1 b_2 t z) \\ - a_1^2 z^2 - v^2 a_1^2 t^2 + 2a_1^2 v t z$$

$$\Rightarrow 2c^2 t = 2c^2 b_1^2 t + 2c^2 b_1 b_2 z - 2v^2 a_1^2 t + 2a_1^2 v t z \\ \xrightarrow{z=0} 2c^2 t = 2c^2 b_1^2 t - 2v a_1^2 t \\ \xrightarrow{t=0} 0 = 2c^2 b_1 b_2 z + 2a_1^2 v z$$

$$-2z = 2c^2 b_2^2 z + c^2 2b_1 b_2 t - 2a_1^2 z + 2a_1^2 v t \\ \xrightarrow{z=0} 0 = c^2 2b_1 b_2 t + 2a_1^2 v t \\ \xrightarrow{t=0} -2z = 2c^2 b_2^2 z - 2a_1^2 z$$

$$\Rightarrow a_1 = b_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad b_2 = -\frac{v}{c^2} a_1$$

Mit der Definition

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

folgt die Lorentz-Transformation

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} z \right), \quad z' = \gamma (z - vt), \quad x' = x, \quad y' = y$$

Bevor wir dieses Resultat im Tensorkalkül formulieren, diskutieren wir kurz die Lorentz-Kontraktion und die Zeitdilatationen.

### Lorentz-Kontraktionen

Ein Stab der Länge  $l_0$  (im seinem Ruheystem gemessen) befindet sich im Ruhem im IS' zwischen den Punkten  $\vec{0}$  und  $(\begin{smallmatrix} 0 \\ z'=l_0 \end{smallmatrix})$ . Die Länge  $l$  im IS wird gemessen, indem zu gleichen Zeiten der Anfangs- und der Endpunkt  $z_1$  und  $z_2$  festgestellt wird ( $\rightarrow l = z_2 - z_1$ ).

$$\rightarrow l_0 = z' - 0 = \gamma(z_2 - vt) - \gamma(z_1 - vt) = \gamma(z_2 - z_1) = \gamma l$$

$\rightarrow$  Der Stab wird um den Faktor  $\frac{1}{\gamma}$  verkürzt gemessen, nämlich mit der Länge  $l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_0$ .

### Zeitdilatation

Wir betrachten eine Uhr, welche im ihrem Ruheystem die Zeiteinheiten  $t_0$  misst. Diese Uhr befindet sich innerhalb von IS' im Ruhem am Ort  $\vec{x}' = 0$ . IS und IS' fallen wieder im Raumzeitursprung zusammen.

Der Punkt  $t' = t_0, \vec{x}' = 0$  in IS' entspricht  $t, \vec{x} = (\begin{smallmatrix} 0 \\ vt \end{smallmatrix})$  in IS, wobei  $t$  gegeben ist durch die Transformation

$$t' = t_0 = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} vt \right) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t \iff t = \gamma t_0$$

Die Zeit vergibt für den ruhenden Beobachter also schneller.

## 7.2 Kovariante Formulierung

Wir fassen den invarianten „Bestand“  $c^2 t^2 - \vec{x}^2$  als Resultat der Ausweitung einer Bilinearform (welche zwei Vektoren eine reelle Zahl zuordnet) auf. Dazu definieren wir den Viervektor

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu = 0, 1, 2, 3$$

Beachte, daß die räumlichen Koordinaten nur obere Indizes tragen. Wir wollen nun schreiben

$$S^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

In dem Lorentz-Tensor-Kalkül, welches wir nun entwideln, werden obere mit unteren Indizes gemäß der Einstein-Konvention kontrahiert, also hier:  $x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu \equiv \sum_{\mu, \nu=0}^3 x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$ . Das Resultat für  $g_{\mu\nu}$  ist der

Metrische Tensor
$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Wir definieren das Skalarprodukt

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Da  $x \cdot x$  beliebige Werte annehmen kann (nicht nur  $> 0$  sofern  $x \neq 0$ ) handelt es sich eigentlich um eine Pseudometrik. Bei so definierten pseudometrischen Raum

bezeichnen wir als Minkowski-Raum.

Für die Lorentz-Transformationen machen wir den Ansatz

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

und verlangen, dass  $x \cdot g = x' \cdot g'$  invariant ist.

$\Rightarrow$

$$x^\mu g_{\mu\nu} g^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\mu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\nu g^\nu \Rightarrow g_{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\nu$$

$$\Rightarrow g = \Lambda^T g \Lambda \text{ (als Matrixidentität)}$$

Nehmen wir an, die Relativbewegung erfolge in  $x^1$ -Richtung

$$\Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

was wir leicht verifizieren:

$$\begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ -\sinh \phi & -\cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi & 0 \\ 0 & -\cosh^2 \phi + \sinh^2 \phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Andererseits ist

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \gamma \beta x^1 \\ \gamma x^1 - \gamma \beta ct \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cosh \phi = \gamma \quad \tanh \phi = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \beta \\ \sinh \phi = \gamma \beta$$

Mit der Rapidität  $\phi$ .

Wir bemerken, daß  $\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$  der Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation ist. Aufgrund der Linearität der Transformation ist  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  konstant, so daß die Homogenität der Raumzeit unter den Lorentz-Transformationen manifest bleibt.

Kontravariante Vektoren transformieren beim Wechsel des Koordinatensystems mit dieser Jacobi-Matrix:

$$V^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} V^{\nu}$$

Diese Vektoren tragen einen oberen Index, z.B.  $x^{\mu}$ . Ein anderes wichtiges Beispiel ist die

Viergeschwindigkeit  $u^{\mu}$

Dazu betrachten wir eine Bahnkurve  $x^{\mu}(\lambda)$ . Im momentanen Rahegsystem vergleicht das Zeitintervall

$$\begin{aligned} dx \cdot dx &= c^2 d\tau^2 = \frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{dx}{d\lambda} d\lambda^2 = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{dx}{d\tau} \left( \frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 d\lambda^2 \\ &= \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{dx}{d\tau} d\tau^2 \end{aligned}$$

Eine mitbewegte Uhr zeigt damit an:

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{c} \int \sqrt{dx \cdot dx} = \frac{1}{c} \int d\lambda \sqrt{\frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{dx}{d\lambda}} \quad (\text{Eigenzeit})$$

Wir definieren

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \Rightarrow u \cdot u = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{dx}{d\tau} = c^2$$

$$\text{Mit } \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \Rightarrow$$

$$u^{\mu} = \begin{pmatrix} u^0 \\ \vec{u} \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dt}{d\tau} \vec{v}$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{c dt}{d\tau}$$

$$u^2 = c^2 = (u^0)^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) = (u^0)^2 \frac{1}{\gamma^2} \iff u^0 = \gamma c, \vec{u} = \gamma \vec{v}$$

Dies führt zur Definition eines weiteren kontravarianten Vektors:

### Viererimpuls

$$p^m = m u^m = \begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} \Rightarrow p \cdot p \equiv p^2 = m^2 c^2$$

$$\vec{p} = m \vec{v} \gamma = m \vec{v} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{v}|^3}{c^3}\right)$$

$$p^0 = mc\gamma = \frac{1}{c} \left[ mc^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{v}|^4}{c^4}\right) \right]$$

$c p^0$  ist die Energie, wobei es der Beitrag  $mc^2$  als Ruheenergie und der Rest als kinetische Energie identifiziert werden kann.

Eingehender wird dies gerechtfertigt, wenn wir die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld betrachten.

### Kovariante Vektoren

Diese Vektoren tragen einen unteren Index:

$$V_m = g_{\mu\nu} V^\nu$$

Die inverse Matrix zu  $g_{\mu\nu}$  hat die gleiche Form wie  $g_{\mu\nu}$  und wird mit  $g^{\mu\nu}$  bezeichnet:  $g^{\mu e} g_{ev} = \delta^e_v$ .

$$\rightarrow V^m = g^{\mu\nu} V_\nu \quad (\text{"Heben" und "Senken" von Indizes})$$

Kovariante Vektoren transformieren wie folgt:

$$V'_m = g_{\mu e} V'^e = g_{\mu e} \Lambda^e_{\nu} V^\nu = \underbrace{g_{\mu e} \Lambda^e_{\nu}}_{= \Lambda_m^{\nu \omega}} g^{\nu \omega} V_\omega = V_\omega (\Lambda^{-1})^\omega_m$$

Dabei identifizieren wir die inverse Lorentz-Transformation

$$\Lambda_m{}^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_m = [(\Lambda^{-1})^\nu]_\mu{}^\nu$$

Dies ist gerechtfertigt, wegen

$$V_m W^m = V'_m W'^m = V_e (\Lambda^{-1})^e{}_m \Lambda^m{}_\nu W^\nu = V_e \delta_e^\nu W^\nu = V_e W^\nu$$

→ Transformationsverhalten:

$$V'_m = \Lambda_m{}^\nu V_\nu = [(\Lambda^{-1})^T]_m{}^\nu V_\nu$$

Die Ableitung nach einem kovarianten Vektor ist kontravariant:

$$\frac{\partial}{\partial x'_m} = \frac{\partial x_e}{\partial x'_m} \frac{\partial}{\partial x_e} = \Lambda^e{}_m \frac{\partial}{\partial x_e}$$

$$x'_m = x_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_m \Leftrightarrow x'_m \Lambda^m{}_e = x_e$$

Umgekehrtes gilt für kontravariante Vektoren, so daß wir kurz schreiben:

$$\partial^m = \frac{\partial}{\partial x_m} \quad \text{und} \quad \partial_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$$

Tensoren höherer Stufe sind dann ebenso durch ihr Transformationsverhalten charakterisiert:

$$T'^{m_1 \dots m_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}$$

$$= \Lambda^{m_1}{}_{q_1} \dots \Lambda^{m_n}{}_{q_m} (\Lambda^{-1})^{\beta_1}{}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\beta_m}{}_{\nu_m} T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}{}_{\beta_1 \dots \beta_m}$$

### 7.3 Lorentzgruppe

Offenbar erfüllen auch Boosts im x- und y-Richtung die Gleichung  $g = \Lambda^T g \Lambda$  und erhalten so das Skalarprodukt.

Gleiches gilt für Drehungen  $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$  mit R einer  $3 \times 3$  Matrix und  $R^T R = \underline{11}$ . Erfüllen  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  die Gleichung, dann gilt das auch für deren Verknüpfung  $\Lambda'' = \Lambda' \Lambda$ :  
 $\Lambda''^T g \Lambda'' = \Lambda^T \Lambda''^T g \Lambda' \Lambda = \Lambda^T g \Lambda = g$ .

Wir bezeichnen alle Transformationen, welche  $g = L^T g \cdot l$  erfüllen, als Lorentztransformationen (also sowohl Boosts, Drehungen als auch Kombinationen aus diesen).

Die Gruppenaxiome sind erfüllt:

- \*  $l, l'$  sind Lorentztransformationen  
 $\Rightarrow l' \cdot l$  ist Lorentztransformation (oben gezeigt)
- \*  $\mathbb{1}_4$  ist eine Lorentztransformation (neutrales Element)
- \*  $\exists$  Inverses:  $L^{-1}{}^\mu{}_v = L_v{}^\mu = L^T{}^\mu{}_v$

Die Lorentztransformationen werden durch 6 Parameter beschrieben (drei Boost und drei Drehungen). Fügt man als Verallgemeinerung Translationen hinzu,

$$x'^\mu = L^\mu{}_v x^v + a^\mu \quad \hookrightarrow \text{Translation}$$

dann erhält man die zehnparametrische Poincaré-Gruppe.

Die Lorentzgruppe zerfällt in vier Komponenten, die nicht kontinuierlich zusammenhängen, sondern über Raumspiegelung (Parität) und Zeitumkehr verknüpft sind.

eigentliche  
orthochrone LT  
(kontinuierlich mit  
der Identität verknüpft)  
 $\det L = +1$   
 $L_0^0 \geq 1$

Raumspiegelung

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

LT mit  
 $\det L = -1$   
 $L_0^0 \geq 1$

Zeitumkehr

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

LT mit  
 $\det L = -1$   
 $L_0^0 \leq -1$

P

LT mit  $\det L = +1$   
 $L_0^0 \leq -1$

$$(\Lambda^T g \Lambda = g \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1)$$

## 7.4 Relativistische Stöße

Es gilt Vierimpulserhaltung / Energieimpulserhaltung:

$$\underbrace{P_1 + P_2 + \dots + P_m}_{\text{vor dem Stoß}} = \underbrace{P'_1 + P'_2 + \dots + P'_m}_{\text{nach dem Stoß}}$$

Bei einem elastischen Stoß behalten die beteiligten Objekte ihre Identität (charakterisiert durch Ruhemasse, elektrische und andere Ladungen).

### Elastischer Zweikörperstoß

Schwerpunktssystem (CMS):

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2$$

$$\vec{P}'_1 \quad \vec{P}'_2 \quad \text{nach dem Stoß}$$

$$\vec{P}_1 \quad \vec{P}_2 \quad \text{vor dem Stoß}$$

Die Vektoren liegen in einer Ebene, und der Vorgang hängt nur vom Winkel  $\vartheta$  ab. Wähle O.B.d.A.  $x-z$  Ebene mit  $\vec{P}_1 \parallel \hat{e}_z$ :

$$P_1^m = \begin{pmatrix} E_1 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad P_2^m = \begin{pmatrix} E_2 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ -p_2 \end{pmatrix}, \quad E_{112} = \sqrt{m_{112}^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (1)$$

Nach dem Stoß (nutze Vierimpulserhaltung aus):

$$P_1'^m = \begin{pmatrix} E'_1 \\ c \\ p' \sin \vartheta \\ 0 \\ p' \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad P_2'^m = \begin{pmatrix} E'_2 \\ c \\ -p' \sin \vartheta \\ 0 \\ -p' \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad E'_{112} = \sqrt{m_{112}^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (2)$$

Energierhaltung (Nullkomponenten der Vierimpulse)  $\Rightarrow$

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \quad (3)$$

$$(1) \text{ mit } (2) \Rightarrow E_1^2 - E_2^2 = (m_1^2 - m_2^2)c^4 = E'^2_1 - E'^2_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (3) \& \text{ & } (4) \Rightarrow (E_1 - E_2)(E_1 + E_2) = (E'_1 - E'_2)(E'_1 + E'_2) \\ \Rightarrow E_1 - E_2 &= E'_1 - E'_2 \xrightarrow{\text{mit (3)}} E_1 = E'_1, E_2 = E'_2, p = p' \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  im CMS bleibt beim Elastischen Stoß die Energie (und damit der Betrag des Bremsimpuls) der einzelnen Objekte erhalten.

Die Größen im Laborsystem erhält man durch Lorentz-Transformationen.

### Inelastische Stöße

Es findet eine Umwandlung der stochernden Objekte statt: einzelne Rahmenassen und die Gesamtzahl der Teilchen können sich vor und nach dem Stoß voneinander unterscheiden.

Beispiel: Erzeugung schwerer Teilchen

Ein Teilchen der Masse  $m$  und Energie  $E$  stoße auf ein ruhendes Teilchen gleicher Masse, wobei beide sich vernichten und ein neues Teilchen mit Masse  $M$  produzieren. Wie groß ist  $M$ ?

$$\text{Impulserhaltung: } \vec{p}' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1 \quad (\vec{p}_2 = \vec{0})$$

$$\text{Energieerhaltung: } p'^0 = \frac{1}{c} \sqrt{M^2 c^4 + \vec{p}'^2 c^2} = p_1^0 + p_2^0 = \frac{1}{c} (E + mc^2)$$

$$\text{mit } E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}_1^2 c^2} \Leftrightarrow \vec{p}'^2 = \vec{p}_1^2 = \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{M^2 c^4 + \vec{E}^2 - m^2 c^4} = E + mc^2$$

$$\Leftrightarrow M^2 c^4 = 2m^2 c^4 + 2E mc^2 \Leftrightarrow$$

$$M = m \sqrt{2 \left( 1 + \frac{E}{mc^2} \right)} \xrightarrow[E \gg mc^2]{\text{relativistisch}} \frac{\sqrt{2mE}}{c}$$

$\rightarrow$  Masse der produzierbaren Teilchen  $\propto \sqrt{E}$ .

Stattdessen: Lasse nun die Teilchen mit gleicher Energie  $\frac{E}{2}$  kollidieren.  $\Rightarrow \vec{P}' = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$

$$\underbrace{p'^2}_{\text{zu}} = M^2 c^2 = (\underbrace{\vec{P}_1 + \vec{P}_2}_{0})^2 = \frac{1}{c^2} E^2 \Rightarrow M = \frac{E}{c^2}$$

$$\rightarrow \text{Vierimpulse: } p' = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c} E \\ \vec{P}_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c} E \\ -\vec{P}_1 \end{pmatrix}$$

Die maximale Masse der produzierbaren Teilchen wächst nun proportional zu  $E$ . Günstiger, da der Endzustand keine kinetische Energie trägt.

## 7.5 Kovariante Maxwellgleichungen

### Vierstrom

Betrachte Ladungsmenge  $dq$  (Lorentz-Skalar) im einem kleinen Volumenelement  $dV$  unter Lorentz-Transformation:

$$dq = e dV = dq' = e' dV'$$

$\rightarrow$  Da wegen Längenkontraktion i.A.  $dV \neq dV'$  ist, gilt auch  $e \neq e'$ .  $\rightarrow e$  ist kein Lorentz-Skalar.

Angenommen das Ladungselement bewegt sich entlang  $\vec{x}(t)$ . Dann gilt:

$$\underbrace{dq}_{dx^\mu} dx^\mu = e dV dx^\mu = e dV dt \frac{dx^\mu}{dt}$$

Viervektor

$dV dt = \frac{1}{c} d^4x$  ist ein Lorentz-Skalar, da  
 $d^4x' = |\det L| d^4x = d^4x$

$\Rightarrow$  Die Vierstromdichte

$$j^\mu = e \frac{dx^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} ce \\ e\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ce \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad \text{ist ein Viervektor}$$

Ladungserhaltung:

$$\int_V d^3x \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{d}{dt} \int_V d^3x e = - \int_V d\vec{a} e \vec{v} = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot (e \vec{v})$$

$\uparrow$   
V zeitunabh.  
hängig

$\uparrow$   
Gauß'scher  
Satz

$$\text{mit } V \text{ beliebig} \Rightarrow \frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (e \vec{v}) = \frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

Aus dem Coulomb-Gesetz hatten wir das Gauß'sche Gesetz hergeleitet:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi e \text{ bzw. } \vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi e$$

Diese Gleichungen sind nicht kovariant, da  $e$  kein Lorentz-Skalar ist, sondern Nullkomponente eines Vierervektors, nämlich  $\frac{1}{c} j^\mu(\vec{x}, t)$ .

Entsprechend machen wir den Ansatz,  $\phi$  zu einem Vierervektor zu ergänzen:  $\phi \rightarrow A^\mu = (\phi, \vec{A})$

Das Gauß'sche Gesetz wird damit ergänzt zu

$$\vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi c \rightarrow D^\mu_\nu A^\nu = -\frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Zu bestimmen:  $D$  als ein Ableitungsoperator und Tensor 2. Stufe (damit Gleichung forminvariant ist).

Allgemeiner Ansatz:

$$D^\mu_\nu = a(\partial^2) \delta^\mu_\nu \partial^2 + b(\partial^2) \partial^\mu \partial_\nu$$

mit Polynomen  $a, b$ .

→

$$0 = -\frac{4\pi}{c} \partial_\mu j^\mu = \partial_\mu D^\mu_\nu A^\nu = a(\partial^2) \partial^2 \partial_\nu A^\nu + b(\partial^2) \partial^2 \partial_\nu A^\nu$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \text{Kontinuitäts-} \\ \text{gleichung} \end{matrix} \Rightarrow a(\partial^2) = -b(\partial^2)$$

Für statische Ladungsverteilungen ( $\vec{A} = 0, \vec{j} = 0, \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$ ) muß sich wieder das Gauß'sche Gesetz ergeben:

$$\begin{aligned} -4\pi c = D^0_0 \phi &= \left[ a(-\vec{\nabla}^2) (-\vec{\nabla}^2) - a(-\vec{\nabla}^2) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi \\ &= a(-\vec{\nabla}^2) (-\vec{\nabla}^2) \phi \Rightarrow a(x) = -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D^\mu_\nu = -\delta^\mu_\nu \partial^2 + \partial^\mu \partial_\nu$$

$$\Rightarrow \partial^2 A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\text{Definition: } F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Elektromagnetischer

Feldstärkensor

(antisymmetrischer Tensor  
2. Stufe)

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

Dualer Feldstärkensor

↪ total antisymmetrisch,  $\epsilon^{0123} = 1$

Allgemein ist  $\stackrel{\uparrow}{S^{\alpha\beta}} \stackrel{\uparrow}{A_{\alpha\beta}} = 0 \rightarrow$   
 symm. antisymm.

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0$$

↑  
antisymm. in allen  
μν

↑  
symm. in μα

↑  
symm. in αβ

Insgesamt

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0$$

Manifest kovariante Form  
der Maxwell-Gleichungen

Prüfe nach, daß dies tatsächlich die Maxwell-Gleichungen liefert. Identifizierte dazu die Komponenten von  $F^{\mu\nu}$ :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gehört vor aus  $F^{\mu\nu}$  mit  
 $\vec{E} \mapsto \vec{B}$   
 $\vec{B} \mapsto -\vec{E}$

Beachte:  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind keine Lorentz-Vektoren sondern Komponenten von  $F^{\mu\nu}$ .

Die Maxwell-Gleichungen erhalten wir aus den 0 und i Komponenten der kovarianten Gleichungen:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \Rightarrow \begin{array}{l} \mu=0: \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi G \\ \mu=i: \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{array}$$

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \mu=0: \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \mu=i: \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{array} .$$

### Transformation der elektromagnetischen Felder unter Lorentz-Boosts

IS' bewege sich mit  $\vec{v}$  relativ zu IS

$$-L = (-L^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta^i & & \\ -\gamma \beta^i & \delta^{ij} + (\gamma - 1) \frac{v^i v^j}{v^2} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \left( \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \right)$$

$\vec{v} = v \vec{e}_1$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma & 0 & 0 \\ -\beta \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Vieropotential

$$A'^\mu = -L^{\mu\nu} A^\nu \Rightarrow \begin{array}{l} \phi' = \gamma(\phi - \beta A_{||}) \\ A'_{||} = \gamma(A_{||} - \beta \phi) \\ \vec{A}_{\perp} = \vec{A}_{\perp} \end{array}$$

||, ⊥ bezeichnen die Komponenten parallel und senkrecht zu  $\vec{v}$ . D.h. für einen beliebigen Vektor  $\vec{w}$ :

$$w_{||} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|}, \quad \vec{w}_{\perp} = \vec{w} - w_{||} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

für Boost in x-Richtung:  $A_{||} = A^1, \quad \vec{A}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$

## Elektrisches und magnetisches Feld

$$F^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \text{ bzw. als Matrix}$$

$$F' = \Lambda F \Lambda^T = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & 0 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -\gamma(E^2 - \beta B^3) & -\gamma(E^3 + \beta B^2) \\ E^1 & 0 & -\gamma(B^3 - \beta E^2) & \gamma(\beta^2 + \beta E^3) \\ \gamma(E^2 - \beta B^3) & \gamma(B^3 - \beta E^2) & 0 & -B^1 \\ \gamma(E^3 + \beta B^2) & -\gamma(B^2 + \beta E^3) & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E'_\parallel = E_\parallel \quad \vec{E}'_\parallel = \gamma(\vec{E}_\perp + \vec{\beta} \times \vec{B}) \\ B'_\parallel = B_\parallel \quad \vec{B}'_\perp = \gamma(\vec{B}_\perp - \vec{\beta} \times \vec{E}) \quad | \quad \vec{\beta} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass sich  $\vec{E}, \vec{B}$  nicht wie die räumlichen Komponenten eines Vierervektors transformieren. Vielmehr bleiben hier die  $\parallel$ -Komponenten unverändert. Gleichzeitig transformiert ein Boost  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ineinander.

## Eichtransformationen

$$\left. \begin{array}{l} \vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\sigma} X \\ \phi \mapsto \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial X}{\partial t} \end{array} \right\} A^\mu \mapsto A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu X$$

Da partielle Ableitungen vertauschen, bleiben  $F^{\mu\nu}$  und  $F'^{\mu\nu}$  und damit die physikalischen Felder unverändert.

## 7.6 Punktmasse im Feld

Relativistische Verallgemeinerung des Newtonschen Gesetzes

$$m \frac{da^{\mu}}{dt} = m \frac{dP^{\mu}}{dt} = F^{\mu}$$

Zur Konstruktion der Viererkraft benutzen wir den Lagrange-Formalismus. Wir suchen dafür zunächst die Wirkung für ein kräftefreies Punktteilchen:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{F}, \vec{v}, t) = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} d\tilde{t} L(x^{\mu}, u^{\mu})$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

must ein Lorentz- Skalar sein, d.h.  
unabhängig vom IS

$\frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}$  Eigenzeit  
(Skalar)

$$\Rightarrow L = \frac{L}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} \text{ muss ein Lorentz-Skalar sein.}$$

Für ein freies Teilchen können wir diesen aus den Koordinaten  $x^{\mu}$  und der Geschwindigkeit  $u^{\mu}$  bilden. Aufgrund der Homogenität der Raumzeit können wir eine Abhängigkeit von  $x^{\mu}$  jedoch ausschließen. Andererseits ist  $u_{\mu} u^{\mu} = c^2$  konstant.

$$\Rightarrow L = \alpha = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &= \alpha \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} d\tilde{t} = \alpha (t_2 - \tilde{t}_1) = \alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \alpha - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c^2} \vec{v}^2 + \dots \right) \\ &\uparrow \quad \text{falls } \frac{|\vec{v}|}{c} \ll 1 \end{aligned}$$

Die Konstante  $\alpha$  ist irrelevant für die Bewegungsgleichungen. Wir wählen sie  $\alpha=mc^2$ , so dass Kongruenz mit dem nichtrelativistischen Grenzfall  $L = \overline{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$  besteht.

$$\Rightarrow L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

Lagrange-Funktion des kräftefreien  
Massenpunktes

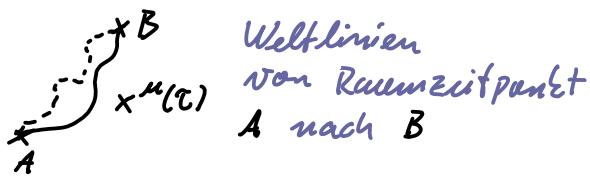
Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}}_{\substack{\text{räumliche Komponente} \\ \text{des Viererimpulses}}} = 0$$

räumliche Komponente  
des Viererimpulses

$$\Rightarrow \vec{v} = \text{const.} \quad \text{und auch} \quad \frac{d}{dt} p^0 = \frac{d}{dt} \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} = 0$$

Wir haben also  $\frac{dp^u}{dt} = 0$  hergeleitet, allerdings mit Bezug auf nicht kovariante Größen wie  $t$  und  $\vec{v}$ .



Für eine kovariante Herleitung variieren wir Weltlinien zwischen festen Raumzeitpunkten:

$$S = -mc^2 \int_{\tau_A}^{\tau_B} dt = -mc \int_A^B ds \quad \text{mit} \quad ds = \sqrt{dx_u dx^u}$$

Variation des Wegelements:

$$\delta(S) = \delta(\sqrt{dx_u dx^u}) = \frac{dx_u \delta(dx^u)}{\sqrt{dx_u dx^u}} = \frac{dx_u}{ds} d(\delta x^u) = \frac{u_u}{c} d(\delta x^u)$$

$$\delta S = -mc \int_A^B \delta(ds) = -m \int_A^B u_u d(\delta x^u) = -m \int_{\tau_A}^{\tau_B} dt u_u \frac{d}{dt} (\delta x^u)$$

$$\uparrow \int_{\tilde{\tau}_A}^{\tilde{\tau}_B} d\tilde{\tau} \frac{du_\mu}{d\tilde{\tau}} \delta x^\mu \stackrel{!}{=} 0$$

Partielle Integration

$$\text{feste Randpunkte: } \delta x_A^\mu = \delta x_B^\mu = 0$$

$\rightarrow$  Randterme verschwinden

$$\delta x^\mu \text{ beliebig} \Rightarrow m \frac{du_\mu}{d\tilde{\tau}} = \frac{dp_\mu}{d\tilde{\tau}} = 0 \quad \text{Vierimpulserhaltung}$$

Zur Ankopplung ans elektromagnetische Feld müssen wir einen Skalar aus  $u_\mu$  und  $A^\mu$  formieren. Der einzige Term linear in diesen beiden ist  $u_\mu A^\mu$

$\rightarrow$  Ansatz

$$S = \int_{\tilde{\tau}_A}^{\tilde{\tau}_B} d\tilde{\tau} \left( -mc^2 - \frac{q}{c} A_\mu(x) u^\mu \right) = \int_A^B \left( -mc ds - \frac{q}{c} A_\mu(x) dx^\mu \right)$$

Variation

$$\delta S = \int_A^B \left( m u_\mu d(\delta x^\mu) - \frac{q}{c} (\delta A_\nu(x)) dx^\nu - \frac{q}{c} A_\mu(x) d\delta x^\mu \right)$$

↓ partielle  
Integration

$$= \int_A^B \left( m u_\mu d(\delta x^\mu) - \frac{q}{c} \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu dx^\nu + \frac{q}{c} \delta x^\mu dA_\mu(x) \right)$$

$$dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

$$= \int_{\tilde{\tau}_A}^{\tilde{\tau}_B} d\tilde{\tau} \left[ m \frac{du_\mu}{d\tilde{\tau}} - \frac{q}{c} \left( \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} \right) u^\nu \right] \delta x^\mu \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \frac{dx^\nu}{d\tilde{\tau}}$$

$$\Rightarrow \frac{dp^\mu}{d\tilde{\tau}} = m \frac{du^\mu}{d\tilde{\tau}} = \frac{q}{c} u_\nu \left( \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \right)$$

$$= F^{\mu\nu}$$

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

räumliche Komponenten:

$$m \gamma \frac{d}{dt} (\cancel{\gamma} v^i) = \frac{q}{c} (u_0 F^{i0} + u_j F^{ij}) = \frac{q}{c} \gamma (c E^i - v^j F^{ij})$$

$$\cancel{d\gamma} = \frac{dt}{\gamma} \quad = u^i$$

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \Rightarrow v^j F^{ij} = -(\vec{v} \times \vec{B}).$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = q (\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{mit } \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

zeitliche Komponente:

$$\frac{dp^0}{dt} = \gamma \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{q}{c} (u_0 F^{00} + u_j F^{0j}) = \frac{q}{c} \gamma (-v^j) (-E^j)$$

$$\rightarrow \frac{dE}{dt} = q \vec{v} \cdot \vec{E} \quad \text{bzw. } dE = q \vec{E} \cdot d\vec{x}$$

Anmerkung:  $\frac{dp^\mu}{dt} = F^\mu$  (Viererkraft) impliziert  $u_\mu F^\mu = 0$ ,  
 denn  $u_\mu F^\mu = m u^\mu \frac{du^\mu}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\underbrace{u_\mu u^\mu}_{=c^2=\text{const.}}) = 0$

Es sind also nur drei Kraftkomponenten unabhängig, bei  
 momentanem Ruhesystem ( $u_\mu = (1, \vec{0})$ ) gilt  $F^0 = 0$ .

Die Maxwellgleichungen selbst können auch aus einem  
 Wirkungsprinzip hergeleitet werden. Statt mit endlich vielen  
 Freiheitsgraden für die Bahn treten dabei unendlich viele  
 (Felder in jedem Punkt der Raumzeit) auf. Dies wird  
 üblicherweise in Vorlesungen zur Quantenfeldtheorie eingehend  
 behandelt.

## 7.7 Beschleunigte Punktladungen

Die mittels der retardierten Green'schen Funktion ausgedrückten Ergebnisse für die Eichpotentiale in Lorenz-Eichung zeitlich veränderlicher Ladungsverteilungen lassen sich nun zusammenfassen als:

$$A^\mu(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \int dt' \frac{j^\mu(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})$$

Punktheilchen mit Ladung  $e$ :

$$\begin{aligned} j^0(\vec{x}, t) &= c e \delta^3(\vec{x} - \vec{\tau}(t)) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &= \vec{v} e \delta^3(\vec{x} - \vec{\tau}(t)) \end{aligned} \rightarrow j^\mu = e c \beta^\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{\tau}(t))$$

mit  $\beta^\mu = \left( \frac{1}{\gamma} \right)$ .

Beachte: weder  $\beta^\mu$  noch  $\delta^3(\vec{x} - \vec{\tau})$  sind ein Lorentz-Vektor bzw. Lorentz-Skalar. jedoch ist deren Kombination  $j^\mu$  ein Lorentz-Vektor.

→

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{x}, t) &= e \int dt' \beta^\mu(t') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\tau}(t')|} \delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{\tau}(t')|}{c}) \\ \frac{d}{dt'} (t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{\tau}(t')|}{c}) &= -1 + \frac{(\vec{x} - \vec{\tau}(t')) \cdot \frac{d}{dt'} \vec{\tau}(t')}{c |\vec{x} - \vec{\tau}(t')|} \\ &= -1 + \vec{R}(t) \cdot \vec{\beta}(t) \end{aligned}$$

mit  $\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{\tau}(t)$ ,  $\vec{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ ,  $R = |\vec{R}| \Rightarrow$

Liénard-Wiechert Potentiale:

$$A^\mu(\vec{x}, t) = e \frac{1}{1 - \vec{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{1}{R(t')} \beta^\mu(t') \Bigg|_{t' = t - \frac{R(t')}{c}}$$

Zur Berechnung von  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld gehen wir von der Integralform bezgl.  $dt'$  von  $A^{\mu}$  aus und bilden den Gradienten bzw. die Rotation. Dazu berechnen wir

$$\vec{\nabla} R = \vec{\nabla} / |\vec{x} - \vec{r}(t)| = \frac{\vec{\nabla} (\vec{x}^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{x} + \vec{r}^2)}{2|\vec{x} - \vec{r}(t)|} = \frac{\vec{x} - \vec{r}(t)}{|\vec{x} - \vec{r}(t)|}$$

$$\partial_i x_j x_j = 2 \delta_{ij} x_j = 2 x_i$$

$$\partial_i x_j r_j = r_i$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R} \vec{R}$$

$$\partial_t R = \partial_t / |\vec{x} - \vec{r}(t)| = \frac{\partial_t (-2\vec{r}(t) \cdot \vec{x} + \vec{r}^2(t))}{2|\vec{x} - \vec{r}(t)|} = -c \vec{\beta}(t) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{r}(t)}{2|\vec{x} - \vec{r}(t)|}$$

$$\Rightarrow \partial_t f(R) = -c \frac{\partial f(R)}{\partial R} \vec{\beta}(t) \cdot \vec{R}$$

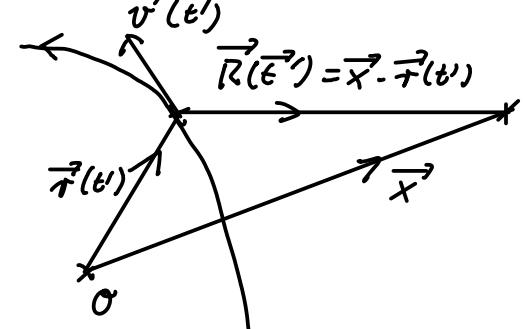
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= -\vec{\nabla} \times e \int dt' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}(t')|} \delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{r}(t')|}{c}) \\ &\quad - \frac{1}{c} \partial_t e \int dt' \vec{\beta}(t') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}(t')|} \delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{r}(t')|}{c}) \\ &= e \int dt' \left( \frac{\vec{R}}{R^2} \delta(t - t' - \frac{R}{c}) + \frac{1}{R} \left( \frac{\vec{R}}{c} - \frac{\vec{\beta}(t')}{c} \right) \delta'(t - t' - \frac{R}{c}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}, t) &= \vec{\nabla} \times e \int dt' \frac{\vec{\beta}(t')}{|\vec{x} - \vec{r}(t')|} \delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{r}(t')|}{c}) \\ &= e \int dt' \left( -\frac{\vec{R} \times \vec{\beta}(t')}{R^2} \delta(t - t' - \frac{R}{c}) - \frac{\vec{R} \times \vec{\beta}(t)}{R c} \delta'(t - t' - \frac{R}{c}) \right) \end{aligned}$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{e}{1 - \vec{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \left( \frac{\vec{R}(t')}{R^2(t')} + \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \vec{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{\vec{R}(t') - \vec{\beta}(t')}{c R(t')} \right) \Big|_{t' = t - \frac{R}{c}}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{e}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \left( \frac{\vec{\beta}(t') \times \hat{R}(t')}{R^2(t')} + \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{\vec{\beta}(t') \times \hat{R}(t')}{c R(t')} \right) \Big|_{t' = t - \frac{R}{c}}$$



$$d\vec{R} = -c \vec{\beta} dt$$

$$dR = |\vec{R} - c\vec{\beta}dt| - |\vec{R}| = -\frac{c}{R} \vec{R} \cdot \vec{\beta} dt + \partial(dt^2)$$

$$d\hat{R} = d \frac{\vec{R}}{R} = -\frac{c \vec{\beta} dt}{R} + \vec{R} \frac{c \vec{\beta} \cdot \vec{R} dt}{R^3}$$

$$= \frac{c}{R} (\hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}(\hat{R} \cdot \hat{R})) dt = \frac{c}{R} \hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) dt$$

→

$$\frac{d\hat{R}}{cdt'} = \frac{1}{R} \hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}), \quad \frac{dR}{cdt'} = -\hat{R} \cdot \vec{\beta}$$

Damit führen wir die Zeitableitungen durch, welche explizit auf  $\hat{R}$  wirken →

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{e}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \left( \frac{\hat{R}(t')}{R^2(t')} - \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{\vec{\beta}(t')}{c R(t')} \right. \\ &\quad \left. + \hat{R} \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{1}{c R(t')} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{1}{R^2(t')} \underbrace{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}_{\hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}} \right) \\ &= \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \left( \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{\hat{R}(t')}{R^2(t')} - \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{\vec{\beta}(t')}{R^2(t')} \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{\vec{\beta}(t')}{c R(t')} + \hat{R}(t') \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{1}{c R(t')} \right) \end{aligned}$$

(wiederum  $t' = t - \frac{R}{c}$ )

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{\epsilon}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \left( -\hat{R}(t') \times \frac{\vec{\beta}(t')}{R^2(t')} - \hat{R}(t') \times \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{\vec{\beta}(t')}{c R(t')} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{R^2(t')} \underbrace{(\hat{R}(t') \times (\hat{R}(t') \times \vec{\beta}(t'))) \times \vec{\beta}(t')}_{= \hat{R} \times \vec{\beta} (\hat{R} \cdot \vec{\beta})} \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \right) \\
&= \frac{\epsilon}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \left( -\hat{R}(t') \times \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{\vec{\beta}(t')}{R^2(t')} \right. \\
&\quad \left. - \hat{R}(t') \times \frac{d}{dt'} \frac{1}{1 - \hat{R}(t') \cdot \vec{\beta}(t')} \frac{\vec{\beta}(t')}{c R(t')} \right) \\
&= \hat{R}(t') \times \vec{E}(\vec{x}, t)
\end{aligned}$$

Wir können also  $\vec{B}$  relativ leicht aus bekanntem  $\vec{E}$  bestimmen und rechnen mit  $\vec{E}$  weiter.

Dazu benötigen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \vec{\beta}(t) &= \dot{\vec{\beta}} \\
&= \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta} \\
\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \frac{1}{1 - \hat{R}(t) \cdot \vec{\beta}(t)} \frac{1}{R(t)} &= -\frac{(-\frac{1}{c} \dot{\vec{\beta}} \cdot \hat{R} - \frac{1}{R} \vec{\beta} \cdot (\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}))) R - \hat{R} \cdot \vec{\beta} (1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2 R^2} \\
&= \frac{\frac{1}{c} \dot{\vec{\beta}} \cdot \hat{R} R - \vec{\beta}^2 + \hat{R} \cdot \vec{\beta}}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2 R^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{\epsilon}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \left( \frac{1}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \frac{\hat{R}}{R^2} - \frac{1}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \frac{\vec{\beta}}{R^2} + (\hat{R} - \vec{\beta}) \frac{\hat{R} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}^2}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2 R^2} \right. \\
&\quad \left. + (\hat{R} - \vec{\beta}) \frac{\frac{1}{c} \dot{\vec{\beta}} \cdot \hat{R} R}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2 R^2} - \frac{\frac{1}{c} \dot{\vec{\beta}}}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}) R} \right) \\
&= \frac{\epsilon}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} \left( \frac{(\hat{R} - \vec{\beta})(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2 R^2} + (\hat{R} - \vec{\beta}) \frac{\hat{R} \cdot \vec{\beta} - \vec{\beta}^2}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2 R^2} \right. \\
&\quad \left. + (\hat{R} - \vec{\beta}) \frac{\frac{1}{c} \dot{\vec{\beta}} \cdot \hat{R}}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2 R} - \frac{\frac{1}{c} \dot{\vec{\beta}} (1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2 R} \right)
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\frac{e}{(1-\vec{R} \cdot \vec{\beta})^3 R^2} (\vec{R} - \vec{\beta}) (1 - \vec{\beta}^2)}_{\text{"Geschwindigkeitsfeld"} } + \underbrace{\frac{e}{c(1-\vec{R} \cdot \vec{\beta})^3 R} \vec{R} \times [(\vec{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}_{\text{"Beschleunigungsfeld"} }$$

Die rechte Seite ist wieder für  $t' = t - \frac{R(t)}{c}$  auszuwerten.

Wir haben auch benutzt, daß

$$\vec{R} \times [(\vec{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] = (\vec{R} - \vec{\beta})(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}(1 - \vec{R} \cdot \vec{\beta})$$

Das Geschwindigkeitsfeld kann alternativ auch durch einen Boost des elektrostatischen Coulombfeldes bestimmt werden.

Das Beschleunigungsfeld führt zur Abstrahlung von Leistung. Wir betrachten dazu den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{R} \times \vec{E}) = \frac{c}{4\pi} \left( \vec{R} \vec{E}^2 - \underbrace{\vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{R})}_{=0} \right) = \frac{c}{4\pi} \vec{R} \vec{E}^2$$

$$\rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = R^2 \vec{S} \cdot \hat{R} = \frac{c}{4\pi} R^2 \vec{E}^2 = \frac{c^2}{4\pi c} \frac{(\vec{R} \times [(\vec{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}])^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{R})^6}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall  $|\vec{\beta}| \ll 1$  vereinfacht sich die Winkelabhängigkeit deutlich:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} (\vec{R} \times [\vec{R} \times \dot{\vec{\beta}}])^2 = \frac{e^2}{4\pi c} \dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2 \vartheta = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \vartheta$$

mit  $\vartheta$  dem Winkel zwischen der Beschleunigung und Strahlungsrichtung.

$$\rightarrow P = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 2\pi \int_{-1}^1 d\cos \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) = \frac{2e}{3c^3} \dot{v}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

Anstatt ein kompliziertes Winkelintegral durchzuführen,

wollen wir aus diesem Ausdruck auf die relativistische Verallgemeinerung schließen. Zur Verfügung stehen die Viervektoren  $p_\mu$  und  $\frac{dp_\mu}{dt}$ . Andere können nicht vorkommen, da in der relativistischen Form für  $\frac{dP}{dt}$  höchstens erste Zeitableitungen auftreten. Insgesamt sollte die Antwort  $\propto \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dp}{dt}$  sein. Weiterhin ist  $p^2 = m^2$  und  $0 = \frac{d}{dt} p^\mu = 2p_\mu \cdot \frac{dp^\mu}{dt}$ , d.h. der Proportionalitätsfaktor kann nur konstant und nicht eine Funktion von  $p^\mu$  oder Ableitungen davon sein.

$$\rightarrow P = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dp}{dt}$$

$$\text{Mit } \frac{d}{dt} \gamma = \gamma \frac{d}{dt}, \quad p^\mu = m \begin{pmatrix} c \vec{\gamma} \\ c \vec{\gamma} \vec{\beta} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \gamma = -\frac{1}{2} \frac{(1-2) \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}{(1-\vec{\beta}^2)^{\frac{3}{2}}} = \gamma^3 \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}$$

$$\rightarrow \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma m c \begin{pmatrix} \gamma^3 \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \\ \gamma^3 \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \vec{\beta} + \gamma \vec{\beta} \vec{\beta} \end{pmatrix} = \gamma^4 m c \begin{pmatrix} \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \\ \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \vec{\beta} + (1-\vec{\beta}^2) \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_\mu}{dt} \frac{dp^\mu}{dt} &= \gamma^8 m^2 c^2 \left( (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta})^2 (1-\vec{\beta}^2)^2 - 2(1-\vec{\beta}^2)(\vec{\beta} \cdot \vec{\beta})^2 - (1-\vec{\beta}^2)^2 \vec{\beta}^2 \right) \\ &= -\gamma^8 m^2 c^2 \left( \frac{1}{\gamma^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta})^2 + \frac{1}{\gamma^2} (\vec{\beta}^2 - \vec{\beta}^2 \vec{\beta}^2) \right) \\ &= -\gamma^6 m^2 c^2 \left( -\vec{\beta}^2 \vec{\beta}^2 + (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta})^2 + \vec{\beta}^2 \right) \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} (\vec{\beta} \times \vec{\beta})^2 &= \epsilon_{ijk} \beta_j \dot{\beta}_k \epsilon_{ilm} \beta_l \dot{\beta}_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \beta_j \beta_l \dot{\beta}_k \dot{\beta}_m \\ &= \vec{\beta}^2 \dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \cdot \vec{\beta})^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$P = \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 [\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2] \quad (\text{Liénard 1898})$$

Diese Strahlungsverlust tritt z.B. in Form von Röntgenstrahlung bei im Materie gebremsten Elektronen auf. Außerdem ist er von wesentlicher Bedeutung für Teilchenbeschleuniger. Für eine bestimmte Beschleunigungskraft  $\frac{dp}{dt}$  ist die Strahlleistung  $\propto \frac{1}{m^2}$  — gewünschte sowie unerwünschte Effekte sind damit für Elektronen sehr viel größer als für Protonen.

### Linearbeschleuniger

$$\dot{\vec{\beta}} \parallel \vec{\beta} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \gamma m c \vec{\beta} = m c (\gamma^3 \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\beta} + \gamma \vec{\beta})$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|^2 = m^2 c^2 \gamma^6 (\dot{\beta}^2 \beta^4 + (1-\beta^2)^2 \dot{\beta}^2 + 2(1-\beta^2) \dot{\beta}^2 \beta^2) \\ = m^2 c^2 \gamma^6 \dot{\beta}^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{2e^2}{3m^2 c^3} \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|^2 = \frac{2e^2}{3m^2 c^3} \left( \frac{dE}{dx} \right)^2$$

Wobei wir benutzen

$$p^0 - \vec{p}^2 = m^2 \Rightarrow d(p^0 - \vec{p}^2) = 0 \Rightarrow 2p^0 \frac{dp^0}{dx} dx - 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dx} = c \frac{dp^0}{dx} = \frac{1}{\beta} \frac{|\vec{p}|}{p^0} \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = \frac{1}{\beta} \frac{v}{c} \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right|$$

Relativer Strahlungsverlust:

$$\frac{P}{dE} = \frac{2e^2}{3m^2 c^3} \frac{1}{v} \frac{dE}{dx} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{2}{3} \frac{\frac{e^2}{mc^2}}{mc^2} \frac{dE}{dx}$$

Dabei ist  $\frac{e^2}{mc^2} = 1,82 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  und  $mc^2 = 0,511 \cdot 10^6 \text{ eV}$

$$\rightarrow \frac{0,571 \cdot 10^6 \text{ eV}}{2,92 \cdot 10^{-15} \text{ m}} \approx 2 \cdot 10^{14} \frac{\text{MeV}}{\text{m}}$$

Daran sehen wir die nötige Feldstärke für Strahlungsverluste von der Ordnung eins. Die größten technisch realisierbaren Felder sind von der Ordnung  $10^2 \frac{\text{MV}}{\text{m}}$ , so daß die Verluste vernachlässigbar sind.

### Kreisbeschleuniger

Die Teilchen befinden sich auf einer Kreisbahn, wobei die Energieänderung pro Umlauf klein sein soll

$$\left| \frac{d\vec{p}}{dt} \right| = \gamma \omega |\vec{p}| \gg \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}$$

$$P = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dP}{dt} \approx \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \omega^2 \vec{p}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{c^2} \beta^4 \gamma^4$$

$$\text{mit dem Bahnradius } \omega = \frac{c\beta}{e}, \quad |\vec{p}| = mc\gamma\beta$$

→ Energieverlust pro Umlauf

$$\Delta E = \frac{2\pi}{\omega} P = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{c} \beta^3 \gamma^4$$

→ Für Elektronen mit  $\beta \approx 1$

$$\Delta E [\text{GeV}] = 8,85 \cdot 10^{-8} \frac{(E[\text{GeV}])^4}{e[\text{km}]}$$

Der Beschleuniger LEP hatte  $e \approx 4,3 \text{ km}$  und  $E \approx 100 \text{ GeV}$ , d.h. er kollidierte Elektronen und Positronen mit jeweils dieser Energie. Der Energieverlust pro Umlauf betrug also etwa 2%. Das Verhalten  $\propto E^4$  macht es problematisch, mit Kreisbeschleunigern wesentlich höhere Elektronenergien zu erreichen.

## Winkelverteilung der Strahlung beschleunigter Ladungen

Nichtrelativistisch ergibt sich ein  $\sin^2 \vartheta$ -Verhalten:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{\vec{v}}^2 \sin^2 \vartheta$$

Z.B. oszillierende Ladung (reiner Dipol)

$$\vec{x} = \vec{x}_0 \cos \omega t$$

$$\vec{p} = e \int d^3x \vec{x} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0 \cos \omega t) = e \vec{x}_0 \cos \omega t$$

$$\dot{\vec{v}} = -\vec{x}_0 \omega^2 \cos \omega t = -\frac{1}{e} \omega^2 \vec{p}(t)$$

$$\xrightarrow{\quad} \frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{4\pi c^3} \vec{p}(t)^2 \sin^2 \vartheta$$

Dies stimmt nach zeitlicher Mittelung überein mit der Dipolstrahlung.

Im relativistischen Fall ist  $|\vec{\beta}|$  nicht mehr klein. Wir benutzen die Beziehungen  $t' = t - \frac{\vec{R}(t)}{c}$  und  $\frac{dR}{cdt'} = -\vec{R} \cdot \vec{\beta}$ , um damit zu berechnen

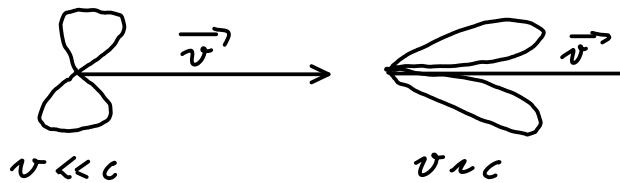
$$\frac{dt}{dt'} = 1 + \frac{\dot{\vec{R}}(t')}{c} = 1 - \vec{R} \cdot \vec{\beta}$$

Für die Winkelverteilung der Abstrahlung ist es sinnvoll, diese auf ein Intervall  $dt'$  anstatt von  $dt$  zu beziehen, so dass "mitbewegte" Beiträge ausgeschlossen werden. Damit erhalten wir

$$\frac{dP'}{d\Omega} := \frac{dP}{d\Omega} \frac{dt}{dt'} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{(\vec{R} \times [(\vec{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}])^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{R})^5}$$

Für  $\dot{\vec{\beta}} \parallel \vec{\beta}$  wird dies zu

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \dot{\vec{\beta}}^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5}$$



In den Skizzen ist  $\vartheta$  der Winkel zu  $\vec{v}$  und der Abstand zum Ursprung ist  $\left| \frac{dP'}{d\Omega} \right|$ .

Ist nun  $\dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$ , ergibt sich eine kompliziertere Winkelabhängigkeit, der Nennerdenn führt aber weiterhin zu einer Berichtigung der Vorwärtsrichtung.

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}} \times [(\vec{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \\ = (\vec{R} - \vec{\beta})(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}(1 - \vec{R} \cdot \vec{\beta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\dot{\vec{R}} \times [(\vec{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}])^2 &= \dot{\beta}^2 (1 - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^2 - 2(1 - \vec{R} \cdot \vec{\beta})(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{R} + (\vec{R} - \vec{\beta})^2 (\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \\ &= \dot{\beta}^2 (1 - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^2 - (1 - \beta^2)(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \\ &= \dot{\beta}^2 (1 - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^2 - \dot{\beta}^2 \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

→

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \frac{1}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3} \left( 1 - \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \vartheta)^2} \right)$$

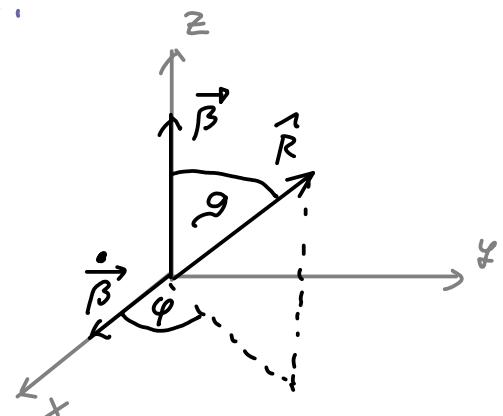
Für die Gesamtstrahlungsleistung bei Beschleunigung senkrecht zur Bahn gilt:

$$P = \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 [\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2] = \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 \dot{\beta}^2 (1 - \beta^2) = \frac{2e^2}{3c} \gamma^4 \dot{\beta}^2$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \gamma m \vec{v} = \gamma m \dot{\vec{v}} + \gamma^3 m \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = \gamma m \dot{\vec{v}}$$

→

$$P = \frac{2e^2}{3m^2 c^3} \gamma^2 \left| \frac{d\vec{P}}{dt} \right|^2$$



Im Vergleich zur Strahlung bei der Linearbeschleunigung tritt hier im relativistischen Regime ein zusätzlicher Verstärkungsfaktor  $r^2$  auf.

### Spektrum

Wir schreiben für die Leistung pro Winkelelement

$$\frac{dP}{d\Omega} = |\vec{A}(t)|^2 \quad \text{mit} \quad \vec{A}(t) = \sqrt{\frac{c}{4\pi}} R \vec{E}$$

$$(\text{vgl. } \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} \vec{R} \vec{E}^2 \rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = R^2 \vec{S} \cdot \vec{R})$$

Für die Energie:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{A}(t)|^2 dt$$

$$\vec{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \vec{A}(t) \iff \vec{A}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \vec{A}(\omega)$$

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \vec{A}^*(\omega') \cdot \vec{A}(\omega) e^{i(\omega'-\omega)t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \vec{A}^*(\omega') \cdot \vec{A}(\omega) \frac{1}{2\pi} \delta(\omega - \omega')$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\vec{A}(\omega)|^2 \quad (\text{entsprechend Parseval-Planckesel})$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dI(\omega)}{d\Omega}$$

mit

$$\frac{d\vec{I}(\omega)}{d\omega} = |\vec{A}(\omega)|^2 + |\vec{A}(-\omega)|^2 = 2 |\vec{A}(\omega)|^2$$

$$\vec{A}(t) \in \mathbb{R}^3$$

$$\frac{dt}{dt'} = 1 + \frac{\dot{R}(t')}{c} = 1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}$$

Mit dem elektrischen Beschleunigungsfeld folgt:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\omega) &= \sqrt{\frac{e^2}{4\pi c}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \left[ \frac{e}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^3} \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right]_{t' = t - \frac{R(t')}{c}} \\ &= \sqrt{\frac{e^2}{4\pi c}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t' + \frac{R(t')}{c})} \left[ \frac{e}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2} \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right]_{t'}\end{aligned}$$

Wir wählen die Koordinaten nun so, dass die Bahn des Teilchens in der Nähe des Koordinatenursprungs ist

$$R(t) = |\vec{x} - \vec{r}(t)| \approx x - \hat{R} \cdot \vec{r}(t)$$

$$\rightarrow \vec{A}(\omega) = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi c}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t' - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}(t')}{c})} \left[ \frac{e}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2} \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right]_{t'}$$

Dabei haben wir den Phasenfaktor  $e^{i\omega \frac{x}{c}}$  fallengelassen.

→

$$\frac{d\vec{I}}{d\omega} = \frac{e^2}{2\pi c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}(t)}{c})} \left[ \frac{e}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2} \hat{R} \times [(\hat{R} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right] \right|^2$$

In großem Abstand zur Punktladung gilt:

$$\left| \frac{d\hat{R}}{dt'} \right| = \frac{c}{R} \left| \hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) \right| \ll |\dot{\vec{\beta}|}$$

→

$$\frac{d}{dt} \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}} = \frac{\hat{R} \times (\hat{R} \times \dot{\vec{\beta}}) (1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}) + \hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) \hat{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}}{(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta})^2}$$

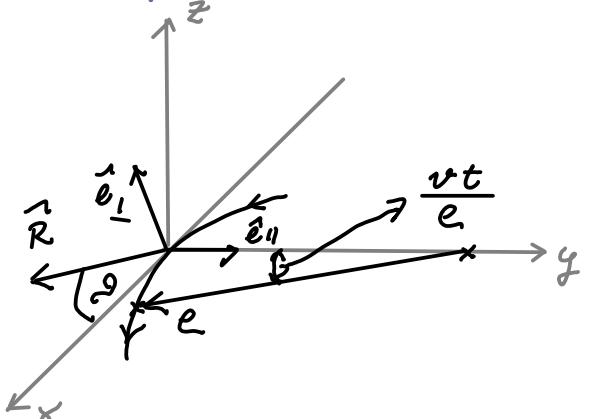
$$\begin{aligned}
 &= \frac{[\vec{R}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{B}}) - \dot{\vec{B}}](1 - \vec{R} \cdot \vec{B}) + [\vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{B}) - \vec{B}](\vec{R} \cdot \dot{\vec{B}})}{(1 - \vec{R} \cdot \vec{B})^2} \\
 &= \frac{\vec{R}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{B}}) - \dot{\vec{B}} + \dot{\vec{B}}(\vec{R} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{R} \cdot \dot{\vec{B}})}{(1 - \vec{R} \cdot \vec{B})^2} \\
 &= \frac{\vec{R} \times (\vec{R} \times \dot{\vec{B}}) - \vec{R} \times (\vec{B} \times \dot{\vec{B}})}{(1 - \vec{R} \cdot \vec{B})^2}
 \end{aligned}$$

Der entsprechende Faktor im Integranden ist also eine totale Ableitung. Partielle Integration liefert dann (wiederum werden Beiträge  $\sim \vec{R}$  vernachlässigt):

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t - \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}(t)}{c})} \vec{R} \times (\vec{R} \times \dot{\vec{B}}) \right|^2$$

Ein Reflektor wird für ein ultrarelativistisches Teilchen einen Lichtpuls in Richtung von dessen Bewegung wahrnehmen. Während dieser kurzen Dauer können wir die Bewegung als Element einer Kreisbahn mit Radius  $e$  ( $\hat{=}$  lokaler Krümmungsradius der Bahn) und Frequenz  $\omega_0 = \frac{c}{e}$  beschreiben. Außerdem können wir eine Näherung in kleinen Winkeln um die Bewegungsrichtung vornehmen.

Wir führen dazu folgende Koordinaten ein:



Die Bahn liegt dabei in der  $x-y$ -Ebene. Integrieren wir über ein hinreichend langes Bahnelement, können wir o. B. d. t.  $\vec{R}$  in die  $x-z$ -

Eben liegen. Der wesentliche Anteil der Strahlung tritt für kleine Winkel  $\vartheta$  zwischen Bahnen und Beobachter auf. Für die Polarisation benutzen wir die Vektoren  $\hat{e}_{||}$  (entlang der  $y$ -Achse in der Kreisbahnene) und  $\hat{e}_\perp = \hat{R} \times \hat{e}_{||}$  (senkrecht zu  $\hat{e}_{||}$  und  $\hat{R}$ , also nahe der  $z$ -Achse für kleine  $\vartheta$ ).

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ 0 \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \beta \begin{pmatrix} \cos \frac{vt}{c} \\ \sin \frac{vt}{c} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_{||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_\perp = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ 0 \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = c \begin{pmatrix} \sin \frac{vt}{c} \\ \cos \frac{vt}{c} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vartheta \text{ ist in der Skizze negativ}$$

$$\begin{aligned} \hat{R} \times (\hat{R} \times \vec{\beta}) &= \hat{R} (\hat{R} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta} \\ &= \beta \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \frac{vt}{c} - \cos \frac{vt}{c} \\ -\sin \frac{vt}{c} \\ \sin \vartheta \cos \frac{vt}{c} \end{pmatrix} \\ &= \beta \left[ -\hat{e}_{||} \sin \frac{vt}{c} + \hat{e}_\perp \sin \vartheta \cos \frac{vt}{c} \right] + \mathcal{O}(\vartheta^2) \end{aligned}$$

$\uparrow$   
 $\cos \vartheta \approx 1$   
 $\sin^2 \vartheta \approx 0$

$$\omega \left( t - \frac{\hat{R} \cdot \vec{r}(t)}{c} \right) = \omega \left( t - \frac{c}{c} \sin \frac{vt}{c} \cos \vartheta \right)$$

$$\approx \omega \left( t - \frac{c}{c} \left( \frac{vt}{c} - \frac{v^3 t^3}{3! c^3} \right) \left( 1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right) \right)$$

$$\approx \omega \left( t (1 - \beta) + \beta t \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{v^3 t^3}{6 c e^2} \right)$$

Wir benutzen noch  $\beta \approx 1$  und schreiben

$$\frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1-\beta^2}{2} = \frac{(1-\beta)(1+\beta)}{2} \approx 1-\beta$$

→

$$\omega \left( t - \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}(t)}{c} \right) = \frac{\omega}{2} \left( \left( \frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3\epsilon^2} \right)$$

Insgesamt zerlegen wir

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \left| -\hat{e}_{||} A_{||}(\omega) + \hat{e}_{\perp} A_{\perp}(\omega) \right|^2$$

mit

$$A_{||}(\omega) = \frac{c}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i \frac{\omega}{2} \left( \left( \frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3\epsilon^2} \right)}$$

$$A_{\perp}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i \frac{\omega}{2} \left( \left( \frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3\epsilon^2} \right)}$$

$$x = \frac{ct}{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2}} \iff t = \frac{\epsilon}{c} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2} x$$

$$\vartheta = \frac{\omega \epsilon}{3c} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

→

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2} \left( \left( \frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2 \right) t + \frac{c^2 t^3}{3\epsilon^2} \right) &= \frac{\omega}{2} \left( \frac{\epsilon}{c} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2 \right)^{\frac{3}{2}} x + \frac{\epsilon}{c} \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2 \right)^{\frac{3}{2}} x^3 \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{\epsilon}{c} x + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{c} x^3 = \frac{3}{2} \frac{\epsilon}{c} \left( x + \frac{1}{3} x^3 \right) \end{aligned}$$

$$A_{||}(\omega) = \frac{\epsilon}{c} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \vartheta^2 \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x dx e^{\frac{3}{2} i \frac{\epsilon}{c} \left( x + \frac{1}{3} x^3 \right)}$$

$$A_{\perp}(\omega) = \frac{e}{c} \omega \sqrt{\frac{1}{p^2 + \omega^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{3}{2} i \xi (x + \frac{1}{3} x^3)}$$

Die Integrale ergeben sich aus dem symmetrischen Anteil der Integranden:

$$\int_0^{\infty} x dx \sin\left(\frac{3}{2} \xi (x + \frac{1}{3} x^3)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{\frac{2}{3}}(\xi)$$

$$\int_0^{\infty} dx \cos\left(\frac{3}{2} \xi (x + \frac{1}{3} x^3)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} K_{\frac{1}{3}}(\xi)$$

mit den modifizierten Bessel-Funktionen  $K$ .

→

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} = \frac{ze^2 \omega^2 c^2}{3\pi c^3} \left( \frac{1}{p^2 + \omega^2} \right)^2 \left( K_{\frac{2}{3}}(\xi) + \frac{\omega^2}{\frac{1}{p^2} + \omega^2} K_{\frac{1}{3}}(\xi) \right)$$

$\nearrow$  II-Anteil       $\nearrow$  I-Anteil

Die Winkelverteilung des Energiestroms ist

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dI(\omega)}{d\omega} = \frac{7}{16} \frac{e^2}{c} \frac{1}{\left(\frac{1}{p^2} + \omega^2\right)^{\frac{5}{2}}} \left( 1 + \frac{5}{7} \frac{\omega^2}{\frac{1}{p^2} + \omega^2} \right)$$

$\nearrow$  II-Anteil       $\nearrow$  I-Anteil

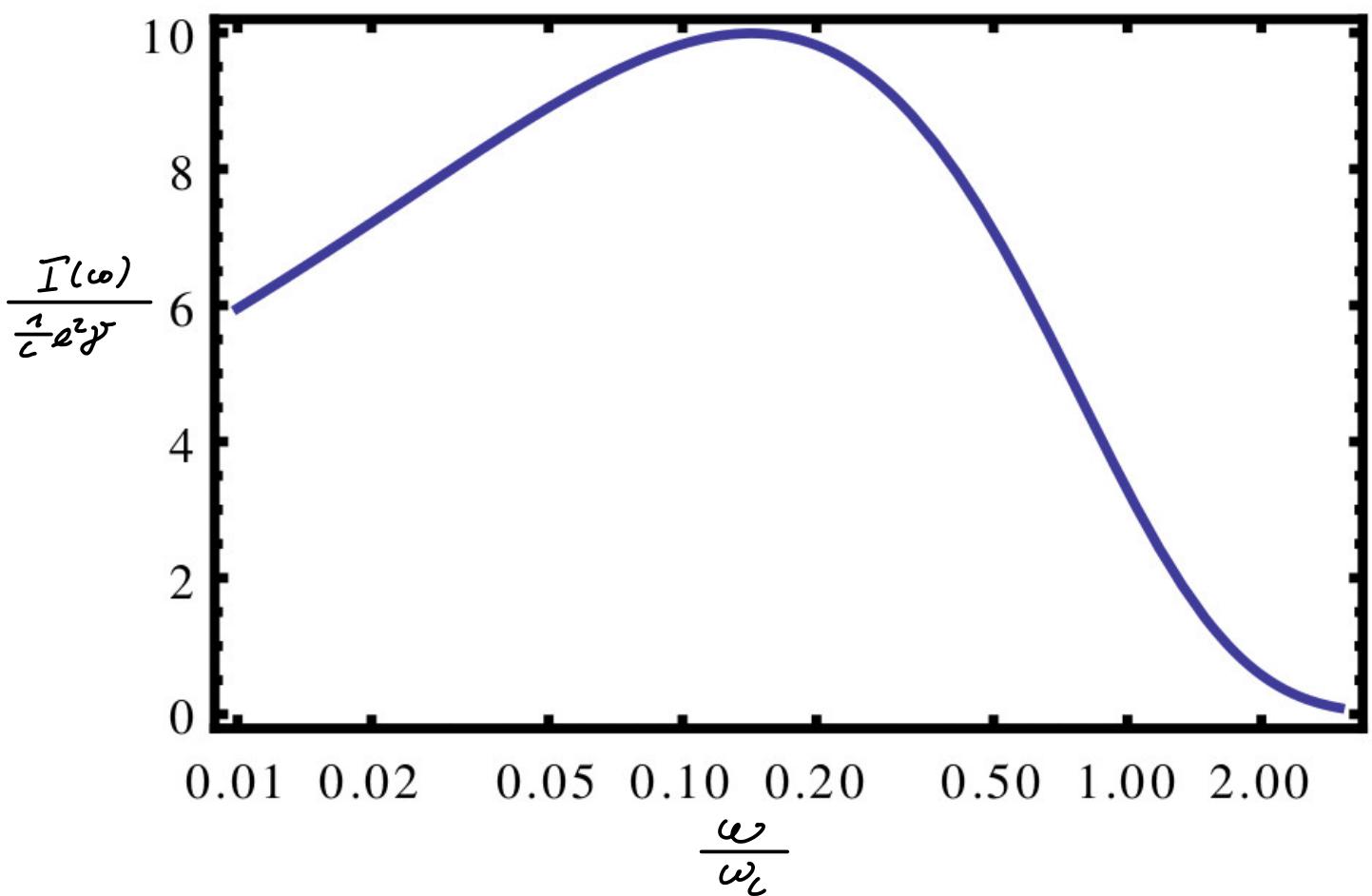
Führt man noch die Winkelintegration durch, dann zeigt sich daß gegenüber senkrechten Polarisation die siebenfache Leistung in paralleler Polarisation abgestrahlt wird.

Für große  $x$  ist  $K_r(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ , d.h. es treten keine wesentlichen Beiträge für  $\xi \gg 1$  auf,

oder  $\omega > \frac{3c}{e} \left( \frac{1}{j^2} + \omega^2 \right)^{-\frac{3}{2}}$ . Je höher die Strahlung, desto geringer der Winkel. Für  $j=0$  finden wir die kritische Frequenz  $\omega_c = \frac{3c}{e} j^{3/2}$  oberhalb welcher das Spektrum für alle Winkel unterdrückt ist. Wir entwickeln für kleine und große Frequenzen das Spektrum für  $j=0$ :

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} \Big|_{j=0} \underset{\omega \ll \omega_c}{\approx} \frac{e^2}{c} \frac{2}{\pi} j^2 \left( \frac{2}{3} \right) \left( \frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{\omega e}{c} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dI(\omega)}{d\omega} \Big|_{j=0} \underset{\omega \gg \omega_c}{\approx} 3 \frac{e^2}{c} j^2 \frac{\omega}{\omega_c} e^{-2 \frac{\omega}{\omega_c}}$$



Das Spektrum erhalten wir schließlich mit

$$I(\omega) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \frac{dI(\Omega)}{d\Omega}$$

Im Gegensatz zu der üblichen Parametrisierung der Kugeloberfläche ist hier  $\Omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Die Integrationsgrenzen können dabei nach  $\pm\infty$  geschicht werden, da der Integrand schon für recht kleine  $|\Omega|$  sehr stark abfällt.

Für  $\omega \ll \omega_c$  kann das Spektrum also als breit und flach charakterisiert werden.